PENENTUAN HARGA OPSI PADA MODEL BLACK-SCHOLES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT-FRANKEL

(*Determining Option Value of Black-Scholes's Model with Duffort-Frankel Finite Difference Method*)

Hadi Siswanto, Kosala Dwidja Purnomo, Kusbudiono
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
E-mail: hadi.gitoe@gmail.com

Abstrak

Opsi merupakan suatu kontrak yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual atau membeli suatu asset keuangan dengan harga tertentu (harga eksekusi) dan dalam jangka waktu tertentu. Opsi berdasarkan hak pemegangnya dibagi menjadi opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Sedangkan berdasarkan waktu pelaksanaannya terdiri dari opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Pada opsi tipe Eropa pelaksanaan transaksi asset keuangan hanya pada saat waktu jatuh tempo, sedangkan pada opsi tipe Amerika waktu pelaksanaannya sebelum atau saat waktu jatuh tempo. Pemegang opsi tidak dapat menggunakan kontrak opsi setelah waktu jatuh tempo habis. Salah satu cara untuk mencari harga opsi tipe Eropa yaitu dengan menggunakan model Black-Scholes, dimana bentuk model Black-Scholes berupa persamaan diferensial parsial. Selanjutnya, solusi numerik persamaan Black-Scholes dicari dengan menggunakan metode beda hingga Dufort-Frankel. Model Black-Scholes memiliki bentuk solusi analitik sehingga dapat dicari nilai *error* dari solusi numerik.

Kata Kunci: *Harga eksekusi, metode Dufort-Frankel, model Black-Scholes, opsi tipe Eropa, dan waktu jatuh tempo*

Abstract

The option is a contract which give it's holder the rights to sell or purchase a prescribed asset for a prescribed price (strike price) at the prescribed time (expiry date) in the future. Option as right holder divided by call option and put option, whereas option as expiry date divided by European option and American option. The transaction of European option can be carried out at expiry date and the transaction of American option can be carried out at expiry date or before expiry date. The option holder can't use contract of option after expiry date is expired. Black-Scholes's model is one of the way to determine the European option value, where the form of it's model is partial differential equation. Finally, determining numerical solution of Black-Scholes's equation use Dufort-Frankel finite difference method. Black-Scholes's model has an analitic solution, so we can find it's accuracy with error calculation.

Keywords: *Strike price, Dufort-Frankel's Method, Black-Scholes's Model, European option, and Expiry date*

1. PENDAHULUAN

Perkembangan perekonomian global mendorong para pelaku ekonomi tertarik bergelut dengan pasar modal dari pada pasar uang karena hasil yang diperoleh lebih besar. Salah satu produk dari pasar modal adalah opsi saham. Opsi adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual atau membeli suatu asset dalam jangka waktu tertentu [1]. Perlu strategi khusus untuk berkecimpung di pasar opsi karena nilai harga opsi dinamis. Opsi berdasarkan jangka waktun pelaksanaannya terdiri dari opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Opsi tipe Eropa dapat digunakan hanya saat waktu jatuh tempo sedangkan opsi tipe Amerika dapat digunakan sebelum atau saat waktu jatuh tempo.

Model Black-Scholes merupakan salah satu model matematika yang digunakan dalam penentuan harga opsi tipe Eropa. Bentuk model Black-Scholes berupa persamaan diferensial parsial [2]. Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial [3]. Andriyanto [4] menghitung harga opsi dari suatu perusahaan secara analitik. Firman [5], Tjandra [6], dan Hanafi [7] menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dalam pencarian harga opsi, dimana yang membedakan ketiga penelitian tersebut adalah studi kasus yang berbeda.

Metode Dufort-Frankel merupakan salah satu metode beda hingga selain metode Crank-Nicholson [8]. Selanjutnya, solusi numerik persamaan Black-Scholes dicari dengan menggunakan metode beda hingga Dufort-Frankel. Selain itu, beberapa nilai yang telah disimulasikan oleh Firman [5] dalam pencarian harga opsi tipe Eropa akan dibandingkan dengan metode Dufort-Frankel.

2. METODE PENELITIAN

Pencarian solusi numerik dari harga opsi tipe Eropa dilakukan dengan mendiskritkan persamaan Black-Scholes dengan bentuk diskritisasi Dufort-Frankel. Namun sebelumnya, harus tersedia data harga saham harian dalam waktu satu tahun serta data suku bunga bebas risiko per bulan selama satu tahun untuk menghitung volatilitas harga saham (V) dan suku bebas risiko (r). perhitungan volatilitas harga saham menggunakan vormulasi sebagai berikut [9].

$$\sigma = \sqrt{(n+1)\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R(t)-\overline{R(t)}\right)^2}$$

Parameter σ adalah volatilitas harga saham, n adalah waktu (hari), dan $R(t)$ adalah *return*, dimana formulasi pencarian return adalah sebagai berikut.

$$r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right)$$

dimana parameter r_t adalah *return* saat t dan $S(t)$ adalah harga saham saat t.

