PEMBANGKITAN SEGITIGA SIERPINSKI DENGAN TRANSFORMASI AFFINE

BERBASIS BEBERAPA BENDA GEOMETRIS

KOSALA DWIDJA PURNOMO[1]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, kosaladp@gmail.com

Abstrak

Segitiga Sierpinski dapat dikategorikan sebagai fraktal linier dan mempunyai sifat self-similarity, yaitu dalam hal ini identik sampai pada iterasi tak-hingga. Pembangkitan segitiga Sierpinski dapat dilakukan dengan memanfaatkan transformasi affine pada suatu segitiga. Dalam artikel ini segitiga Sierpinski akan dibangkitkan melalui dilasi dan translasi terhadap benda berbasis segitiga atau benda geometris lainnya. Ada dua algoritma yang akan digunakan. Pertama, algoritma yang bertujuan membangkitkan segitiga berwarna yang ditempatkan pada segitiga kosong. Segitiga Sierpinski yang didapatkan pada suatu iterasi didilasi menjadi setengahnya dan ditempatkan pada satu titik sudut. Hasil dilasi ini ditranslasikan ke kedua titik sudut lainnya sehingga membentuk segitiga Sierpinski pada iterasi berikutnya. Kedua, algoritma yang membangkitkan segitiga kosong dan ditempatkan pada segitiga berwarna. Setiap segitiga kosong pada iterasi berikutnya akan diduplikasi menjadi satu segitiga kosong dari dilasi setengahnya dan dua segitiga kosong yang diperoleh dari translasi hasil dilasi tersebut. Proses seperti ini dilanjutkan pada iterasi berikutnya dan diberlakukan pada semua segitiga kosong yang terbentuk.

Kata kunci: fraktal, segitiga Sierpinski, dilasi, translasi

1. Pendahuluan

Fraktal adalah objek geometris yang didapatkan melalui proses iteratif dan mempunyai sifat *self-similarity* (keserupaan diri). Proses iteratif menunjuk bahwa bentuk geometris suatu fraktal ditentukan oleh bentuk pada iterasi sebelumnya. Gerald Edgar [1] menyebutkan sifat iteratif ini dengan “iterated function system”. Sedangkan, sifat keserupaan diri bermakna bahwa bentuk dan karakteristik suatu bagian dari fraktal mirip dengan objek keseluruhan.

Secara umum fraktal dapat diklasifikasikan dalam dua tipe, yaitu linier dan non-linier (Navarro, et. al [2]). Fraktal linier mempunyai bentuk geometris yang identik pada skala berapapun sampai tak-hingga. Fraktal jenis ini dapat dibangkitkan melalui algoritma sesuai dengan kaidah dalam geometri Euclid. Segitiga Sierpinski dan kurva Koch adalah contoh fraktal linier. Fraktal non-linier dibangkitkan melalui fungsi dinamik non-linier. Contoh fraktal ini adalah himpunan Mandelbrot dan himpunan Julia. Kedua himpunan ini dibangkitkan dari fungsi kuadrat dari variabel kompleks.

Segitiga Sierpinski adalah fraktal linier yang mempunyai sifat keserupaan diri identik sampai pada iterasi tak-hingga. Pembangkitannya diawali dengan segitiga sama sisi yang berisi warna tertentu. Kemudian titik tengah masing-masing sisinya dihubungkan untuk memperoleh segitiga dengan ukuran setengahnya dan terletak di tengah segitiga awal. Segitiga yang terletak di tengah lalu dihilangkan atau dikosongkan dari segitiga awal. Selanjutnya, pada ketiga segitiga berisi dengan ukuran setengah dari segitiga awal dilakukan proses serupa untuk mendapatkan segitiga dengan ukuran setengahnya lagi. Algoritma seperti ini dilakukan sampai pada iterasi tertentu. Pada setiap iterasi didapatkan fakta bahwa satu segitiga dibagi menjadi empat segitiga (dengan ukuran sisi setengahnya) yang terdiri atas 3 segitiga berisi warna dan 1 segitiga kosong. Dengan rumusan ini, luas segitiga Sierpinski pada iterasi ke-*n* adalah $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ dari luas awalnya. Jika prosesnya diteruskan sampai iterasi mendekati tak-hingga, luas segitiga Sierpinski akan mendekati nol.

