DARI RADIKAL RING KE RADIKAL MODUL (*FROM RADICAL OF RINGS TO RADICAL OF MODULES*)

Puguh W. Prasetyo[1], Sri Wahyuni[2], Indah E. Wijayanti[3], Harlina France-Jackson[4]
Matematika Universitas Gadjah Mada, [2,3]Jurusan Matematika FMIPA UGM
[4]Nelson Mandela Metropolitan University
E-mail: [1]puguhwp@gmail.com

Abstrak

Radikal dalam teori ring pertama kali dibahas oleh Amitsur [2] dan Kurosh [7] hingga sampai saat ini berkembang dalam teori modul. Pada paper ini akan dibahas kelas radikal dalam teori ring termasuk konstruksi dua jenis radikal yaitu radikal atas (*upper radicals*) dan radikal bawah (*lower radicals*) dan selanjutnya dibahas radikal dari modul. Kedua contoh konstruksi radikal ini yang banyak dikembangkan. Ada beberapa cara dalam mengkonstruksi radikal bawah, dalam paper ini digunakan konstruksi berdasarkan konstruksi radikal yang dikenalkan oleh Tangeman dan Kreiling [11]. Salah satu contoh dari konstruksi radikal bawah adalah konstruksi radikal bawah dari kelas β yang merupakan kelas ring nilpoten. Kelas radikal ini disebut juga dengan istilah *Baer Radical* atau *prime radical* (radikal prima), sedangkan contoh dari radikal atas adalah radikal atas dari kelas semua ring sederhana dengan unit yang dikenal dengan istilah *Brown-McCoy radical class*. Perhatikan bahwa eksistensi ring prima dalam teori ring telah memotivasi adanya modul prima. Secara alami, adanya radikal prima dalam teori ring juga memotivasi adanya radikal prima dalam teori modul. Selain itu radikal prima dari suatu modul memotivasi munculnya istilah modul yang memenuhi formula radikal Sarac dan Tiras [10].

Kata Kunci: *Tangeman-Kreiling construction*, konstruksi radikal, *Baer Radical Class*, *Brown-McCoy radical class*.

Abstract

The radical theory of rings first had been introduced by Amitsur [2] and Kurosh [7] until today has been being developed into modul theory. This paper will discuss about radical class of rings including two radical contructions that are upper radical classess and lower radical classes and then this paper will discuss radical of modules. Two examples of these radicals contructions have been being developed largely. There are many way to constructthe lower radical classes. This paper use the construction that was introduced by Tangeman and Kreiling [11]. One of application of this radical construction is to determine the lower radical class of class of nilpotent ring, namely β. This lower radical clas is called Baer Radical or prime radical, whereas the example of upper radical construction is the upper radical of class of simple rings with unity. This radical classes is called Brown-McCoy radical classes. The existence of definition of prime ring in ring theory motivated the existence of definition of prime module. Naturally, the existence of prime radical of rings also motivated the existence of prime radical of modules.Beside that, the existence of prime radical of modules motivated the existence of definiton of module which satisfy radical formula [10].

1 Pendahuluan

Diketahui R ring, I ideal R disebut ideal prima jika untuk setiap A, B ideal R dengan sifat $AB \subseteq I$, maka $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. Kemudian ring R disebut ring prima jika

$\{0_R\}$ ideal prima.Selanjutnya I ideal R dinotasikan dengan $I \lhd R$. Definisi ring prima telah memotivasi adanya definisi modul prima. Diketahui MR −modul, N submodul sejati M disebut submodul prima jika untuk setiap $r \in R, m \in M$ berlaku jika $rm \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in (N: M)$ dengan $(N: M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$. Kemudian MR −modul jika $\{0_M\}$ submodul prima M.

Teori-teori tentang kelas radikal pertama kali dibahas oleh Amitsur [2] dan Kurosh [7], akan tetapi istilah radikal dalam teori ring pertama kali muncul ketika Koethe [6] membahas fenomena aneh yang dimiliki ring dan elemennya, yaitu ring nil dan elemen nilpoten. Diketahui R ring, suatu $x \in R$ disebut elemen nilpoten jika terdapat n bilangan bulat positif sehingga $x^n = 0$. Jika semua elemen R nilpoten, maka R disebut ring nil. Untuk suatu bilangan bulat positif n, didefinisikan

$$R^n = \{\sum_{i=1}^{n} r_1 r_2 \dots r_n | \, r_i \in R, i \in \{1,2, \dots, n\}\}$$

Ring R disebut nilpoten, jika $R^n = 0$ untuk beberapa bilangan bulat positif n. Perhatikan bahwa setiap ring nilpoten merupakan ring nil. Beberapa sifat fundamental tentang ring nil akan diberikan sebagai berikut.

