PERBANDINGAN SOLUSI MODEL GERAK ROKET DENGAN METODE RUNGE-KUTTA DAN ADAM-BASHFORD

KUSBUDIONO[1], KOSALA DWIDJA PURNOMO[2], NURIL AFANDI[3]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, kusbudiono@unej.ac.id

[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, kosaladp@gmail.com

[3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

Abstrak

Roket merupakan sebuah pesawat sejenis sistem propulsi yang membawa bahan bakar sendiri dan oksigennya dengan memiliki kecepatan yang tinggi. Pada saat terbang di udara, roket banyak mengalami gaya hambat yang disebabkan oleh angin yang terjadi pada bagian sirip dan sayap roket. Selain gaya hambat tersebut, gaya gravitasi juga menghambat gerakan roket untuk mencapai jarak horisontal, ketinggian, dan kecepatan tertentu. Tujuan pertama dari penelitian ini adalah menyelesaikan solusi numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford. Tujuan kedua dari penelitian ini adalah membandingkan hasil penyelesaian model gerak roket menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford. Tujuan ketiga dari penelitian ini adalah menganalisis profil model gerak roket yang diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford. Hasil analisis simulasi menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford sama-sama metode yang baik untuk menyelesaikan model gerak roket yang dilihat dari hasil perhitungan yang telah dilakukan. Tetapi dari segi waktu komputasi, metode Runge-Kutta orde empat lebih cepat dari metode Adam-bashford.

Kata kunci: roket, metode Runge-Kutta, metode Adam-Bashford.

1. Pendahuluan

Roket merupakan sebuah pesawat sejenis sistem propulsi yang membawa bahan bakar sendiri dan oksigennya dengan memiliki kecepatan yang tinggi. Pada saat terbang di udara, roket banyak mengalami gaya hambat yang disebabkan oleh angin yang terjadi pada bagian sirip dan sayap roket. Selain gaya hambat tersebut, gaya gravitasi juga menghambat gerakan roket untuk mencapai jarak horisontal, ketinggian, dan kecepatan tertentu. Persamaan gerak roket secara deterministic dapat diturunkan kedalam bentuk system persamaan differensial non linier sehingga lebih mudah untuk diselesaikan secara numeric.

Terdapat beberapa metode penyelesaian persamaan tersebut salah satunya adalah metode Runge Kutta (Order 4) dan Adam-Bashford. Permasalahan pertama dari penelitian ini adalah bagaimana menyelesaikan persamaan tersebut secara numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford. Masalah kedua adalah bagaimana perbandingan hasil penyelesaian model gerak roket menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford. Sedangkan salah tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis profil model gerak roket yang diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford.

2. Metode Penelitian

Untuk mendapatkan solusi numerik dan mengetahui profil gerak roket dilakukan beberapa langkah, yaitu menyelesaikan model gerak roket yang akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode RK4 dan Adam-Bashford, setelah itu dilakukan pembuatan program dari solusi numerik yang telah didapatkan. Langkah selanjutnya melakukan simulasi program dengan memvariasikan nilai parameter untuk gaya dorong (F), gaya hambat sayap (Cm) dan sirip roket (Cn), serta sudut terbang roket (γ). Langkah terakhir adalah menganalisis hasil simulasi untuk mengetahui profil gerak roket dengan metode RK4 dan Adam-Bashford.

3. Hasil dan Pembahasan

Gerakan suatu roket balistik dapat dianggap sebagai gerakan roket dengan lintasan dua dimensi. Roket yang diteliti adalah roket yang digunakan untuk penelitian atmosfer dengan memiliki beberapa parameter yang akan digunakan dalam perhitungan untuk menyelesaikan model gerak roket. Dalam tugas akhir ini arah lintasan roket dan sumbu roket diasumsikan berimpit, sehingga sudut serang dapat diabaikan. Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah ditentukan, maka persamaan gerak roket dapat ditulis sebagai bentuk sistem persamaan diferensial biasa yaitu sebagai berikut[1]:

$$\frac{ds}{dt} = v\cos\gamma \qquad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = v\sin\gamma \qquad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - H}{m_0} - g \sin \gamma \qquad (3)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{g \cos \gamma}{v} \qquad (4)$$

$$\frac{dm_0}{dt} = -M \qquad (5)$$

model gerak roket diatas diselesaikan dengan 2 skema yaitu metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford, kemudian dilakukan simulasi program dari kedua metode tersebut. Berikut ini merupakan nilai parameter roket yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan gerak roket yang disajikan pada Tabel 2 sebagai berikut [1]:

Tabel 1. Nilai Parameter Roket

Struktur Roket	Lambang	Nilai
Diameter roket	D	0,26 m
Luas penampang roket	A	1,349 m^2
Massa awal roket	m_0	91 kg
Massa struktur roket	m_c	35 kg
Massa propelan roket	m_p	41 kg
Massa beban guna	m_b	15 kg
Gaya dorong	F	3450 N
Gaya hambat sirip	C_n	0,003
Gaya hambat sayap	C_m	0,0079
Waktu pembakaran propelan	t_i	2,2 detik

Kondisi batas adalah kondisi roket pada saat propelan atau bahan bakar habis terbakar. Kondisi ini tercapai apabila massa roket sama dengan massa struktur roket dan massa beban guna roket. Massa beban guna merupakan massa peralatan yang dianggap konstan selama penerbangan roket. Sehingga massa awal roket (m_0) berubah menjadi massa akhir roket (m_u) yang meliputi massa struktur roket (m_c) dan massa beban guna roket (m_b). Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$m_u = m_c + m_b$$

Setelah pembakaran selesai, besar gaya dorong sama dengan nol dan roket mengalami terbang bebas sampai jatuh ke tanah.[1].

3.1 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi yang lebih tinggi. Secara umum metode Runge-Kutta dapat dituliskan:

$$x_{i+1} = x_i + \phi(t_i, x_i, \Delta x)\Delta x$$

dengan $\phi(t_i, x_i, \Delta x)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval Δx. Bentuk umum dari fungsi pertambahan adalah:

$$\phi = a_1k_1 + a_1k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n = \sum_{j=1}^{n} a_jk_j$$

Metode Runge-Kutta orde empat memberikan ketelitian yang akurat dibandingkan dengan metode-metode Runge-Kutta sebelumnya. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode ini mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta x$$

dengan:

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta x, x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}\Delta x, x_i + \frac{1}{2}\Delta x k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta x, x_i + \Delta x k_3)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai k mempunyai hubungan yang berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan k_2, yang keduanya juga muncul dalam persamaan k_3

dan seterusnya. Hubungan berurutan inilah yang membuat metode Runge-Kutta menjadi efisien. [2].

3.2 Metode Adam-Bashford

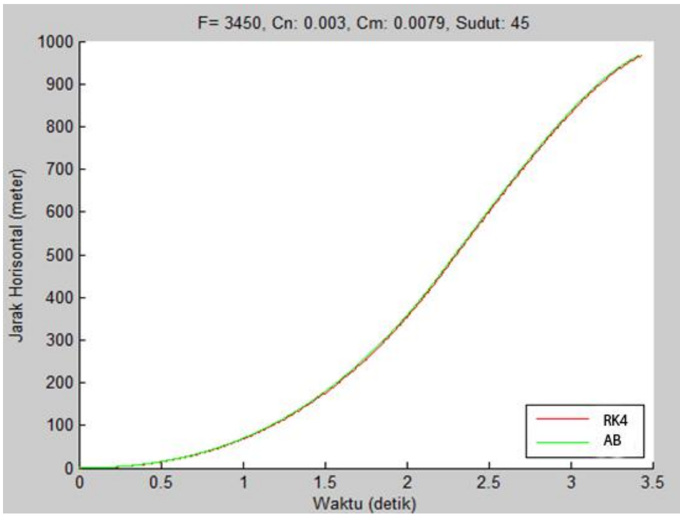
Nilai fungsi $f(t, x(t))$ didekati dengan menggunakan polinomial interpolasi kuadratik yang melalui titik-titik berabsis t_{k-2}, t_{k-1} dan t_k , sehingga diperoleh rumus

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{12}(23f(t_k, x_k) - 16f(t_{k-1}, x_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, x_{k-2}) \text{ untuk } k = 2,3,4,\ldots$$

Pada metode ini galat hampiran adalah $O(h^3)$. Untuk menggunakan metode ini diperlukan tiga nilai awal x_0, x_1 dan x_2. Oleh karena yang diketahui $x_0 = x(t_0)$, nilai-nilai x_1 dan x_2 perlu dihitung dengan menggunakan metode lain yang memiliki galat hampiran pada akhir setiap langkah $O(h^m)$ dengan h merupakan ukuran langkah (Δt), m merupakan order dari metode dan nilai $m \geq 3$, misalnya metode Runge-Kutta order empat.

