Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson

(*The Solution of Laplace Equation Using Crank-Nicholson Method*)

Titis Miranti[1], Rusli Hidayat[2], Kusbudiono[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Jember (UNEJ) Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
[2]*E-mail: rusli_mat@yahoo.co.id*

Abstrak

Persamaan Laplace sering digunakan untuk memodelkan permasalahan – permasalahan yang muncul dari berbagai bidang dalam dunia real. Pesamaan Laplace termasuk dalam persamaan diferensial parsial tipe eliptik. Persamaan Laplace dengan syarat batas yang tidak sederhana menyebabkan permasalahan dalam mencari solusi analitiknya. Sehingga untuk memperoleh solusi tersebut dibutuhkan suatu metode Numerik. Metode Crank-Nicholson merupakan salah satu contoh metode numerik. Metode Crank – Nicholson biasanya digunakan dalam mencari solusi persamaan diferensial parsial tipe parabolik. Dalam penelitian ini, persamaan Laplace diselesaikan dengan menggunakan metode Crank – Nicholson. Persamaan Laplace dan syarat batas yang digunakan memiliki bentuk solusi analitik sehingga dapat dicari nilai *error* dari solusi numerik.

Kata Kunci: Persamaan Laplace, Syarat Batas, metode numerik dan metode Crank - Nicholson

Abstract

Laplace equation is often used to make a model of many problems that arise from various fields in the real world. Laplace equation is included the partial differential equations of elliptic type. Laplace equation with the not simple boundary condition cause a problem in finding analytical solution. So that, to obtain the solution requires a numerical method. Crank-Nicholson's method is one example of numerical methods. Crank – Nicholson's method is usually used to search the solutions of partial differential equations of parabolic type. In this study, the Laplace equation is solved by using the method of Crank - Nicholson. Laplace equation and boundary conditions used has the form analytic solutions, so we can find it's accuracy with error calculation.

Keywords: *Laplace Equation, Boundary Condition, Numerical Method and Crank-Nicholson's Method*

1 Pendahuluan

Matematika sebagai cabang keilmuan yang mengalami perkembangan secara terus – menerus mempunayi peranan penting dalam penyelesaian suatu permasalahan. Permasalahan – permasalahan yang muncul dalam bidang ilmu lainnya dapat dimodelkan kedalam bentuk matematika sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode – metode matematika. Bagian dari ilmu matematika yang mampu merepresentasikan sistem fisik dan kejadian-kejadian dalam dunia real kedalam bentuk matematik disebut sebagai pemodelan matematika [1].

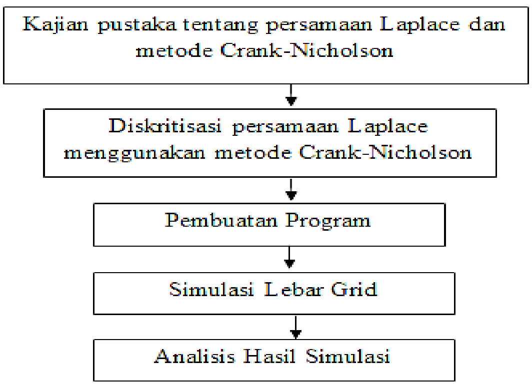
Persamaan Laplace adalah salah satu jenis persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan permasalahan dalam bidang sains. Persamaan ini merupakan contoh klasik dari persamaan eliptik dan merupakan jenis persamaan diferensial linier orde dua dengan dua peubah [2]. Persamaan Laplace yang sulit diselesaikan dengan metode analitik dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Solusi numerik merupakan solusi pendekatan atau perkiraan dari solusi analitiknya. Solusi numerik yang baik adalah solusi numerik dengan galat sangat kecil [3].

Metode Crank-Nicholson merupakan gabungan dari metode beda hingga skema eksplisit dan skema implisit [4]. Metode Crank - Nicholson digunakan untuk mecari solusi dari suatu ditribusi temperatur [5]. Durmin [6] melakukan perbandingan studi perpindahan panas dengan menggunakan metode Crank - Nicholson dan metode beda hingga skema eksplisit. Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut adalah metode Crank – Nicholson lebih efektif dalam memperoleh solusi permasalahan perpindahan panas. Penelitian – penelitian tersebut mempunyai bentuk persamaan diferensial parsial tipe parabolik.