Lemma 1.

Diketahui R ring.

i. Jika R nil, maka untuk setiap S subring R merupakan nil.
ii. Jika R nil, maka $R/_I$ nil untuk setiap I ideal R.
iii. Jika I dan $R/_I$ nil, maka R nil.

Bukti

i. Misalkan S sebarang subring R. Kemudian diambil sebarang $x \in S \subseteq R$. Karena R nil, maka terdapat bilangan bulat positif n sehingga $x^n = 0$. Dengan demikian S nil.
ii. Misalkan I sebarang ideal R sehingga dapat dibentuk himpunan $R/_I = \{\bar{r} = r + I | r \in R\}$. Kemudian diambil sebarang $\bar{r} \in R/_I$, maka $\bar{r}$ dapat direpresentasikan sebagai $\bar{r} = r + I$ dengan $r \in R$. Karena R nil, maka terdapat bilangan bulat positif n sehingga $r^n = 0$. Perhatikan $\bar{r}^n = (r + I)^n = r^n + I = 0 + I = \bar{0}$. Jadi $\bar{r}$ nilpoten. Dengan demikian $R/_I$ nil.
iii. Misalkan I sebarang ideal R. Berdasarkan yang diketahui I dan $R/_I$ nil, akan ditunjukkan R nil. Diambil sebarang $r \in R$ maka ada dua kemungkinan yaitu $r \in I$ atau $r \in R \backslash I$. Jika $r \in I$ maka jelas r nilpoten. Jika $r \in R \backslash I$, maka dapat dibentuk $r + I \in R/_I$. Karena $R/_I$ nil, maka terdapat bilangan bulat positif n sehingga $(r + I)^n = \bar{0} \Leftrightarrow r^n + I = \bar{0} \Leftrightarrow r^n = 0$. Jadi r nilpoten, akibatnya R nil ■

Lemma 2.

Diketahui R ring dengan $\{I_k\}_{k \in \mathfrak{T}}$ merupakan keluarga ideal R. Himpunan $\sum I_k = \{i_1 + i_2 + \cdots | i_k \in I_k$ dan hanya berhingga $i_k$yang taknol$\}$ merupakan ideal R yang memuat tiap-tiap I_k.

Bukti

Diambil sebarang $a, b \in \sum I_k$, maka a, b dapat direpresentasikan sebagai $a = a_1 + a_2 + \cdots | a_k \in I_k$ dan hanya berhingga $a_k$yang taknol dan $b = b_1 + b_2 + \cdots | b_k \in I_k$ dan hanya berhingga $b_k$yang taknol. Perhatikan bahwa $a - b = (a_1 + a_2 + \cdots) - (b_1 + b_2 + \cdots) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots$ dengan $a_k - b_k \in I_k$dan hanya berhingga $a_k - b_k$yang taknol. Jadi $a - b \in \sum I_k$. Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in R$ dan $a \in \sum I_k$ berlaku $ra = r(a_1 + a_2 + \cdots) = (ra_1 + ra_2 + \cdots) \in \sum I_k$. Dengan demikian $\sum I_k$ merupakan ideal R. Selanjutnya jelas bahwa $\sum I_k$ memuat masing-masing I_k. ■

Lemma 3.

Diketahui R ring dan $I_1, I_2, \dots, I_n$merupakan ideal R. Jika $I_1, I_2, \dots, I_n$ nil, maka $\sum_{i=1}^{n} I_i$nil.

