Super (a,d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Selimut pada Graf Centipede

Agrita Kanty Purnapraja[2], Fia Cholidah[2], Dafik[1,3]
[1]CGANT- Universitas Jember
[2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Jember
agritakanty30@gmail.com; d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Diberikan G graf sederhana, terhubung dan tidak berarah. $G(V,E)$ memiliki selimut-$\mathcal{H}$ jika setiap sisi pada E bagian dari subgraf G yang isomorphic dengan $\mathcal{H}$. Total selimut (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic adalah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1,2,3,...,|V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$ dimana $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1,...,|V|\}$, maka graf disebut graf super $\mathcal{H}$- antimagic. Pada makalah ini, kita mengkaji mengenai super $(a,d)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede dinotasikan dengan C_n.

Key Words : *Super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut, Graf centipede.*

Pendahuluan

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Rosa di tahun 1967 [1]. Suatu pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf pada bilangan bulat non-negatif yang disebut label. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Kemudian pelabelan berkembang menjadi pelabelan graceful, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib (*anti magic*) dan lain-lain. Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah ajaib dan anti ajaib. Pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa sebagai M-(*valuation*) pada tahun 1970 [8]. Selanjutnya Simanjutak dkk. (2000) memperkenalkan pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib. Berbagai kelas graf telah ditunjukkan memiliki pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib, diantaranya lintasan dan lingkaran. Lebih detail lihat [10].

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Lladó pada tahun 2005. Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan selimut $\mathcal{H}$-ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam subgraf H' dari G yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$. Dalam hal ini $\mathcal{H}$ merupakan subgraf dari G. Lihat [4]. Oleh Inayah dkk kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika $a, a+d, a+2d, ..., a+(t-1)d$. Lebih detail lihat [5].

Hasil- hasil pelabelan super ((a,d))-$\mathcal{H}$-antimagic covering yang sudah ditemukan diantaranya adalah lihat [6] dan [7], Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan pelabelan super ((a,d))-$\mathcal{H}$-antimagic covering pada graf centipede, dimana $\mathcal{H} = C_n + 2e$. Graf centipede yang dinotasikan dengan C_n merupakan graf hasil gabungan dari n titik yang terhubung melalui sebuah sisi masing-masing terhadap titik pada graf path P_2 sehingga membentuk sebuah graf berbentuk menyerupai hewan kaki seribu (centipede). Selain graf konektif, penilitian ini juga akan meneliti graf diskonektif dari graf centipede. Batas atas d pada graf diskonektif telah dibuktikan oleh Dafik dkk [2].

Kardinalitas Graf Centipede

Berdasarkan definisi, graf centipede adalah graf C_n dimana $n \geq 3$ dengan himpunan titik $V(C_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_n) = \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ipx_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}\}$. Berdasarkan himpunan titik dan sisi dari graf centipede dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada shackle graf centipede C_n adalah $v_G = 2n$. Sedangkan jumlah sisi pada graf centipede C_n adalah $e_G = 2n-1$. Selain itu, terdapat jumlah titik yang merupakan selimut dari graf centipede adalah $v_H = 4$ dan jumlah sisi pada selimut dari graf centipede adalah $e_H = 3$ serta jumlah selimut pada graf centipede yang akan diteliti oleh peneliti adalah sejumlah $s = n-1$.

Batas atas d graf centipede C_n telah dibuktikan oleh Dafik dkk [3]. Berikut lema yang digunakan untuk menghitung batas atas d.

Lemma 1 *Jika sebuah graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut maka batas atas d adalah $d \leq \frac{(v_G-v_H)v_H+(e_G-e_H)e_H}{s-1}$, untuk $s = |H_i|$, $|V(G)| = v_G$, $|E(G)| = e_G$, $|V(H)| = v_H$, dan $|E(H)| = e_H$..*

Bukti. $f(V) = 1, 2, \ldots, v$ dan $f(E) = v+1, \ldots, v+e$

Misalkan graf G mempunyai pelabelan (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic covering dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., v+e\}$ maka himpunan bobot sisi sebuah graf adalah $a, a+d, a+2d, \ldots, a(s-1)d$ dimana a merupakan bobot sisi terkecil yang dapat ditulis $1+2+\ldots+v_H+(v_G+1)+(v_G+2)+\ldots+(v_G+e_H)$.

Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari sisi terbesar adalah $v_G + v_G - 1 + v_G - 2 + ... + (v_G - (v_H - 1)) + (v_G + e_G) + (v_G +$

$e_G - 1) + (v_G + e_G - 2) + ... + (v_G + e_G - (e_H - 1))$.

Untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned}1 + 2 + ... + v_H + (v_G + 1) + (v_G + 2) + ... + (v_G + e_H) &\leq a\\ \tfrac{v_H}{2}(1 + v_H) + e_H v_G + \tfrac{e_H}{2}(1 + e_H) &\leq\\ \tfrac{v_H}{2} + \tfrac{v_H^2}{2} + e_H v_G + \tfrac{e_H}{2} + \tfrac{e_H^2}{2} &\leq a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a + (s-1)d \leq\ & v_G + v_G - 1 + v_G - 2 + ... + (v_G - (v_H - 1)) + (v_G + e_G)\\ & + (v_G + e_G - 1) + (v_G + e_G - 2) + ... + (v_G + e_G - (e_H - 1)).\\ =\ & v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(1 + (v_H - 1)) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(1 + (e_H - 1)).\\ =\ & v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H).\end{aligned}$$

Untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}(s-1)d &\leq v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H) - a\\ &\leq v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H) - (\tfrac{v_H}{2} + \tfrac{v_H^2}{2} + e_H v_G\\ &\quad \tfrac{+}{e_H} 2 + \tfrac{e_H^2}{2})\\ &\leq v_H v_G - \tfrac{v_H^2}{2} + \tfrac{v_H}{2} + e_H v_G - \tfrac{e_H^2}{2} + \tfrac{e_H}{2} - (\tfrac{v_H}{2} + \tfrac{v_H^2}{2} + \tfrac{e_H}{2} + \tfrac{e_H^2}{2})\\ &\leq v_H v_G + e_H v_G - v_H^2 - e_H^2\\ &\leq v_H v_G - v_H^2 + e_H v_G - e_H^2\\ &\leq (v_G - v_H)p_H + (e_G - e_H)q_H\\ d &\leq \tfrac{(v_G - v_H)p_H + (e_G - e_H)q_H}{(s-1)}.\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(v_G - v_H)v_H + (e_G - e_H)e_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut dari berbagai famili graf. $\square$

Batas atas d untuk penelitian ini adalah :

$$\begin{aligned}d &\leq \frac{(v_G - v_H)v_H + (e_G - e_H)e_H}{s-1}\\ &= \frac{(2n-4)4 + (2n-1-3)3}{n-1-1}\\ &= \frac{8n - 16 + 6n - 12}{n-2}\\ &= \frac{14n - 28}{n-2}\\ &= 14\end{aligned}$$

Sehingga $d \leq 14$ atau $d \in \{1, 2, 3, \ldots, 14\}$.

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema mengenai graf pada graf centipede.

◇ **Theorem 1** *Ada pelabelan super $(12n + 4, 1) - (C_3 + 2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_1 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_1 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n\}$ maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_i) &= i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= 2n - i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1, 2, \ldots, 2n$. Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1} &= \alpha_1(x_i) + \alpha_1(x_{i+1}) + \alpha_1(y_i) + \alpha_1(y_{i+1}) \\ &= i + 2n - i + 1 + i + 1 + 2n - i - 1 + 1 \\ &= 4n + 2 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_i y_i) &= 2n + i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_i x_{i+1}) &= 4n - i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_1} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_1}

dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_1} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + f_1(x_i y_i) + f_1(x_{i+1} y_{i+1}) + f_1(x_i x_{i+1}) \\
&= 4n + 2 + 2n + i + 4n - i + 2n + i + 1 \\
&= 12n + i + 3
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $W_{\alpha_1} = 12n + 4, 12n + 5, ..., 13n + 3$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 12n + 4 + (n-1)1 = 13n + 3$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(12n+4, 1) - (C_3 + 2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. $\Box$

