Kajian Himpunan Dominasi pada Graf Khusus dan Operasinya

Miftahur Roifah[2], Dafik[1,3]
[1]CGANT-University of Jember
[2]Department of Mathematics FMIPA University of Jember
miftahurroifah@gmail.com
[3]Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Himpunan dominasi (*Dominating Set*) adalah suatu himpunan bagian V' dari himpunan titik $V(G)$ dimana titik-titik yang tidak berada pada V' terhubung langsung dengan minimal satu titik V'. Ukuran dari himpunan dominasi terkecil disebut bilangan dominasi. Bilangan dominasi pada graf G dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Operasi graf adalah graf yang merupakan hasil operasi dua buah atau lebih graf sehingga menghasilkan graf baru G' dengan himpunan titik $V(G')$ dan himpunan sisi $E(G')$. Makalah ini akan membahas kajian himpunan dominasi dan bilangan dominasinya untuk graf khusus dan operasinya. Adapun graf khusus yang akan dioperasikan adalah graf lengkap K_m, graf siklus C_n, dan graf Path P_m.

Key Words : *Himpunan dominasi, bilangan dominasi, operasi graf khusus.*

Pendahuluan

Konsep himpunan dominasi pada graf memiliki akar sejarah sejak tahun 1850an ketika penggemar catur Eropa mempelajari masalah "dominasi ratu", seperti yang telah dijelaskan pada [5]. Penggemar ini bekerja untuk menentukan jumlah minimum ratu yang diperlukan sehingga setiap persegi pada papan catur standar 8×8 dapat diduduki oleh sebuah ratu atau dapat langsung diserang oleh ratu, dengan kata lain kotak tersebut didominasi oleh sebuah ratu. Situasi tersebut dapat dimodelkan dengan teori graf. Pada papan catur, kotak adalah titik (V) dan dua titik terhubung di G jika setiap kotak dapat dicapai oleh ratu pada kotak lain dengan satu langkah. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk tidak bertabrakan dengan ratu lainnya dengan satu langkah adalah bilangan dominasi dari sebuah himpunan dominasi di G. Lebih detail lihat [6].

Selanjutnya studi matematika himpunan dominasi dimulai pada tahun 1960an, dan sejak saat itu, himpunan dominasi digunakan untuk banyak aplikasi yang berbeda, diantaranya untuk memodelkan keterkaitan pada jaringan komunikasi komputer, teori jejaring sosial, dan masalah serupa lainnya. Penelitian terkait himpunan dominasi berkembang cukup pesat. Lebih detail lihat [7], [8].

Penentuan bilangan dominasi pada graf dan penentuan himpunan dominasi minimum terbukti sangat berguna. Pada artikel ini akan dipelajari tentang bilangan dominasi pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantaranya graf joint product K_3+C_n dan K_3+P_m, graf Cartesian product $C_n \times P_m$, graf Crown product $C_n \odot K_m$, dan graf Shackel (K_m, n).

Joint product dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1+G_2$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Cartesian product dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1 \times G_2$ yang didefinisikan sebagai $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G) \Leftrightarrow x_1 = y_1$ dan $x_2y_2 \in E(G_2)$ atau $x_2 = y_2$ dan $y_1, y_2 \in E(G_1)$. Crown product dari graf G_1 dan G_2 didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di $H_i, i = 1, 2, 3, ..., |V(G)|$. Graf Shackel dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, ..., G_k)$ yang didefinisikan sebagai sebuah graf yang dibentuk dari k graf terhubung tak trivial $G_1, G_2, ..., G_k$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k]$ dengan $|s-t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k-1]$, G_i dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $k-1$ titik penghubung itu semua berbeda.

Teorema yang Digunakan

Theorem 1 *[5] Untuk sebarang graf G,*

$$\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

Proof. Misalkan S adalah sebuah γ - set dari G. Pertama, kita andaikan batas bawah. Setiap titik dapat sebagai dominating set dan $\gamma(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan degree maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai dominating set $N[v]$ dan titik di $V - N[v]$ merupakan dominating set mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan dominating set dengan kardinalitas $n - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$. □

Theorem 2 *[2] Jika sebuah graf sederhana G=(V, E) dengan n titik mempunyai sebuah titik dengan derajat $n-1$, maka bilangan dominasi $\gamma(G)$ adalah satu.*

Proof. Diberikan graf sederhana G=(V, E) dengan n titik. Misalkan v adalah titik dalam G dengan derajat $n-1$, maka setiap titik lain adjacent dengan v sehingga v adalah himpunan dominasi dari graf G, dengan bilangan dominasi $\gamma(G) = 1$. □

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait bilangan dominasi untuk beberapa graf khusus dan operasinya, seperti graf joint product $K_3 + C_n$ dan $K_3 + P_m$, graf Cartesian product $C_n \times P_m$, graf Crown product $C_n \odot K_m$, dan graf Shackel (K_m, n).