Tulisan ini bertujuan membahas algoritma pembangkitan segitiga Sierpinski dengan memanfaatkan transformasi affine dalam bentuk dilasi dan translasi. Dalam hal ini segitiga yang dibangkitkan untuk mengisi bentuk dasar segitiga Sierpinski terdiri atas dua macam, yaitu segitiga yang berisi warna dan segitiga kosong. Pada masing-masing segitiga ini dilakukan dilasi dan translasi untuk mendapatkan segitiga Sierpinski. Pada bagian selanjutnya akan dilakukan beberapa modifikasi segitiga Sierpinski dengan mengganti bentuk dasar segitiga sama sisi dengan beberapa benda geometris lainnya.

2. Metode Penelitian

Dalam tulisan ini digunakan istilah bentuk dasar dan benda geometris dalam segitiga Sierpinski. Dalam segitiga Sierpinski konvensional (sebelum dimodifikasi) bentuk dasar yang digunakan adalah segitiga sama sisi. Sedangkan, benda geometris yang digunakan untuk mengisi bentuk dasarnya adalah juga segitiga sama sisi.

Algoritma pembangkitan segitiga Sierpinski akan dilakukan dalam dua cara. Pertama, dilakukan transformasi affine pada benda geometris yang terisi warna. Pada algoritma ini dalam tiap iterasi segitiga Sierpinski yang terbentuk akan didilasi ½ dan kemudian ditranslasi pada titik tengah sisi yang menghubungkan titik sudut bentuk dasar dengan titik pusat dilasi. Kedua, dilakukan transformasi affine pada bagian yang tidak berwarna atau kosong. Dalam hal ini, algoritma kedua hanya akan diterapkan pada bentuk dasar dan benda geometris segitiga. Rumusan transformasi affine beserta contoh pemrogramannya diantaranya dapat dibaca pada tulisan Vladimir Rovenski [3].

Algoritma pertama akan digunakan untuk membangkitkan segitiga Sierpinski dengan berbagai variasi bentuk dasar dan benda geometris. Misalkan diberikan bentuk dasar segitiga Sierpinski dan benda geometris dengan warna tertentu. Bentuk dasar dan benda geometris ini dinyatakan dengan titik sudut tertentu. Pembangkitan segitiga Sierpinski dengan memanfaatkan transformasi affine dalam bentuk dilasi dan translasi. Dilasi dilakukan dengan skala ½ dan menjadikan salah satu titiknya sebagai pusat dilasi. Diasumsikan pusat dilasinya di titik (0,0). Translasi dilakukan sesuai dengan bentuk dasar yang dipilih. Dalam hal ini ada dua kasus yang akan dibahas:

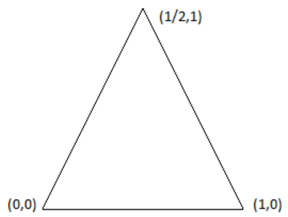
a. Bentuk dasar segitiga dengan benda geometris segitiga;

b. Bentuk dasar segitiga dengan benda geometris segiempat;

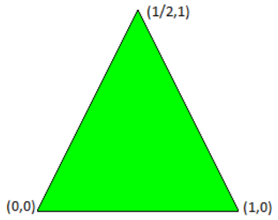
3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Algoritma Pembangkitan Sierpinski

Untuk mengilustrasikan perumusan algoritma pertama, pandang bentuk dasar segitiga dengan benda geometris juga segitiga. Misalkan pada Gambar 1 diberikan bentuk dasar segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,0), dan (½,1). Sebuah benda geometris berbentuk segitiga berwarna (dalam hal ini hijau) akan digunakan mengisi bentuk dasar ini (Gambar 2).