Bukti

Dengan menggunakan Lemma 2 maka terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{n} I_i$ merupakan ideal R. Diambil sebarang $a \in \sum_{i=1}^{n} I_i$, maka a dapat direpresentasikan sebagai $a = a_1 + a_2 + \cdots a_n$ dengan $a_i \in I_i$untuk $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Karena masing-masing $I_1, I_2, \dots, I_n$ nil maka terdapat bilangan bulat $n_1, n_2, \dots, n_n$ sehingga $a_1{}^{n_1} = a_2{}^{n_2} = \cdots = a_n{}^{n_n} = 0$. Perhatikan bahwa $(a_1 + a_2 + \cdots a_n)^{n_1 . n_2 \dots n_n} = 0$, jadi$a^m = 0$ untuk suatu bilangan bulat $m = n_1 . n_2 \dots n_n$. Dengan demikian a nilpoten, akibatnya $\sum_{i=1}^{n} I_i$ nil.

Berdasarkan sifat-sifat fundamental di atas, akan ditunjukkan bahwa himpunan

$\mathcal{N}(R) = \sum\{I \lhd R \,|\, I\ nil\}$

merupakan ideal nil R. Lebih lanjut sifat nil $\mathcal{N}$ merupakan kelas radikal. ■

Lemma 4.

Diketahui R ring. Himpunan $\mathcal{N}(R) = \sum\{I \lhd R \,|\, I\ nil\}$ merupakan ideal nil R yang memuat semua ideal nil R.

Bukti.

Berdasarkan Lemma 2 himpunan $\mathcal{N}(R)$ merupakan ideal R yang memuat masing-masing ideal nil R. Berdasarkan Lemma 3 dan dengan bantuan teorema utama homomorfisma ring diperoleh $\mathcal{N}(R)$ ideal nil. ■

Dengan demikian berdasarkan pembahasan di atas, himpunan $\mathcal{N}(R)$ merupakan ideal nil R yang memuat semua ideal nil R. Suatu kelas ring δ disebut kelas radikal jika memenuhi tiga kriteria berikut ini.

i. Kelas δ tertutup secara homomorfis, artinya untuk setiap ring $A \in \delta$, dan homomorfisma ring $f: A \to B$, maka $Im\ f \in \delta$.
ii. Untuk setiap ring $A \in \delta$, himpunan $(A) = \sum\{I \lhd A \,|\, I \ \in \delta\} \in \delta$.
iii. Kelas δ tertutup terhadap perluasan, artinya untuk setiap $I \lhd A$ dengan sifat I dan $A/_I \in \delta$ berakibat $A \in \delta$.

Perhatikan bahwa kelas $\mathcal{N}$ yaitu kelas ring nil memenuhi ketiga kriteria kelas radikal, maka $\mathcal{N}$ merupakan kelas radikal yang disebut Koethe [6] dengan Radikal nil dengan $\mathcal{N}(R)$ dianggap ideal yang "aneh" dan disebut ideal nil radikal.Perhatikan bahwauntuk setiap $x \in \mathcal{N}(R)$ terdapat bilangan bulat positif n sehingga $x^n = 0$ dan x merupakan akar dari persamaan $x^n = 0$. Akar dalam bahasa latin disebut dengan "*radix*", oleh sebab itu disebut dengan radikal.

Contoh 5.
Contoh selain radikal nil antara lain adalah Radikal Jacobson, Levitzki Radikal, Kelas ring Von Neumann beraturan yang akan dibahas berikut ini.

1. Radikal Jacobson merupakan radikal yang paling terkenal. Diketahui ring A dan didefinisikan operasi $\circ$ sebagai berikut.
$$a \circ b = a + b - ab \quad \forall a, b \in A$$
Kelas radikal Jacobson radikal didefinisikan oleh
$$\mathcal{T} = \{A | (A, \circ) grup\}$$
ada beberapa generalisasi dari Radikal Jacobson, salah satunya adalah jika diketahui Rring, radikal Jacobson ring R didefinisikan sebagai irisan semua ideal maksimal ring R.
2. Suatu ring A disebut nilpotent lokal jika setiap subring A yang dibangun secara hingga merupakan nilpoten. Perhatikan bahwa setiap ringnilpotent merupakan nilpoten lokal. Dan setup ring nilpoten lokal merupakan ring nil. Kelas radikal Levitzki adalah kelas ring nilpoten lokal.
3. Suatu ring A disebut ring von Neumann beraturan jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \in aAa$. Kelas semua ring von Neumann merupakan kelas radikal.
4. Kelas semua ring nilpoten bukan merupakan kelas radikal.