◇ **Akibat 1** *Untuk $n \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf joint product $K_3 + C_n$ adalah $\gamma(K_3 + C_n) = 1$*

Bukti. Graf joint product K_3+C_n adalah graf yang memiliki $V(K_3+C_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(K_3+C_n) = \{x_1y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_2y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_3y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_1y_n\}$, $p = |V|{=}n+3$ dan $q = |E|{=}4n+3$. Berdasarkan Teorema 2 dinyatakan bahwa $\gamma(K_3 + C_n) = 1$. □

◇ **Akibat 2** *Untuk $n \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf joint product $K_3 + P_m$ adalah $\gamma(K_3 + P_m) = 1$*

Bukti. Graf joint product K_3+P_m adalah graf yang memiliki $V(K_3+P_m) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(K_3+P_m) = \{x_1y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_2y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_3y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$, $p = |V|{=}n+3$ dan $q = |E|{=}4n+2$. Berdasarkan Teorema 2 dinyatakan bahwa $\gamma(K_3+C_n) = 1$. □

◇ **Teorema 1** *Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf cartesian product $C_n \times P_m$ adalah $\gamma(C_n \times P_m) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$*

Bukti. Graf cartesian product $C_n{\times}P_m$ adalah graf yang memiliki $V(C_n{\times}P_m)$ $=\{x_{j,i}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n{\times}P_m){=}\{x_{j,i}x_{j,i+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$ $\cup \{x_{j,i}x_{j+1,i}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,n}x_{j,1}; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V|{=}nm$, $q = |E|{=}2mn-n$, dan $\Delta(C_n \times P_m) = 3$. Pilih titik yang menjadi himpunan dominasi $D = \{x_{2l-1,4k-3};\ 1 \leq l \leq m;\ 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_{2l,4k-1};\ 1 \leq l \leq m;\ 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_{j,3k-2};\ j \text{ ganjil};\ 1 \leq k \leq n;\ n \text{ ganjil}\} \cup \{x_{j,3k};\ j \text{ genap};\ 1 \leq k \leq n;\ n \text{ ganjil}\}$ sehingga dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$ sehingga $\gamma(C_n \times P_m) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n \times P_m)} \rceil \leq \gamma(C_n \times P_m) \leq p - \Delta(C_n \times P_m)$, untuk nilai p dan $\Delta(C_n \times P_m)$ diperoleh batas atas dan batas bawah bilangan dominasi yaitu $\lceil \frac{nm}{4} \rceil \leq \gamma(C_n \times P_m) \leq nm - 3$. Maka $\gamma(C_n \times P_m)$ berada dalam interval batas bilangan dominasi yaitu $\lceil \frac{nm}{4} \rceil \leq \gamma(C_n \times P_m) \leq nm - 3$ dan mencapai batas bawah. $\square$

◇ **Teorema 2** *Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf $C_n \odot K_m$ adalah $\gamma(C_n \odot K_m) = n$.*

Bukti. Graf $C_n \odot K_m$ adalah graf yang memiliki $V(C_n \odot K_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_n \odot K_m) = \{x_1x_n, x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+k}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-k, 1 \leq k \leq m-2\} \cup \{x_{i,1}x_{i,n}; 1 \leq i \leq n\}$ serta $p = |V| = mn + n$, $q = |E| = \frac{n(m^2+m+2)}{2}$, dan $\Delta(C_n \odot K_m) = m$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = n$ sehingga $\gamma(C_n \odot K_m) = n$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n \odot K_m)} \rceil \leq \gamma \leq p - \Delta(C_n \odot K_m)$, untuk nilai p dan $\Delta(C_n \odot K_m)$ diperoleh batas atas dan batas bawah bilangan dominasi yaitu $\lceil n \rceil \leq \gamma(C_n \odot K_m) \leq mn + n - m$. Maka $\gamma(C_n \odot K_m)$ berada dalam interval batas bilangan dominasi yaitu $\lceil n \rceil \leq \gamma(C_n \odot K_m) \leq mn + n - m$ dan mencapai batas bawah. $\square$