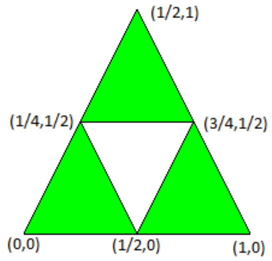


Gambar 1 Bentuk dasar segitiga



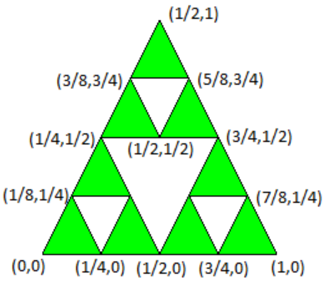
Gambar 2 Benda geometris segitiga

Benda geometris pada Gambar 2 didilasi berpusat di (0,0) dengan skala dilasi ½. Kemudian hasil dilasi ini diduplikasi menjadi dua segitiga lain dengan translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Diperoleh benda geometris baru pada Gambar 3 yang disebut sebagai segitiga Sierpinski pada iterasi 1 yang mengisi bentuk dasar pada Gambar 1.



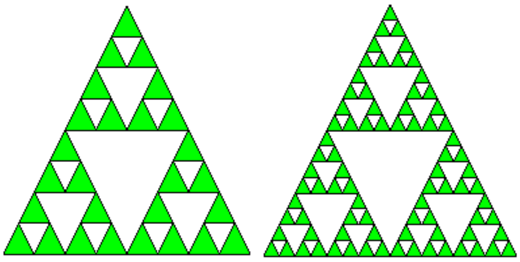
Gambar 3 Segitiga Sierpinski pada iterasi 1

Benda geometris (yaitu segitiga Sierpinski pada iterasi 1) pada Gambar 3 kemudian didilasi lagi dengan skala ½ sehingga menghasilkan segitiga Sierpinski dengan ukuran setengahnya. Kemudian diduplikasi lagi untuk mendapatkan dua segitiga Sierpinski lain dengan translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Hasilnya adalah segitiga Sierpinski pada iterasi 2 (Gambar 4).



Gambar 4 Segitiga Sierpinski pada iterasi 2

Demikian seterusnya. Segitiga Sierpinski pada iterasi 3 dan 4 dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5 Segitiga Sierpinski pada iterasi 3 dan 4

Dengan mengacu pada langkah-langkah di atas, dapat dirumuskan algoritma pertama untuk membangkitkan segitiga Sierpinski berikut.

a. Berikan bentuk dasar segitiga yang akan dijadikan acuan serta benda geometris segitiga berwarna yang akan mengisi bentuk dasar tersebut. Nyatakan segitiga berwarna sebagai himpunan titik-titik (x, y).

b. Berikan faktor skala dilasi s dan vektor translasi $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$. Dalam hal ini untuk segitiga Sierpinski konvensional diambil $s = \frac{1}{2}$, $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

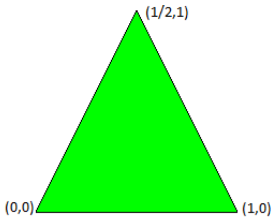
c. Tentukan benda geometris segitiga baru hasil dilasi dengan pusat di $(0,0)$ dan faktor skala s, sehingga titik (x, y) akan ditransformasikan menjadi (sx, sy).

d. Tentukan duplikasi benda geometris segitiga pada langkah c dengan vektor translasi pada langkah b, yaitu didapatkan titik $(sx + u_x, sy + u_y)$ dan $(sx + v_x, sy + v_y)$.

e. Definisikan segitiga Sierpinski yang merupakan gabungan segitiga dari benda geometris baru pada langkah c dan d.