Parameter V dan r merupakan konstanta pada persamaan Black-Scholes. Sehingga setelah ke-dua koefisien tersebut diketahui, tahap selanjutnya adalah mendiskritkan persamaan Black-Scholes dengan metode Dufort-Frankel. Bentuk persamaan Black-Scholes disajikan di bawah ini [2].

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Parameter V adalah harga opsi saham,t adalah waktu jatuh tempo,σ adalah volatilitas, r suku bunga bebas risiko, dan S adalah harga saham. Bentuk diskritisasi metode beda hingga Dufort-Frankel adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

Solusi harga opsi V dinyatakan dalam dua bentuk: harga opsi beli (*call option)* dan harga opsi jual (*put option)* berturut-turut dinotasikan dengan $C(S,t)$ dan $P(S,t)$. Perbedaan dari ke-dua solusi tersebut terletak pada nilai awal dan syarat batas. Berikut disajikan nilai awal dari masing-masing bentuk harga opsi [2].

$$C(S,T) = \max\,\{S(T) - E, 0\}$$

$$P(S,T) = \max\{E - S(T), 0\}$$

dengan parameter T dalah batas atas waktu jatuh tempo, dan E adalah harga eksekusi.

Syarat batas pada $C(S,t)$ dan $P(S,t)$ adalah sebagai berikut.

$$C(0,t) = 0 \text{ dan } C(L,t) = L \text{ , untuk semua } 0 \le t \le T$$

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \text{ dan } P(L,t) = 0 \text{ , untuk semua } 0 \le t \le T$$

Bentuk solusi analitik dari persamaan Black-Scholes adalah sebagai berikut.

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}\left(1 - N(d_2)\right) + S(N(d_1) - 1)$$

Fungsi $N(x)$ adalah fungsi kumulatif distribusi normal yang diformulasikan sebagai berikut [9].

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Untuk mendapatkan *error* dari perhitungan numerik digunakan galat relatif [3].

3. HASIL PENELITIAN

Sebelum mendiskritkan persamaan Black-Scholes, langkah awal yang dilakukan adalah memodifikasi persamaan Black-Scholes dengan mengubah parameter t menjadi $\tau = T - t$. Sehingga hasil persamaan Black-Scholes yang telah dimodifikasi adalah sebagai berikut.

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Diskritisasi metode Dufort-Frankel yang akan disubtitusikan pada persamaan Black-Scholes adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{V_{i+1}^n - V_i^{n+1} - V_i^{n-1} + V_{i-1}^n}{\Delta S^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{V_i^{n+1} - V_i^{n-1}}{2\Delta\tau}$$

$$S = S_i = i.\Delta S$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S}$$

Bentuk sederhana persamaan Black-Scholes menggunakan metode Dufort-Frankel adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{V^{n+1}} = -\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{V}^{n-1} - \boldsymbol{P}$$

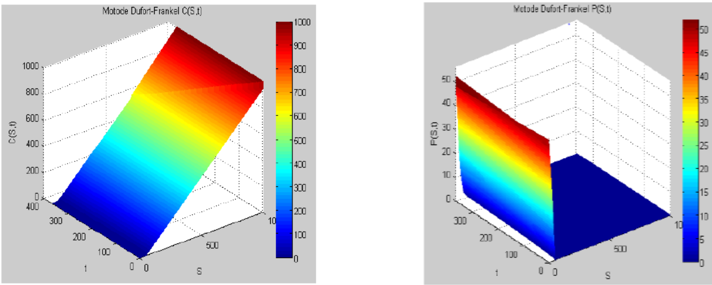
dengan,

$$\boldsymbol{V^{n+1}} = \begin{bmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ V_3^{n+1} \\ \vdots \\ V_{I-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{V}^n = \begin{bmatrix} V_1^n \\ V_2^n \\ V_3^n \\ \vdots \\ V_{I-1}^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{V}^{n-1} = \begin{bmatrix} V_1^{n-1} \\ V_2^{n-1} \\ V_3^{n-1} \\ \vdots \\ V_{I-1}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_1 V_0^n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \ddot{\alpha}_{I-1} V_I^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 & \ddot{\alpha}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddot{\gamma}_2 & \ddot{\beta}_2 & \ddot{\alpha}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddot{\gamma}_3 & \ddot{\beta}_3 & \ddot{\alpha}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddot{\beta}_{I-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddot{\delta}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{\delta}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddot{\delta}_{I-1} \end{bmatrix}$$

Dengan menghitung V_0^1 untuk $1 < i < I - 1$ maka diperoleh solusi numerik pada persamaan Black-Scholes.

Simulasi persamaan Black-Scholes dengan menggunakan metode Dufort-Frankel dengan nilai parameter awal: S=49; t=89; E=52; v=0,3667; L=1000; dan r=0,06572 diperoleh sebagai berikut.