◇ **Teorema 3** *Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf Shackel (K_m, n) adalah $\gamma(Shack(K_m, n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Bukti. Graf Shackel (K_m, n) adalah graf yang memiliki $V(Shack(K_m, n)) = \{x_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-2\} \cup \{z_1, z_2\}$ dan $E(Shack(K_m, n)) = \{x_1z_1, x_nz_2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{x_iy_{i,j}, x_iy_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq i \leq m-2\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-k-2; 1 \leq k \leq m-4\} \cup \{z_1y_{1,j}, z_2y_{n,j}; 1 \leq i \leq m-2\}$ serta $p = |V| = mn - n + 1$, $q = |E| = \frac{m^2n-m}{2}$, dan $\Delta(Shack(K_m, n)) = 2m - 2$. Pilih titik yang menjadi himpunan dominasi $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n\,\text{ganjil}\}$ sehingga dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga $\gamma(Shack(K_m, n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(Shack(K_m,n))} \rceil \leq \gamma(Shack(K_m, n)) \leq p - \Delta(Shack(K_m, n))$, untuk nilai p dan $\Delta(Shack(K_m, n))$ diperoleh batas atas dan batas bawah bilangan dominasi yaitu $\lceil \frac{mn-n+1}{2m-1} \rceil \leq \gamma(Shack(K_m, n)) \leq mn - 2m - n + 3$. $\gamma(Shack(K_m, n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sedangkan batas atas dan batas bawah $\lceil \frac{mn-n+1}{2m-1} \rceil \leq \gamma(Shack(K_m, n)) \leq mn - 2m - n + 3$ sehingga $\gamma(Shack(K_m, n))$ berada pada interval, tetapi tidak mencapai batas bawah. Karena kita mencari nilai terkecil, selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk $m = 3$ maka $\lceil \frac{2n+1}{5} \rceil \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. $\lceil \frac{2n+1}{5} \rceil = \lceil \frac{2n}{5} \rceil + \lceil \frac{1}{5} \rceil = \lceil \frac{n}{2.5} \rceil + 1 \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, maka terbukti bahwa $\lceil \frac{2n+1}{5} \rceil \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jika dilihat dari bentuk dasar, graf Shackel

(K_m, n) adalah graf Ladder L_n dimana $\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jadi terbukti bahwa $\gamma(Shack(K_m, n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini akan diriview kembali bilangan dominasi $\gamma(G)$ pada beberapa graf khusus dan operasinya. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Untuk $n \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf joint product $K_3 + C_n$ adalah $\gamma(K_3 + C_n) = 1$ dan $\gamma(K_3 + P_m) = 1$
- Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf cartesian product $G = C_n \times P_m$ adalah $\gamma(G) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$
- Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf $C_n \odot K_m$ adalah $\gamma(C_n \odot K_m) = n$
- Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan dominasi berjarak satu untuk graf $G =$ Shackel(K_m, n) adalah $\gamma(\text{Shack}(K_m, n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

References

[1] Alvaro, J., *Domination in Graphs*, Final Project in Graph Teory, Willamette University, 2012.

[2] Santoso, B., Djuwandi dan Soelistyo U., R. Heri, *Bilangan Dominasi dan Bilangan Kebebasan Graf Bipartit Kubik*, Jurusan Matematika FMIPA UNDIP, Semarang (2012).

[3] Dafik, Miller, M., Ryan, J. and Bača, M., *Antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Complete s-Partite Graphs*, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[4] Dafik, *Structural Properties and Labeling of Graphs*, University of Ballarat, 2007.

[5] Haynes, Teresa W., Hedetniemi, Stephen T. and Slater, Peter J., *Fundamentals of domination in graphs*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 208, Marcel Dekker Inc., New York (1998).

[6] Jaenisch, C.F., *Applications de l'Analyse Mathematique an Jeu des Echecs*, Petrograd (1862).

[7] Karbasi, Amir H. and Atani, Reza E., *Application of Dominating Sets in Wireless Sensor Networks*, International Journal of Secutiry and Its Applications, Vol. 7, Guilan University, Iran (2013).

[8] Kies, A., Maaza, Zoulikha M. and Belbachir, R., *A Connected Dominating Set Based on Connectivity and Energy in Mobile Ad Hoc Networks*, Acta Polytechnica Hungaria, Vol. 9, University of Sciences and the Technology of Oran, Algeria (2012).

[9] Murugesen, N. and Nair, Deepa S., *The Domination and Independence of Some Cubic Bipartite Graphs*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, Government Arts College, India (2011).

[10] Snyder, K., *c-Dominating Sets for Families Graphs*, University of Mary Washington, Washington (2011).