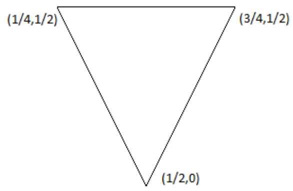
f. Ulangi langkah c sampai pada iterasi yang diinginkan untuk mendapatkan segitiga Sierpinski pada iterasi *n*.

Pembangkitan segitiga Sierpinski juga dapat dilakukan dengan mengisi segitiga berwarna dengan ukuran tertentu sebagai bentuk dasarnya (lihat Gambar 6).



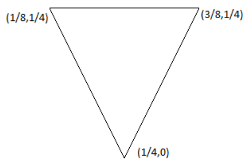
Gambar 6 Bentuk dasar segitiga

Benda geometris yang digunakan untuk mengisi bentuk dasar ini adalah segitiga kosong pada Gambar 7 dengan ukuran sisi setengahnya.



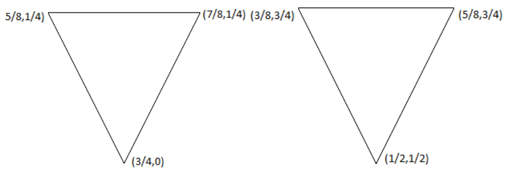
Gambar 7 Benda geometris segitiga kosong

Jika benda geometris pada Gambar 7 diisikan pada bentuk dasar pada Gambar 6, maka didapatkan segitiga Sierpinski pada iterasi 1 sebagaimana pada Gambar 3. Pada pusat (0,0) dilakukan dilasi dengan skala ½, sehingga didapatkan segitiga berukuran sisi setengahnya (Gambar 8).



Gambar 8 Benda geometris segitiga kosong hasil dilasi

Sedangkan untuk membentuk segitiga kosong kedua dan ketiga digunakan translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, yaitu dengan kedua translasi ini dihasilkan segitiga kosong pada Gambar 9.



Gambar 9 Benda geometris segitiga kosong hasil translasi

Oleh karena itu, sampai iterasi 2 ini akan dihasilkan segitiga Sierpinski sebagaimana pada Gambar 4.

Pembangkitan segitiga kosong yang ada dalam segitiga Sierpinski secara umum dapat dirumuskan sebagaimana pada Tabel 1. Dalam hal ini diasumsikan bahwa panjang sisi dari bentuk dasar segitiga sama sisi adalah satu satuan.

Tabel 1 Beberapa ukuran transformasi affine pada segitiga Sierpinski

Iterasi	Nama segitiga kosong	Jumlah segitiga kosong	Ukuran sisi segitiga kosong	Skala dilasi	Vektor translasi pertama	Vektor translasi kedua

1	Δ_1	1	$\frac{1}{2}$	Tidak ada	Tidak ada	Tidak ada
2	Δ_1	1	$\frac{1}{2}$	Tidak ada	Tidak ada	Tidak ada
	$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$	3	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
3	Δ_1	1	$\frac{1}{2}$	Tidak ada	Tidak ada	Tidak ada
	$\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$	3	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
	$\Delta_{11i}, \Delta_{12i}, \Delta_{13i}$ dimana *i*=1,2,3	3^2	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^2} \end{pmatrix}$
…	…	…	…	…	…	…
n	…	…	…	…	…	…
	…	3^{n-1}	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$

Berdasar pada Tabel 1 dapat dirumuskan langkah-langkah membangkitkan segitiga Sierpinski berikut. Algoritma kedua ini bertujuan membangkitkan segitiga kosong pada segitiga Sierpinski.

1. Berikan bentuk dasar segitiga berwarna (beri nama dengan Δ_0) yang akan diisi dengan segitiga kosong.

2. Tentukan segitiga kosong (atau warna putih) yang titik sudutnya adalah titik tengah masing-masing sisi segitiga berwarna. Beri nama segitiga ini dengan Δ_1. Hasil dari $\Delta_0 - \Delta_1$ membentuk segitiga Sierpinski iterasi 1.