$\diamond$ **Theorem 2** *Ada pelabelan super* $(12n + 4, 2) - (C_3 + 2e)$*-antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_2 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_2 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$ maka pelabelan α_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(x_i) &= 2i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\
\alpha_2(y_i) &= 2i - 1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Untuk pelabelan titik pada α_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Jika w_{α_2} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha_2} &= \alpha_2(x_i) + \alpha_2(x_{i+1}) + \alpha_2(y_i) + \alpha_2(y_{i+1}) \\
&= 2i + 2i + 2 + 2i - 1 + 2i + 2 - 1 \\
&= 8i + 2
\end{aligned}
$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_iy_i) &= 4n-2i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_ix_{i+1}) &= 4n-2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_2} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + f(x_iy_i) + f(x_{i+1}y_{i+1}) + f(x_ix_{i+1}) \\ &= 8i+2+4n-2i+1+4n-2i-2+1+4n-2i \\ &= 12n+2i+2 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_2} = \{12n+4, 12n+6, ..., 14n+2\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 12n+4+(n-1)2 = 14n+2$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(12n+4, 2)-(C_3+2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. □

◇ **Theorem 3** *Ada pelabelan super* $(11n+6, 3)-(C_3+2e)$-*antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_3 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_3 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n\}$ maka pelabelan α_3 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_3(x_i) &= n+i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i) &= i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1, 2, \ldots, 2n$. Jika w_{α_3} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_3} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_3} &= \alpha_3(x_i)+\alpha_3(x_{i+1})+\alpha_3(y_i)+\alpha_3(y_{i+1}) \\ &= n+i+n+i+1+i+i+1 \\ &= 2n+4i+2 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f: E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_iy_i) &= 3n-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_ix_{i+1}) &= 3n+i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_3} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3}+f(x_iy_i)+f(x_{i+1}y_{i+1})+f(x_ix_{i+1}) \\ &= 2n+4i+2+3n-i+1+3n-i-1+1+3n+i \\ &= 11n+3i+3 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_3} = \{11n+6, 11n+9, ..., 14n+3\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 11n+6+(n-1)3 = 14n+3$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(11n+6, 3)-(C_3+2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. □

◇ **Theorem 4** *Ada pelabelan super* $(10n+8, 5)-(C_3+2e)$*-antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_5 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_5 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n\}$ maka pelabelan α_5 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_5(x_i) &= 2i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\ \alpha_5(y_i) &= 2i-1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_5 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1, 2, \ldots, 2n$. Jika w_{α_5} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_5} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_5} &= \alpha_5(x_i) + \alpha_5(x_{i+1}) + \alpha_5(y_i) + \alpha_5(y_{i+1}) \\ &= 2i + 2i + 2 + 2i - 1 + 2i + 2 - 1 \\ &= 8i + 2 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_iy_i) &= 3n - i + 1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\ f(x_ix_{i+1}) &= 4n - i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_5} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_5} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_5} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5} &= w_{\alpha_5} + f(x_iy_i) + f(x_{i+1}y_{i+1}) + f(x_ix_{i+1}) \\ &= 2n + 4i + 2 + 3n - i + 1 + 3n - i - 1 + 1 + 3n + i \\ &= 11n + 3i + 3 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_5} = \{10n + 8, 10n + 13, ..., 15n + 3\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 10n+8+(n-1)5 = 15n+3$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(10n+8, 5) - (C_3 + 2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. $\square$

◇ **Theorem 5** *Ada pelabelan super* $(10n+8,6)-(C_3+2e)$*-antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_6 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_6 : V(C_n) \to \{1,2,\ldots,2n\}$ maka pelabelan α_6 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\alpha_6(x_i) &= i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\
\alpha_6(y_i) &= 2n+1-i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