Harijanto [7] mengkaji solusi persamaan Laplace menggunakan beberapa metode numerik, yaitu metode Jacoby, Gauss-Siedel dan SOR dengan 10 titik grid. Jumlah itersai yang dibutuhkan dari masing – masing metode tersebut sehingga dapat menacapai galat yang kecil adalah sebesar 361, 361 dan 124. Oleh karena itu, pada artikel ini dicari solusi numerik persamaan Laplace dengan menggunakan metode beda hingga Crank – Nicholson. Dalam hal ini akan dibahas tentang langkah – langkah untuk memperoleh solusi persamaan Laplace menggunakan metode Cran – Nicholson dan juga hasil solusinya terhadap solusi analitiknya.

2 Metode Penelitian

Tahapan – tahapan yang harus dilakukan untuk memperoleh solusi persamaan Laplace menggunakan metode Cran – Nicholson dapat dilihat pada gambar diagram alir berikut :



ambar 1 Diagram alir proses analisis numerik persamaan Laplace menggunakan metode Crank - Nicholson

Diagram alir pada Gambar 1 dapat diuraikan sebagai berikut :

a. Kajian pustaka persamaan Laplace dan metode Crank-Nicholson meliputi penentuan persamaan Laplace dan syarat batas yang akan diselesaikan, yaitu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le 1; \quad 0 \le y \le 1$$

$$u(x, y = 0) = 0$$

$$u(x, y = 1) = f(x) = x(1 - x)$$

$$u(x = 0, y) = 0$$

$$u(x = 1, y) = 0$$

Turunan kedua fungsi *u* terhadap *x* dan *y* dengan pendekatan metode Crank-Nicholson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

b. Diskritisasi persamaan Laplace dilakukan dengan mengubah turunan kedua fungsi *u* terhadap *x* dan *y* pada persamaan Laplace kedalam pendekatan metode Crank-Nicholson.

c. Pembuatan program dengan menggunakan bantuan *software* Matlab 7.8.347 bertujuan untuk memudahkan kegiatan simulasi pada tahapan selanjutnya.

d. Simulasi lebar grid dilakukan untuk mengetahui pengaruh lebar grid terhadap solusi numerik dari persamaan Laplace menggunakan metode Crank- Nicholson. Lebar grid ditentukan dengan pembagi lebar grid. Pembagi lebar grid domain *x* adalah $m_{(x)}$ dan pembagi pembagi lebar grid domain *y* adalah $m_{(y)}$.e. Hasil yang diperoleh dari simulasi pada tahap sebelumnya kemudian dianalisis sehingga dapat diambil suatu kesimpulan.

3 Hasil Penelitian

Solusi dari persamaan Laplace dengan menggunakan metode Crank-Nicholson ini akan dibandingkan dengan solusi analitinya. Solusi analitik persamaan Laplace dengan syarat batas yang digunakan dalam penelitian ini adalah

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin k\pi x \sinh k\pi y}{\sinh k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \qquad k = 1,2,3,\ldots \quad (8)$$

Diskritisasi persamaan Laplace menggunakan metode Crank-Nicholson menghasilkan bentuk persamaan baru sebagai berikut

$$u_{i,j-1} + \alpha\, u_{i-1,j} + \beta u_{i,j} + \alpha\; u_{i+1,j} + \alpha\; u_{i-1,j+1} + \gamma\; u_{i,j+1} + \alpha\; u_{i+1,j+1} = 0$$

dimana

$$\alpha = \frac{k^2}{2h^2}, \beta = -2\left(1 + \frac{k^2}{2h^2}\right) \text{ dan } \gamma = 1 - \frac{k^2}{h^2}$$

Dengan melakukan perhitungan setiap nilai $u_{(I,j)}$ untuk setiap $1 < i < m_{(x)}-1$ dan $1 < j <$