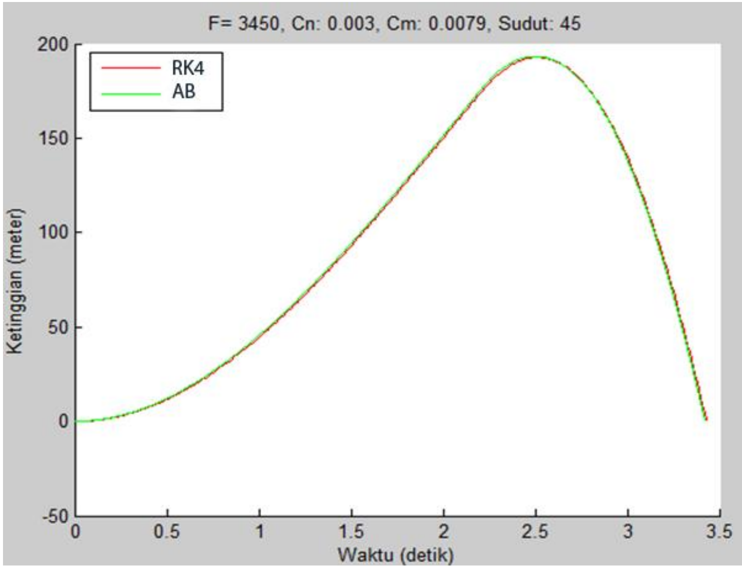
3.3 Simulasi dan Hasil

Simulasi penyelesaian persamaan dilakukan untuk nilai dari parameter-parameter yaitu F, C_n, C_m, dan γ adalah 3450; 0,003; 0,0079; dan 45. Berikut ini adalah hasil numeric penyelesaian persamaan tersebut yang ditampilan dalam bentuk grafik:



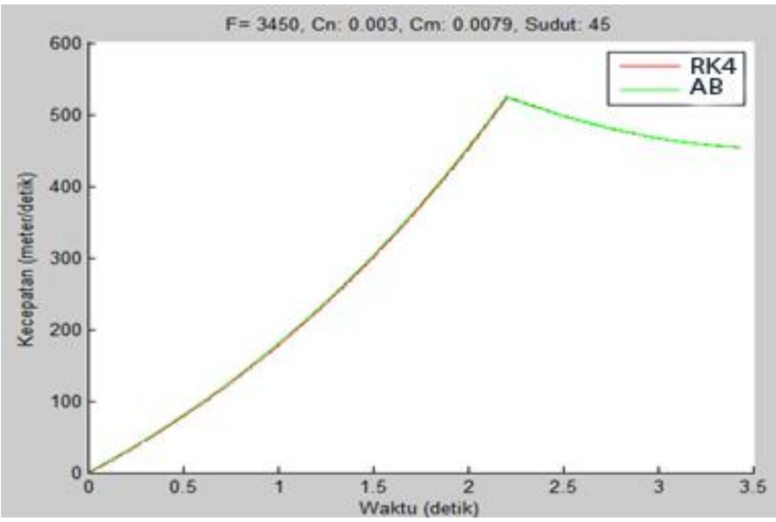
Gambar 1. Grafik Perubahan Jarak Horisontal Roket Terhadap Waktu

Gambar 1. menjelaskan profil jarak jangkauan horisontal yang dicapai roket. Jarak horisontal maksimal yang diperoleh metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-Bashford adalah 967,7572 m pada saat 3,44 detik dan 967,6263 m pada saat 3,425 detik. Grafik metode Adam-Bashford mengalami perubahan naik turun yang signifikan dan metode Runge-Kutta orde empat tidak mengalami perubahan naik turun sampai roket menyentuh tanah.



Gambar 2. Grafik Perubahan Ketinggian Roket Terhadap Waktu

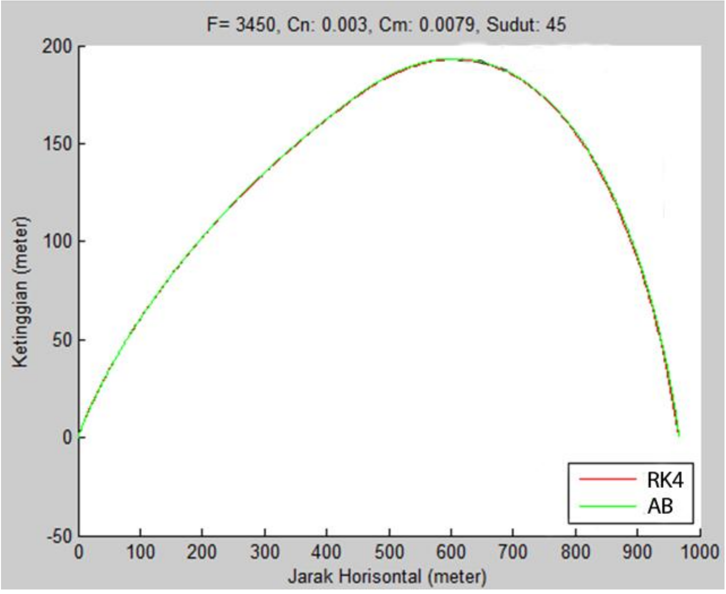
Dari Gambar 2. terlihat bahwa profil ketinggian yang dicapai roket pada setiap waktu. Ketinggian maksimal yang diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-Bashford adalah 192,8189 m pada saat 2,51 detik dan 193,3857 m pada saat 2,504 detik. Grafik metode Runge-Kutta orde empat tidak mengalami perubahan naik turun dan metode Adam-Bashford mengalami perubahan yang signifikan sampai roket menyentuh tanah.