3. Lakukan dilasi pada segitiga kosong Δ_1 dengan skala $\frac{1}{2}$, maka akan didapatkan Δ_{11} dengan ukuran sisi $\frac{1}{2^2}$.

4. Lakukan translasi pertama dan kedua pada Δ_{11} dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ untuk mendapatkan segitiga kosong Δ_{12} dan Δ_{13}. Jika gabungan segitiga kosong ini diberi nama $\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13}$, maka hasil dari $\Delta_0 - \Delta_1 - (\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13})$ membentuk segitiga Sierpinski iterasi 2.

5. Lakukan dilasi pada segitiga kosong Δ_1 dengan skala $\frac{1}{2^2}$, maka akan didapatkan Δ_{111} dengan ukuran sisi $\frac{1}{2^3}$.

6. Lakukan translasi pada Δ_{111} dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{2^2} \end{pmatrix}$ untuk mendapatkan segitiga kosong Δ_{112} dan Δ_{113}.

7. Translasikan gabungan segitiga kosong Δ_{111}+Δ_{112}+Δ_{113} dengan vektor translasi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ untuk mendapatkan gabungan segitiga kosong lainnya, yaitu Δ_{121}+Δ_{122}+Δ_{123} dan Δ_{131}+Δ_{132}+Δ_{133}. Hasil dari $\Delta_0 - \Delta_1 - \Delta_{11} - \Delta_{12} - \Delta_{13} - (\Delta_{111} + \Delta_{112} + \Delta_{113}) - (\Delta_{121} + \Delta_{122} + \Delta_{123}) - (\Delta_{131} + \Delta_{132} + \Delta_{133})$ membentuk segitiga Sierpinski iterasi 3.

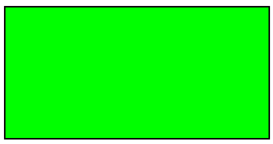
8. Demikian seterusnya dilakukan sampai dengan iterasi *n*.

Dari algoritma pertama dan kedua yang dirumuskan di atas terlihat bahwa langkah-langkah pada algoritma pertama lebih sederhana. Skala dilasi dan vektor translasi yang digunakan pada algoritma pertama juga lebih mudah diingat karena selalu tetap untuk membangkitkan segitiga manapun dalam tiap iterasi. Sedangkan, dalam tiap iterasi algoritma kedua, besaran tersebut selalu berubah.

3.2 Segitiga Sierpinski dengan Benda Geometris Segiempat

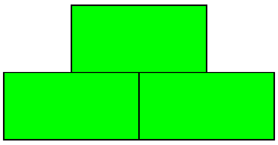
Pada bagian ini akan diberikan fakta bahwa segitiga Sierpinski juga dapat diperoleh dari benda geometris selain segitiga. Dalam hal ini benda geometris yang dipandang adalah segiempat. Benda geometris lainnya dengan cara yang sama dapat digunakan.

Misalkan diberikan bentuk dasar segitiga seperti pada Gambar 1. Bentuk dasar ini akan diisi dengan benda geometris persegipanjang seperti pada Gambar 10.



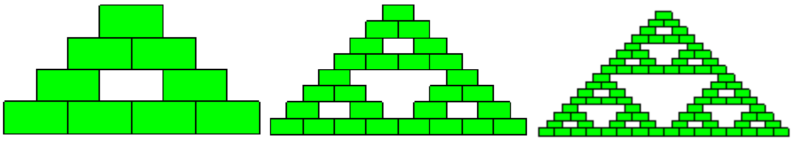
Gambar 10 Benda geometris persegipanjang

Jika diberlakukan algoritma pertama pada iterasi 1, akan diperoleh bentuk seperti pada Gambar 11.



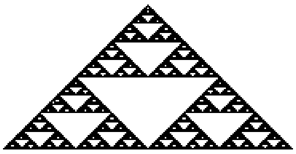
Gambar 11 Benda geometris persegipanjang pada iterasi 1

Bentuk ini akan berubah mendekati bentuk segitiga Sierpinski pada iterasi yang lebih tinggi. Bentuk geometrisnya pada iterasi 2, 3, dan 4 adalah seperti pada Gambar 12.