$m_{(y)}$-1 maka akan diperoleh persamaan – persamaan

$$
\begin{aligned}
&u_{1,0}+\alpha u_{0,1}+\beta u_{1,1}+\alpha u_{2,1}+\alpha u_{0,2}+\gamma u_{1,2}+\alpha u_{2,2}=0\\
&u_{1,1}+\alpha u_{0,2}+\beta u_{1,2}+\alpha u_{2,2}+\alpha u_{0,3}+\gamma u_{1,3}+\alpha u_{2,3}=0\\
&u_{1,2}+\alpha u_{0,3}+\beta u_{1,3}+\alpha u_{2,3}+\alpha u_{0,4}+\gamma u_{1,4}+\alpha u_{2,4}=0\\
&\qquad\vdots\\
&u_{i-1,j-2}+\alpha u_{i-2,j-1}+\beta u_{i-1,j-1}+\alpha u_{i,j-1}+\alpha u_{i-2,j}+\\
&\qquad\gamma u_{i-1,j}+\alpha u_{i,j}=0
\end{aligned}
$$

Setelah diperoleh bentuk persamaan – persamaan yang menyatakan solusi persamaan Laplace, maka selanjutnya adalah mensubtitusikan syarat batas yang telah ditentukan sebelumnya. Titik - titik yang disebut sebagai syarat batas adalah titik-titik $u_{(i,j)}$ yang mempunyai indeks $i = 0$, $i = m_{(x)}$, $j = 0$ dan $j = m_{(y)}$. Dengan melakukan tahapan tersebut dan sedikit memodifikasi bentuk persamaan yang baru maka akan diperoleh bentuk matriks

$$(\boldsymbol{A} * \boldsymbol{U}) + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}.$$

A merupakan sebuah matriks yang memiliki ordo $((m_{(x)}-1)(m_{(y)}-1))*((m_{(x)}-1)(m_{(y)}-1))$. Isi matriks ini ada koefisien-koefisien dari variabel-variabel yang akan dicari nilainya pada matriks **U**. Tahapan untuk membuat matriks **A** adalah sebagai berikut :

a. Matriks A merupakan penjumlahan dari 7 matriks yang kesemuanya harus mempunyai ordo yang sama. Misalkan matriks-matriks tersebut adalah matriks **A1**, **A2**, **A3**, **A4** **A5**, **A6** dan **A7**.

b. **A1** adalah matriks yang pertama berisi koefisien β . Bentuk matriks **A1** adalah

$$\mathbf{A1}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,\mathrm{M}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,\mathrm{M}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,\mathrm{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{M},1} & a_{\mathrm{M},2} & a_{\mathrm{M},3} & \cdots & a_{\mathrm{M},\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$a_{i,j} = \beta$ untuk setiap $i = j$ selainnya $a_{i,j} = 0$

c. **A2** adalah matriks yang berisi nilai 0 dan 1. Matriks **A2** dibuat dengan terlebih dahulu membuat matriks kolom yang memiliki ordo (($m_{(x)}$-1)*($m_{(y)}$-1)-1)*1 .
Sebagai ketentuannya , semua elemen dari matriks kolom tersebut adalah 1 kecuali pada baris ke $m_{(y)}$-1 dan kelipatannya bernilai 0. Bentuk dari matriks **A2** adalah

$$\mathbf{A2}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,\mathrm{M}} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,\mathrm{M}} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,\mathrm{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathrm{M},1} & b_{\mathrm{M},2} & b_{\mathrm{M},3} & \cdots & b_{\mathrm{M},\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$b_{i,j} = 1$ untuk setiap $i = j + 1$ dan $j \bmod (m_y - 1) \neq 0$ selainnya $b_{i,j} = 0$

d. Cara membuat matriks **A3** hampir sama dengan matriks **A2**. Matriks **A3** berisi nilai 0 dan *y*. Bentuk dari matriks **A3** adalah

$$\mathbf{A3}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,M} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,M} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M,1} & c_{M,2} & c_{M,3} & \cdots & c_{M,M} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$c_{i,j} = \gamma$ untuk setiap $j = i + 1$ dan $i \bmod (m_y - 1) \neq 0$ selainnya $c_{i,j} = 0$