Misalkan δ kelas ring. Perhatikan bahwa δ belum tentu merupakan kelas radikal. Jika kelas ring δ tersebut bukan kelas radikal, maka dapat dicari kelas radikal terkecil yang memuat δ. Yang menjadi jaminan hal ini adalah lemma di bawah ini.

Lemma 6.
Untuk setiap kelas ring δ, maka terdapat kelas radikal terkecil yang memuat δ.

Bukti.

Kasus I
Jika kelas δ merupakan kelas radikal, maka kelas radikal terkecil yang memuat δ adalah δ sendiri.

Kasus II
Jika kelas δ bukan kelas radikal, maka dibentuk himpunan keluarga kelas radikal yang memuat δ, misalkan
$\mathfrak{R} = \{\varrho |\ \delta \subset \varrho$ dan ϱ kelas radikal$\}$
Akan ditunjukkan $\mathfrak{R} \neq \{\emptyset\}$. Misalkan ϱ kelas ring apapun, ϱ merupakan kelas radikal yang memuat δ. Hal ini disebabkan karena jelas bahwa $\delta \subset \varrho$ selanjutnya akan ditunjukkan ϱ merupakan kelas radikal.

Diambil sebarang ring $A \in \varrho$, peta homomorfis A dapat direpresentasikan sebagai $A/_I$ untuk suatu ideal I. Karena $A/_I$ merupakan ring, maka $A/_I \in \varrho$. Dengan demikian kelas ϱ tertutup secara homomorfis. Perhatikan bahwa $\varrho(A) = \sum\{I \lhd A | I \in \varrho\}$ merupakan ideal A, akibatnya $\varrho(A) \in \varrho$.

Misalkan A sebarang ring dengan sifat I dan $A/_I \in \varrho$, karena ϱ kelas ring apapun, maka $A \in \varrho$. Jadi dapat disimpulkan ϱ kelas radikal sehingga $\delta \subset \varrho$. Akibatnya $\mathfrak{R} \neq \{\emptyset\}$, karena minimal ada $\varrho \in \mathfrak{R}$.Selanjutnya dapat dibentuk himpunan

$$\mathcal{L}\delta = \bigcap \{\varrho | \varrho \in \mathfrak{R}\}$$

Yaitu irisan semua kelas radikal yang memuat δ, jelas bahwa $\mathcal{L}\delta$ merupakan kelas radikal terkecil, sebab $\mathcal{L}\delta \subseteq \varrho$ untuk setiap $\varrho \in \mathfrak{R}$. ■

2 Radikal Bawah

Pada pembahasan di atas telah ditunjukkanbahwa setiap kelas ring terdapat kelas radikal terkecil yang memuatnya. Misalkan δ kelas ring yang bukan radikal, maka terdapat kelas radikal terkecil $\mathcal{L}\delta$ yang memuat δ. Kelas radikal $\mathcal{L}\delta$ merupakan irisan kelas radikal yang memuat δ. Dengan demikian kelas δ menentukan adanya kelas $\mathcal{L}\delta$. Untuk menentukan kelas $\mathcal{L}\delta$ bukan hal yang mudah, karena harus mencari satu-persatu kelas radikal yang memuat δ. Ada beberapa cara untuk mencari $\mathcal{L}\delta$, salah satunya adalah metode yang dikenalkan oleh Tangeman dan Kreiling [11]. Kelas radikal $\mathcal{L}\delta$ disebut dengan kelas radikal bawah. Untuk mencari $\mathcal{L}\delta$ diawali dengan mendefinisikan himpunan klosur homomorfisma δ yaitu

$$\delta_1 = \{A | A \text{ merupakan peta homomorfisma suatu ring } B \text{ di kelas } \delta\}.$$