Untuk pelabelan titik pada α_6 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1,2,\ldots,2n$. Jika w_{α_6} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_6} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha_6} &= \alpha_6(x_i) + \alpha_6(x_{i+1}) + \alpha_6(y_i) + \alpha_6(y_{i+1}) \\
&= i + i + 1 + 2n + 1 - i + 2n + 1 - i - 1 \\
&= 4n + 2
\end{aligned}
$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \to \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x_i y_i) &= 2n + 2i - 1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\
f(x_i x_{i+1}) &= 2n + 2i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n-1
\end{aligned}
$$

Jika W_{α_6} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_6} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_6} &= w_{\alpha_6} + f(x_i y_i) + f(x_{i+1} y_{i+1}) + f(x_i x_{i+1}) \\
&= 4n + 2 + 2n + 2i - 1 + 2n + 2i + 2 - 1 + 2n + 2i \\
&= 10n + 6i + 2
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $W_{\alpha_6} = \{10n+8, 10n+14, ..., 16n+2\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 10n+8+(n-1)6 = 16n+2$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(10n+8,6)-(C_3+2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
$\square$

$\diamond$ **Theorem 6** *Ada pelabelan super* $(9n+10,7)-(C_3+2e)$*-antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_7 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_7 : V(C_n) \rightarrow \{1,2,\ldots,2n\}$ maka pelabelan α_7 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_7(x_i) &= 2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(y_i) &= 2i-1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_7 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1,2,\ldots,2n$. Jika w_{α_7} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_7} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_7} &= \alpha_7(x_i)+\alpha_7(x_{i+1})+\alpha_7(y_i)+\alpha_7(y_{i+1}) \\ &= 2i+2i+2+2i-1+2i+2-1 \\ &= 8i+2 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_iy_i) &= 3n-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ f(x_ix_{i+1}) &= 3n+i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_7} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_7} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_7} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7} &= w_{\alpha_7} + f(x_i y_i) + f(x_{i+1} y_{i+1}) + f(x_i x_{i+1}) \\ &= 8i + 2 + 3n - i + 1 + 3n - i - 1 + 1 + 3n + i \\ &= 9n + 7i + 3 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_7} = \{9n + 10, 9n + 17, ..., 15n + 3\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 9n + 10 + (n - 1)7 = 15n + 3$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(9n + 10, 7) - (C_3 + 2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. □

◇ **Theorem 7** *Ada pelabelan super* $(8n + 12, 9) - (C_3 + 2e)$*-antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \geq 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_9 yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_9 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n\}$ maka pelabelan α_9 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_9(x_i) &= 2i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\ \alpha_9(y_i) &= 2i - 1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_9 adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1, 2, \ldots, 2n$. Jika w_{α_9} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif w_{α_9} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_9} &= \alpha_9(x_i) + \alpha_9(x_{i+1}) + \alpha_9(y_i) + \alpha_9(y_{i+1}) \\ &= 2i + 2i + 2 + 2i - 1 + 2i + 2 - 1 \\ &= 8i + 2 \end{aligned}$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \rightarrow \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_iy_i) &= 2n+i, \text{untuk } 1 \le i \le n \\ f(x_ix_{i+1}) &= 4n-i, \text{untuk } 1 \le i \le n-1 \end{aligned}$$

Jika W_{α_9} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_9} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_9} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_9} &= w_{\alpha_9} + f(x_iy_i) + f(x_{i+1}y_{i+1}) + f(x_ix_{i+1}) \\ &= 8i+2+2n+i+2n+i+1+4n-i \\ &= 8n+9i+3 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_9} = \{8n+12, 8n+21, ..., 17n+3\}$. Karena $U_n = a+(n-1)b = 8n+12+(n-1)9 = 17n+3$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(8n+12, 9)-(C_3+2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \ge 3$. □

◇ **Theorem 8** *Ada pelabelan super* $(8n+12, 10)-(C_3+2e)$-*antimagic total selimut pada graf centipede* C_n *untuk* $n \ge 3$.