e. Matriks **A4** dan **A5** berisi nilai 0 dan α . Perbedaan matriks **A4** dan **A5** terletak pada letak diagonal elemen α tersebut. Bentuk matriks **A4** dan **A5** adalah

$$\mathbf{A4}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,M} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & d_{2,M} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots & d_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{M,1} & d_{M,2} & d_{M,3} & \cdots & d_{M,M} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$d_{i,j} = \alpha$ untuk setiap $i = j + (m_y - 1)$ selainnya $d_{i,j} = 0$

$$\mathbf{A5}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} & \cdots & e_{1,M} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} & \cdots & e_{2,M} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} & \cdots & e_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{M,1} & e_{M,2} & e_{M,3} & \cdots & e_{M,M} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$e_{i,j} = \alpha$ untuk setiap $j = i + (m_y - 1)$ selainnya $e_{i,j} = 0$

f. Matriks **A6** dibuat dengan terlebih dahulu membentuk matriks kolom dengan ordo $((m_{(x)}$-2)*($m_{(y)}$-1)1)*1. Elemen dari matriks kolom ini adalah α dan 0 dengan ketentuan semua elemen barisnya bernilai α kecuali pada baris pertama dan baris kelipatan $m_{(y)}$-1 elemennya adalah 0. Bentuk matriks **A6** adalah

$$\mathbf{A6}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots & f_{1,M} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots & f_{2,M} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots & f_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M,1} & f_{M,2} & f_{M,3} & \cdots & f_{M,M} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$f_{i,j} = \alpha$ untuk setiap $i = j + (m_y - 2)$ dan $i \bmod (m_y - 1) \neq 0$, kecuali untuk

$f_{i,j} = f_{((m_y-1),1)} = 0$, selainnya $f_{i,j} = 0$

g. Matriks kolom untuk membuat matriks **A7** hampir sama dengan matriks kolom untuk membuat matriks **A6**. Semua elemen baris pada matriks kolom pembuat matriks A7 adalah α kecuali pada baris kelipatan $m_{(y)}$-1 elemennya adalah 0. Bentuk matriks **A7** adalah

$$\mathbf{A7}_{((m_x-1)(m_y-1)).((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} & \cdots & g_{1,M} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} & \cdots & g_{2,M} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & \cdots & g_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M,1} & g_{M,2} & g_{M,3} & \cdots & g_{M,M} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$g_{i,j} = \alpha$ untuk setiap $j = i + m_y$, dan $i \bmod (m_y - 1) \neq 0$ selainnya $g_{i,j} = 0$

h. Jika semua matriks **A1**, **A2**, **A3**, **A4** **A5**, **A6** dan **A7** telah dibuat maka selanjutnya untuk membuat matriks **A** adalah dengan menjumlahkan ketujuh matriks tersebut. Sehingga diperoleh matriks **A** adalah

$$\mathbf{A}_{((m_x-1)(m_y-1)),((m_x-1)(m_y-1))} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,\mathrm{M}} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,\mathrm{M}} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} & \cdots & h_{3,\mathrm{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\mathrm{M},1} & h_{\mathrm{M},2} & h_{\mathrm{M},3} & \cdots & h_{\mathrm{M},\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