Gambar 3. Grafik Perubahan Kecepatan Roket Terhadap Waktu

Sedangkan dari Gambar 3. terlihat profil kecepatan roket berdasarkan tiap waktu. Kecepatan maksimal roket yang diperoleh dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-Bashford adalah 524,3287 m/s pada saat t = 2,21 detik dan 524,9446 m/s pada saat t = 2,201 detik. Grafik yang ditunjukkan metode Runge-Kutta orde empat mengalami perubahan yang stabil atau tidak mengalami perubahan naik turun. Sedangkan grafik yang ditunjukkan metode Adam-Bashford mengalami ketidakstabilan atau naik turun yang signifikan mulai dari 2,2 detik (saat pembakaran selesai) sampai roket menyentuh permukaan tanah.

Berikutnya dijelaskan sebuah lintasan gerak roket yang disajikan dalam grafik lintasan dua dimensi yaitu sumbu x merupakan jarak horisontal dan sumbu y merupakan ketinggian yang dicapai roket. Grafik lintasan yang diperoleh dengan metode Runge-Kutta orde empat, posisi roket mencapai ketinggian maksimal pada saat 2,51 detik dengan mencapai jarak horisontal 603,7 m. Sedangkan grafik yang diperoleh metode Adam-Bashford, posisi roket mencapai ketinggian maksimal pada saat 2,504 detik dengan mencapai jarak horisontal 605,8 m. Grafik lintasan roket dengan nilai parameter tertentu dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik Lintasan Roket

Analisis hasil simulasi menggunakan metode RK4 dan Adam-Bashford menunjukkan bahwa. Pada profil model gerak roket dengan metode RK4 dan Adam-Bashford tidak terlihat perbedaan yang signifikan dari hasil estimasi perhitungan program. Selisih hasil estimasi antara metode RK4 dengan Adam-Bashford untuk model gerak roket secara keseluruhan hampir sama hasil estimasinya. Dari analisis tersebut dapat dilihat bahwa perbedaan antara kedua metode sangat kecil yaitu hampir mendekati nol. Hal ini dimungkinkan dari solusi numerik antara RK4 dan Adam-Bashford hampir sama.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil simulasi diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Dari hasil analisis selisih estimasi perhitungan program dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford, kedua metode ini tidak terlihat perbedaan yang signifikan. Selisih hasil estimasi antara metode Runge-Kutta orde empat dengan Adam-bashford untuk model gerak roket secara keseluruhan hampir sama hasil estimasinya. Dari analisis tersebut dapat dilihat bahwa perbedaan antara kedua metode sangat kecil yaitu hampir mendekati nol. Hal ini dimungkinkan dari solusi numerik antara Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford hampir sama. Untuk mengetahui metode yang baik antara metode Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford dalam menyelesaikan model gerak roket tidak dapat ditentukan dikarenakan model gerak roket tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. Sehingga perbandingan metode antara Runge-Kutta orde empat dan Adam-bashford tidak dapat ditentukan dari selisih hasil pendekatan solusi numerik dengan solusi analitiknya.

b. Hasil simulasi menggunakan metode RK4 dan Adam-bashford menunjukkan bahwa:
   1) Semakin besar nilai gaya dorong (F), maka jarak horisontal, ketinggian, dan kecepatan yang dicapai roket semakin besar.
   2) Semakin besar nilai gaya hambat siripdan gaya hambat sayap, maka jarak horisontal semakin besar, sedangkan ketinggian dan kecepatan yang dicapai roket semakin kecil.

Daftar Pustaka

[1] Sembiring, T. (2000). Perbandingan Solusi Metode Runge-Kutta dan Metode Adams Bashforth Moulton dalam Persamaan Gerak Roket. [serial online]. *Majalah LAPAN*. **2** (4): 178-185.

[2] Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Universitas Gadja Mada.