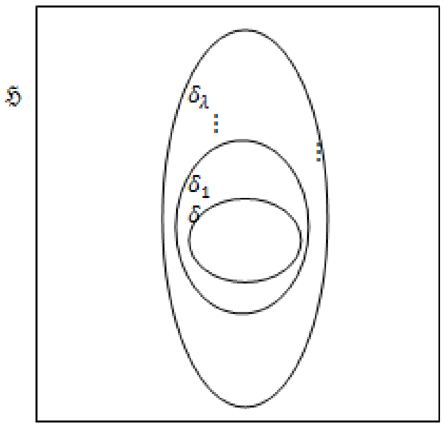
Secara induktif, jika δ_μ didefinisikan untuk bilangan *ordinal*$\mu < \lambda$ didefinisikan

$$\delta_\lambda = \{A | \exists I \lhd A \text{ sehingga } I \text{ dan } A/I \text{ anggota } \delta_{\lambda-1}\}$$

ketika $\lambda - 1$ ada. Jika bilangan *ordinal*λ merupakan batas ordinal yaitu jika $\delta_\lambda = \delta_{\lambda+1} = \delta_{\lambda+2} = \cdots$, maka

$$\delta_\lambda = \{A | A \text{ merupakan gabungan rantai naik ideal-ideal, masing-masing anggota } \delta_\mu, \mu < \lambda\}.$$

Hal ini dapat dilakukan berdasarkan penjelasan di bawah ini.
Jika diambil sebarang $A \in \delta$, maka dapat dibentuk $A \cong A/\{0\} \in \delta$. Dengan demikian $A \in \delta_1$. Langkah ini dapat diteruskan sehingga diperoleh rantai kelas-kelas $\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \delta_2 \ldots \subseteq \delta_\lambda = \delta_{\lambda+1} = \delta_{\lambda+2} = \cdots$. Jika diilustrasikan dalam diagram Venn adalah sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Venn

dengan $\mathfrak{H}$ himpunan semua kelas ring. Diambil sebarang $I_\lambda \in \delta_\lambda$, karena $\delta_\lambda = \delta_{\lambda+1} = \delta_{\lambda+2} = \cdots$, maka terdapat $I_{\lambda-1} \lhd I_\lambda$ sehingga $I_{\lambda-1}, I_\lambda/I_{\lambda-1} \in \delta_{\lambda-1}$. Langkah ini dapat diteruskan sehingga diperoleh rantai naik $C_1: I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_{\lambda-1} \subseteq I_\lambda$. Selanjutnya berdasarkan eksistensi rantai ini akan ditunjukkan bahwa $A = \bigcup_{j\in J} C_j$ dengan J indeks.

Perhatikan jelas bahwa

$A \supseteq \bigcup_{j \in J} C_j$ (1)

Diambil sebarang $a \in A$, maka terdapat $I_\lambda \lhd A$ sehingga $a \in I_\lambda$. Berdasarkan eksistensi rantai seperti yang dijelaskan di atas diperoleh $a \in I_\lambda \subseteq C_\lambda$ sehingga $a \in \bigcup_{j \in J} C_j$ akibatnya diperoleh

$A \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $A = \bigcup_{j \in J} C_j$.

Dengan demikian setiap anggota δ_λ dapat didefinisikan sebagai gabungan rantai naik ideal-ideal yang masing-masing anggota δ_μ untuk $\mu < \lambda$. Jika λ diperluas pada semua bilangan ordinal, maka radikal bawah dari kelas δ akan dijelaskan pada teorema di bawah ini.

Teorema 7.
Jika δ kelas ring, maka $\mathcal{L}\delta = \bigcup \delta_\lambda$.

Bukti

Pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan ordinal μ, λ dengan sifat $\mu < \lambda$, maka $\delta_\mu \subseteq \delta_\lambda$. Oleh sebab itu berdasarkan konstruksi A yang monoton naik, akan ditunjukkan $\bigcup \delta_\lambda$ merupakan kelas radikal.