dimana $\mathrm{M} = (m_x - 1)(m_y - 1)$

$h_{i,j} = \beta$ untuk setiap $i = j$

$h_{i,j} = 1$ untuk setiap $i = j + 1$ dan $j \bmod (m_y - 1) \neq 0$

$h_{i,j} = \gamma$ untuk setiap $j = i + 1$ dan $i \bmod (m_y - 1) \neq 0$

$h_{i,j} = \alpha$ untuk setiap $i = j + (m_y - 1),\ j = i + (m_y - 1),$

$i = j + (m_y - 2)$ dan $i \bmod (m_y - 1) \neq$ kecuali untuk

$h_{i,j} = h_{((m_y-1),1)} = 0$

$j = i + (m_y + 1)$, dan $j \bmod (m_y - 1) \neq 0$

Selainnya maka $h_{i,j} = 0$

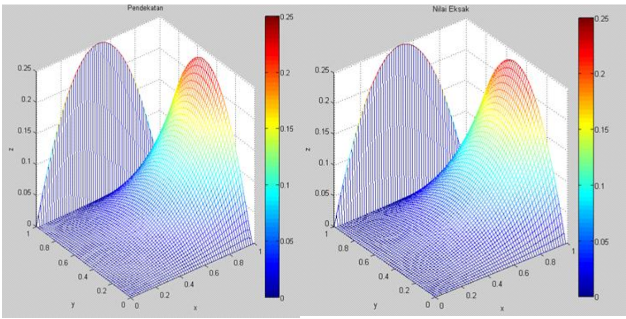
U dan **B** merupakan sebuah matriks yang memiliki ordo $(((m_{(x)}-1)(m_{(y)}-1))*1)$. Elemen – elemen dari matriks **U** adalah variabel - variabel yang menjadi solusi dari persamaan Laplace. Sedangkan melemen – elemen dari matriks **B** adalah matriks syarat batas. Bentuk dari matriks **U** dan matriks **B** adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{1,m_y-1} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{2,m_y-1} \\ \vdots \\ u_{m_x-1,1} \\ u_{m_x-1,2} \\ \vdots \\ u_{m_x-1,m_y-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} u_2^1 + \alpha(u_{i-1}^{j} + u_{i-1}^{j+1}) \\ u_{i-1}^{j} + u_{i-1}^{j+1} \\ \vdots \\ u_{i-1}^{j} + u_{i-1}^{j+1} \\ \alpha(u_{i-1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+2}) + \gamma u_i^{j+2} + \alpha u_{i+1}^{j+2} \\ u_i^{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(u_{i-1}^{j+2} + u_{i+1}^{j+2}) + \gamma u_i^{j+2} \\ u_{i,j-1} + \alpha(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) \\ \alpha(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) \\ \vdots \\ \alpha(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1}) \\ \alpha(u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j+2}) + \gamma u_{i,j+2} + \alpha u_{i+1,j+2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow j = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 3 \le j < m_y - 1 \quad i = 2 \\ \rightarrow j = m_y - 1 \\ \rightarrow j = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 3 \le j < m_y - 1 \quad 3 \le i < m_x - 1 \\ \rightarrow j = m_y - 1 \\ \rightarrow j = 2 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 3 \le j < m_y - 1 \quad i = m_x - 1 \\ \rightarrow j = m_y - 1 \end{array}$$

Solusi dari persamaan Laplace mempunyai bentuk matriks **(A*U) + B = 0**. Bentuk Matriks tersebut dapat diselesaikan dengan **U = A$^{(-1)}$(-B)**

Simulasi dilakukan dengan memberikan lebar grid yang berbeda pada domain x dan y . Adapun beberapa pembagi lebar grid yang digunakan dalam simulasi program ini antara lain adalah 40, 50 dan 60. Simulasi dengan menggunakan pembagi lebar grid sebesar 40 menghasilkan galat sebesar 0,0407%, pembagi lebar grid 50 menghasilkan galat sebesar 0,0327 dan pembagi lebar grid 60 menghasilkan galat sebesar 0,0273%. Galat terkecil dihasilkan dari pembagi lebar grid terbesar, yaitu 60. Berikut adalah hasil *plot* secara numerik dan analitiknya :



(a) (b)

Gambar 2 Grafik Solusi Persamaan Laplace dengan Lebar Grid dan *y* = 1/60 (a) Grafik Solusi Eksak (b) Grafik solusi Numerik

Simulasi juga dilakukan dengan beberapa kombinasi pembagi lebar grid pada domain *x* dan domain *y*. Tujuannya adalah untuk mengetahui pengaruh lebar grid terhadap solusi numerik persamaan Laplace. Simulasi ini menggunakan nilai parameter awal (1/2.1/2). Hasil simulasi yang dilakukan disajikan dalam tabel - tabel berikut :