(a) (b)

Gambar 1. Grafik harga opsi saham tipe Eropa. (a) Grafik C(S,t); (b) Grafik P(S,t)

Nilai harga opsi tipe Eropa dengan nilai parameter awal diperoleh C(49,89)=2,6421 dan P(49,89)=4,8125 dengan nilai *error* berturut-turut adalah 0,00144 dan 0,00061124 dengan menggunakan program Matlab R2009.

Perbandingan solusi numerik metode Dufort-Frankel dan Crank-Nicholson pada beberapa titik uji dalam penelitian Firman [3] dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.1 Tabel Perbandingan Metode Dufort-Frankel dan Crank-Nicholson pada Titik-titik Tertentu

No	Variasi Parameter	Solusi Eksak	D-F		C-N		Metode terbaik
			solusi	*error*	Solusi	*error*	
1	Nilai awal	2,6391	2,6421	0,00114	2,6342	0,0019	D-F
2	E=55	1,7113	1,7132	0,00111	1,7075	0,0022	D-F
3	r=0,08	2,7057	2,7087	0,00110	2,7008	0,0018	D-F
4	σ=0,4	2,9481	2,9538	0,00193	2,9435	0,0016	C-N
5	t=120	3,2951	3,2979	0,00085	3,2907	0,0013	D-F
6	S=53	4,1594	4163	0,00086	4154	0,0013	D-F

Hasil yang disajikan pada Tabel 4.1 menunjukkan bahwa metode Dufort-Frankel dominan lebih baik dari metode Crank-Nicholson. Namun tidak dapat disimpulkan bahwa metode Dufort-Frankel lebih baik Crank-Nicholson karena perbandingan dilakukan hanya pada beberapa titik uji.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang dapat ditarik dari beberapa penjelasan sebelumnya adalah Pencarian solusi harga opsi tipe Eropa pada persamaan Black-Scholes menggunakan Metode Dufort-Frankel diawali dengan menghitung nilai solusi analitik untuk setiap menggunakan bantuan formula solusi analitik yang telah diketahui sebelumnya dan selanjutnya dapat dicari nilai solusi harga opsi yang lain dengan menggunkan bentuk sederhana diskritisasi metode Dufort-Frankel.

Besar e*rror* yang diperoleh dari penentuan harga opsi beli tipe Eropa dan harga opsi jual tipe Eropa pada model Black-Scholes menggunakan metode beda hingga Dufort-Frankel diaplikasikan pada PT. Astra Internasional Tbk. saat harga saham Rp 49.000,00, harga eksekusi Rp 52.000,00, jangka waktu 89 hari, suku bunga bebas risiko 6,572 %, dan nilai volatilitas harga saham 0,3677, serta diperoleh nilai opsi beli tipe Eropa Rp 2.642,10 dan harga opsi jual tipe Eropa Rp 4.812,50 dengan bantuan program yang menggunakan *software* Matlab R2009a.

Perbandingan metode Dufort-Frankel dan Crank-Nicholson pada beberapa titik variasi parameter dalam penelitian Firman (2012), dapat disimpulkan bahwa metode yang lebih baik dalam perhitungan solusi dari beberapa titik tersebut adalah metode Dufort-Frankel.

Penelitian ini, mencoba menerapkan metode beda hingga Dufort-Frankel pada model Black-Scholes untuk menentukan harga opsi beli tipe Eropa dan harga opsi jual tipe Eropa. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menggunakan metode lain dalam menyelesaikan model Black-Scholes serta dapat menggunakan model matematika yang lain dalam penentuan harga opsi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bodie, Kane, & Marcus. 2006. *Investment Investasi Buku 2 Edisi 6*. Jakarta: Salemba Empat

[2] Desmon, J. H. 2004. *An Introduction to Finance Optionvaluation*. Cambridge: Cambridge University press

[3] Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta : Beta Offset.

[4] Andriyanto. 2009. “Model Investasi Harga Saham Tipe Eropa dengan Menggunakan Model Black-Scholes”. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Yogyakarta : FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.

[5] Firman, M. A. 2012. “ Penentuan Harga Beli Tipe Eropa Untuk Model Black-Scholes dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicholson”.Tidak Diterbitkan. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

[6] Tjandra, O. 2012. Penentuan Harga Opsi Saham dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson (C-N). *E-Jurnal Matematika*. **1**(1): 20-24.

[7] Hanafi, L. 2013. “Penyelesaian Numerik untuk Menentukan Harga Opsi dengan Metode Beda *fully Implisit* dan C-N”. *E-Jurnal Matematika.* **7**(1). 1-12

[8] Bouwer, A. 2008. *The Dufort and Frankel Finite Difference Scheme.* Pretoria: University of Pretoria

[9] Luenberger, D. G. 1998. *Investment Science*. New York: Oxford University Press.