Pertama akan ditunjukkan, $\bigcup \delta_\lambda$ tertutup terhadap homomorfisma. Diambil sebarang $A \in \bigcup \delta_\lambda$, maka terdapat rantai K_i dengan i indeks sehingga $A = \bigcup K_i$ dan untuk setiap $K_i \in \delta_\mu$ untuk $\mu < \lambda$.Perhatikan$\{(I + K_i)/I\}$merupakan rantai ideal-ideal A/I sehingga $A/I = \bigcup\{(I + K_i)/I\}$. Karena $(I + K_i)/I \cong I/(I \cap K_i)$ dan asumsi pada δ_μ, maka untuk setiap ideal tersebut merupakan anggota δ_μ untuk$\mu < \lambda$, hal ini berakibat$A/I \in \delta_\mu$. Jika $\lambda - 1$ ada, maka A memuat ideal J sehingga J dan A/J anggota$\delta_{\lambda-1}$. Perhatikan bahwa $(I + J)/I \cong I/(I \cap J)$ anggota$\delta_{\lambda-1}$ dan $(A/I)/((J + I)/I) \cong A/(J + I)$ anggota$\delta_{\lambda-1}$, akibatnya A/I anggotaδ_λ. Dengan demikian δ_λ tertutup terhadap homomorfisa. Kemudian dengan dinsuksi transitif dapat ditunjukkan bahwa δ_λ tertutup terhadap homomorfisma untuk setiap bilangan ordinal λ. Lebih lanjut, $\bigcup \delta_\lambda$ tertutup terhadap homomorfisma.

Kedua akan ditunjukkan $\bigcup \delta_\lambda$ mempunyai sifat indukti. Perhatikan jika $I_1 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$ merupakan rantai naik tegas ideal-ideal ring A sehingga untuk setiap I_i anggota $\bigcup \delta_\lambda$. Karena A merupakan himpunan dengan konstruksi monoton, maka terdapat bilangan ordinal μ sehingga I_i anggota δ_μ untuk setiap indeks i. Kemudian diambil sebarang bilangan ordinal $v > \mu$ sehingga diperoleh $\bigcup I_i \in \delta_v \subseteq \bigcup \delta_\lambda$. Dengan demikian $\bigcup \delta_\lambda$ mempunyai sifat induktif.

Ketiga akan ditunjukkan bahwa $\bigcup \delta_\lambda$tertutup terhadap perluasan. Diambil sebarang ring A dengan sifat I dan A/I anggota di $\bigcup \delta_\lambda$. Perhatikan I dan A/I anggota di δ_λ, berdasarkan definisi $\delta_{\lambda+1}$, diperoleh A anggota $\delta_{\lambda+1}$, akibatnya A anggota di $\bigcup \delta_\lambda$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathcal{L}\delta = \bigcup \delta_\lambda$. Karena $\mathcal{L}\delta$ radical terkecil yang memuat δ, maka jelas bahwa $\mathcal{L}\delta \subseteq \bigcup \delta_\lambda$. Diambil sebarang kelas radikal γ yang memuat kelas ring δ. Karena γ merupakan kelas radikal, maka sudah semestinya γ tertutup terhadap homomorfisma. Dengan demikian γ memuat kelas δ_1 dan seterusnya sehingga diperoleh δ_λ untuk setiap bilangan ordinal λ. Jadi γ memuat $\bigcup \delta_\lambda$. Hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{L}\delta \supseteq \bigcup \delta_\lambda$, akibatnya

$\mathcal{L}\delta = \bigcap_{\delta\subseteq\gamma}\gamma = \bigcup \delta_\lambda$ ■

Contoh 8.

Pada Contoh 5 (4) disebutkan bahwa kelas semua ring nilpoten bukan merupakan kelas radikal. Berdasarkan konstruksi radikal bawah, dapat dicari kelas radikal terkecil yang memuat kelas semua ring nilpoten. Radikal prima didefinisikan oleh semua irisan semua ideal prima. Selanjutnya ternyata radikal bawah dari **kelas semua ring nilpoten sama dengan radikal prima.**Beberapa paper telah menunjukkan hal ini, salah satunya Levitzki [8]

3 Radikal Atas

Setelah dibahas tentang radikal bawah, yaitu radikal terkecil yang memuat kelas ring tertentu, berikut akan dibahas tentang radikal atas. Motivasi dari radikal bawah adalah sifat kelas ring yang buruk yang bukan merupakan kelas radikal, salah satu contohnya adalah ring nilpoten. Di lain pihak jika menemukan kelas ring dengan kondisi yang bagus seperti ring pembagian atau ring matriks, maka tidak perlu dicari radikal bawahnya akan tetapi yang akan diselidiki adalah radikal atasnya. Misalkan diketahui δ kelas ring. Kelas radikal γ disebut radikal atas jika γ radikal terbesar sehingga $\gamma\cap\delta = 0$, artinya jika terdapat kelas radikal γ_1 dengan sifat $\gamma_1\cap\delta = 0$, maka $\gamma_1 \subseteq \gamma$. Kemudiankelas δ disebut reguler jika untuk setiap $A \in \delta$, untuk setiap $0 \neq I \lhd A$ maka I mempunyai peta homomorfisma taknol di δ. Konstruksi radikal atas akan dijelaskan pada teorema di bawah ini. Akan tetapi sebelumnya, untuk mempermudah pembuktian konstruksi radikal atas, diberikan teorema di bawah ini.