Bukti. Labeli titik C_n dengan fungsi bijektif α_{10} yang definisikan sebagi pelabelan $\alpha_{10} : V(C_n) \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$ maka pelabelan α_{10} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_{10}(x_i) &= n+i, \text{untuk } 1 \le i \le n \\ \alpha_{10}(y_i) &= i, \text{untuk } 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_{10} adalah fungsi bijektif yang memetakan C_n ke himpunan bilangan bulat $1, 2, \ldots, 2n$. Jika $w_{\alpha_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf centipede dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = C_n + 2e$ yang menjadi covering pada graf centipede, maka fungsi bijektif $w_{\alpha_{10}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha_{10}} &= \alpha_{10}(x_i) + \alpha_{10}(x_{i+1}) + \alpha_{10}(y_i) + \alpha_{10}(y_{i+1}) \\
&= n + i + n + i + 1 + i + i + 1 \\
&= 2n + 4i + 2
\end{aligned}
$$

Labeli sisi graf centipede C_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(C_n) \to \{2n+1, 2n+2, ..., 4n-1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x_i y_i) &= 2n + 2i - 1, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n \\
f(x_i x_{i+1}) &= 2n + 2i, \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}
$$

Jika $W_{\alpha_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada graf centipede berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{\alpha_{10}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{\alpha_{10}}$ dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_{10}} &= w_{\alpha_{10}} + f(x_i y_i) + f(x_{i+1} y_{i+1}) + f(x_i x_{i+1}) \\
&= 2n + 4i + 2 + 2n + 2i - 1 + 2n + 2i + 2 - 1 + 2n + 2i \\
&= 8n + 10i + 2
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $W_{\alpha_{10}} = \{8n + 12, 8n + 22, ..., 18n + 2\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 8n + 12 + (n-1)10 = 18n + 2$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(8n + 12, 10) - (C_3 + 2e)$-total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini akan direview kembali mengenai total selimut super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic pada graf centipede. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat beberapa teorema yang telah dibuktikan adalah sebagai berikut :

- Ada pelabelan super $(12n+4,1)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(12n+4,2)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(11n+6,3)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(10n+8,5)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(10n+8,6)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(9n+10,7)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(8n+12,9)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.
- Ada pelabelan super $(8n+12,10)-(C_3+2e)$-antimagic total selimut pada graf centipede C_n untuk $n \geq 3$.

Namun demikian, sesuai dengan batas atas $d \leq 14$, sedangkan dalam penelitian ini baru diketemukan $d \in \{1,2,3,5,6,7,9,10\}$ sehingga masih tersisa d yang lain yang belum diketemukan. Oleh karena itu penelitian mengajukan masalah terbuka berikut:

Open Problem 1 *Tentukan (a,d)-(C_3+2e)-total selimut pada graf centipede C_n bila $n \geq 3$ untuk $d \leq 14$ selain $d \in \{1,2,3,5,6,7,9,10\}$.*

References

[1] A, Rosa. 1967. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph. In Theory of Graphs (Proc. Int. Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris 349-355.

[2] Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Dicrete Math.* (2009), 4909-4915.

[3] Dafik, Slamin, Candra, F., Sya'diyah, L. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. Indoms (Indonesian Mathematics Society), Department of Mathematics Universitas Gajah Mada, Indonesia.

[4] Gutiérrez, A. dan Lladó, A. (2005). Magic Coverings. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 55,4356.

[5] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. On (a,d)-H-Antimagic Covering of Graph. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 71, 273-281.

[6] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2013. Super (a,d)-H-Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. Australasian Journal of Combinatorics 57, 127-138.

[7] Karyanti. 2012. Pelabelan Selimut (a,d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

[8] Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). Magic Valuations of Finite Graph. Canada Mathematics Bulletin 13,451461.

[9] Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. Utilitas Math 83, 333-342.

[10] Simanjuntak, R., Miller, M., dan Bertault, F. (2000). Two New (a,d)-Antimagic Graph Labelings. Proceeding of the Eleventh Australasian Workshop of Combinatorial Algorithm (AWOCA), 179189.