Tabel 1 Tabel Hasil simulasi Lebar Grid Domain *x* Berubah dan Lebar Grid domain *y* Tetap

$m_{(x)}$	$m_{(y)}$	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Selisih	Galat Relatif
50	50	0,0500	0,0513	0,0013	0,0238
50	40	0,0497	0,0513	0,0016	0,0312
50	60	0,0502	0,0513	0,0011	0,0214

Tabel 2 Tabel Hasil simulasi Lebar Grid Domain *x* Tetap dan Lebar Grid domain *y* Berubah

$m_{(x)}$	$m_{(y)}$	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Selisih	Galat Relatif
50	50	0,0500	0,0513	0,0013	0,0238
40	50	0,0499	0,0513	0,0014	0,0273
60	50	0,0501	0,0513	0,0012	0,0234

Tabel 3 Tabel Hasil simulasi Lebar Grid Domain *x* dan Lebar Grid domain *y* Berubah

$m_{(x)}$	$m_{(y)}$	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Selisih	Galat Relatif
40	40	0,0496	0,0513	0,0017	0,0331
40	60	0,0501	0,0513	0,0012	0,0234
60	40	0,0497	0,0513	0,0016	0,0312
60	60	0,0503	0,0513	0,0010	0,0195

Berdasarkan Tabel 1, Tabel 2 dan Tabel 3 dapat dilihat bahwa perubahan lebar grid domain x dan domain y menyebabkan perubahan hasil solusi numerik persamaan Laplace. Perubahan lebar grid ditunjukkan dengan perubahan pembagi lebar grid pada domain x dan domain y . Solusi dengan nilai galat yang paling kecil dihasilkan dari pembagi lebar grid paling besar, yaitu sebesar 60. Nilai galat relatif yang dihasilkan sebesar 0,0195. Sedangkan solusi dengan galat paling besar yaitu sebesar 0,0331 dihasilkan dari pembagi lebar grid paling kecil yaitu 40.

4 Kesimpulan Dan Saran

Solusi numerik terbaik yang diperoleh dari persamaan Lapalce menggunakan metode Crank – Nicholson dengan parameter awal *U*(1/2,1/2) adalah sebesar 0,0503 dan galat relatifnya sebesar 0,0195.

Penelitian ini hanya membahas solusi persamaan Laplace dalam koordinat kartesius yang diselesaikan dengan metode Crank-Nicholson. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan pembahasan solusi persamaan Laplace dalam koordinat polar dengan menggunakan syarat batas yang lebih bervariatif selain itu juga dapat menggunakan metode-metode numerik lainnya.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom. dan Bapak Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D. yang telah memberikan kritik dan saran serta masukan dalam penyempurnaan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sutimin dan Widowati. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.

[2] Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. Jember: Jember University Press.

[3] Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset

[4] Chapra, S. C. dan Canale, R. P. 2010. *Numerical Methods For Engineers, 6nd Edition*. New York: McGraw-Hill Companies

[5] Sailah, S. 2010. Menentukan Distribusi Temperatur dengan Menggunakan Metode Crank-Nicholson. *Jurnal Penelitian Sains FMIPA Universitas Sriwijaya*. **13** : 17-22.

[6] Durmin. 2013. *Studi Perbandingan Perpindahan Panas Menggunakan Metode Beda Hingga dan Crank-Nicholson*.[serial online]. http://digilib.its.ac.id/ITS-paper-12021140-003535/29484.[8 Juli 2014]

[7] Harijanto, A. 1996. *Solusi Persamaan Lapalce dengan Aproksimasi Finite Difference Menggunakan Metode Iteratif untuk Menentukan Distribusi Potensial Listrik*. Tidak Diterbitkan. Laporan Penelitian. Jember: Lembaga Penelitian Universitas Jember.

[8] Hamzah, M., Djoko, S., Wahyudi, W. P. dan Budi, S. 2008. Pemodelan Perembesan Air dalam Tanah . *Semnas Matematika dan Pendidikan Matematika*. **1**: 346-353.

[9] Munir, R. 1999. *Metode Numerik*. Bandung: Penetbit ITB