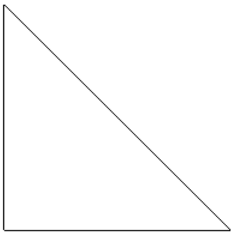
Gambar 12 Benda geometris persegipanjang pada iterasi 2, 3, dan 4

Sedangkan, pada iterasi 8 bentuk geometrisnya sudah tidak dapat dibedakan dengan segitiga Sierpinski berbasis segitiga (Gambar 13).

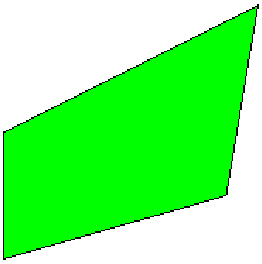


Gambar 13 Benda geometris persegipanjang pada iterasi 8

Sekarang diberikan bentuk dasar segitiga siku-siku seperti pada Gambar 14 dan benda geometris segiempat pada Gambar 15.

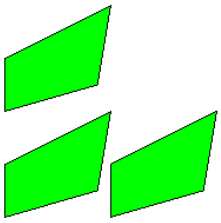


Gambar 14 Bentuk dasar segitiga siku-siku



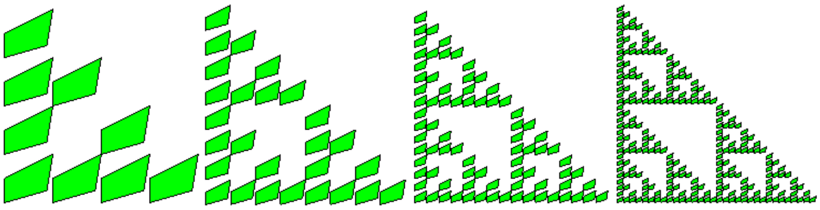
Gambar 15 Benda geometris segiempat

Pada iterasi 1 algoritma pertama akan diperoleh bentuk seperti pada Gambar 16.



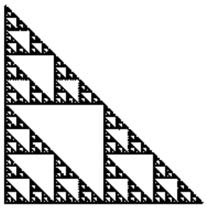
Gambar 16 Bentuk dasar segitiga siku-siku iterasi 1

Sedangkan pada iterasi 2, 3, 4, dan 5 akan diperoleh bentuk geometris seperti pada Gambar 17.



Gambar 17 Bentuk dasar segitiga siku-siku iterasi 2, 3, 4, dan 5

Sedangkan, pada iterasi 8 bentuk geometrisnya hampir sama dengan segitiga Sierpinski dengan benda geometris segitiga maupun persegipanjang (Gambar 18).



Gambar 18 Bentuk dasar segitiga siku-siku iterasi 8

4. Kesimpulan dan Saran

Dalam tulisan ini algoritma yang dikembangkan untuk membangkitkan segitiga Sierpinski melalui pembangkitan segitiga berwarna lebih sederhana dibandingkan melalui pembangkitan segitiga kosong. Namun demikian, perlu dikaji aspek komputasi kedua algoritmanya. Dalam tulisan ini juga dikembangkan beberapa bentuk dasar segitiga dan objek geometris. Pada iterasi yang cukup besar kesemua bentuk dasar dan benda geometris tersebut memberikan bentuk geometris yang mirip dengan segitiga Sierpinski.

Daftar Pustaka

[1] Edgar, G. 2008. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer Science+Business Media, New York.

[2] C.F. Navarro, J.C. Garcia, M.M. Tavares. 2014. Main Objects of Fractal Geometry and Computer Graphical Generation, *Research Journal of Computation and Mathematics*; **2(2)**; 14-26.

Rovenski, V. 2010. *Modeling of Curves and Surfaces with Matlab*, Springer Science+Business Media, New York.