Teorema 9

Untuk setiap kelas ring γ, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

1. γ kelas radikal,
2. Jika $A \in \gamma$, maka untuk setiap $A \longrightarrow B \neq 0$ terdapat $C \lhd B$ sehingga $0 \neq C \in \gamma$ $\boldsymbol{(R_1)}$
   Jika A ring dari kelas ring universal $\mathbb{A}$ dan setiap $A \longrightarrow B \neq 0$ terdapat $C \lhd B$ sehingga $0 \neq C \in \gamma$, maka $A \in \gamma$. $\boldsymbol{(R_2)}$
3. γ memenuhi $\boldsymbol{(R_1)}$, mempunyai sifat induktif dan tertutup terhadap perluasan.

Bukti

Dari 1 $\Longrightarrow$ 3 jelas.
Dari 3 $\Longrightarrow$ 2.
Diasumsikan A ring sehingga untuk setiap $A \longrightarrow B \neq 0$, maka terdapat $C \lhd B$ sehingga $0 \neq C \in \gamma$ dan A sendiri tidak di γ. Karena sifat induktif terpenuhi, maka dengan bantuan Lemma Zorn diperoleh I ideal maksimal A. Karena $A \notin \gamma$, $A/I \neq 0$ terpenuhi, maka terdapat ideal $C/I \lhd A/I$ sehingga $0 \neq C/I \in \gamma$. Karena γ tertutup terhadap perluasan, maka $C \in \gamma$. Hal ini berakibat $I \lhd C$, dengan demikian kontradiksi dengan kenyataan bahwa Iideal maksimal. Pengandaian salah, yang benar adalah $A \in \gamma$. Dengan demikian kondisi $\boldsymbol{(R_2)}$terpenuhi.
Dari 2 $\Longrightarrow$ 1
Diambil sebarang $A \in \gamma$ dan B merupakan peta homomorfisma A, sebarang C peta homomorfisma B juga merupakan peta A. Kemudian jika $A \to B \to C \neq 0$, berdasarkan kondisi $\boldsymbol{(R_1)}$maka terdapat $D \lhd C$ dengan $0 \neq D \in \gamma$. Kemudian dengan $\boldsymbol{(R_2)}B \in \gamma$,

akibatnya γ tertutup terhadap homomorfisma. Misalkan $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq \cdots$rantai naik ideal-ideal A yang masing-masing di γ, akan ditunjukkan $\bigcup I_i$ di γ. Misalkan $\bigcup I_i / K$merupakan sebarang ring faktor $\bigcup I_i$, maka harus ada indeks i sehingga $I_i \nsubseteq K$ dan oleh sebab itu $0 \neq (I_i + K)/K \lhd (\bigcup I_i)/K$. Perhatikan $(I_i + K)/K \cong I_i/(I_i \cap K)$ dan $(I_i + K)/K$ di γ. Karena I_i di γ dan γ tertutup terhadap homomorfisma, maka kondisi $(\boldsymbol{R_2})$mengakibatkan $\bigcup I_i$ harus di γ. Jadi γ mempunyai sifat induktif. Diambil sebarang A dengan sifat I dan $A/I \in \gamma$. Akan ditunjukkan $A \in \gamma$. Misalkan A/K sebarang ring factor tdak nol A. Pada kasus ini ketika $I \subseteq K$, maka $0 \neq A/K \cong (A/I)/(K/I)$, akibatnya $A/K \in \gamma$, karena γ tertutup terhadap homomorfisma. Ketika $I \nsubseteq K$, maka $0 \neq (I + K)/K \lhd A/K$ dan $(I + K)/K \cong I/(I \cap K) \in \gamma$, karena γ tertutup terhadap homomorfisma, maka A/K mempunyai ideal tak nol di γ. Dan Kondisi $(\boldsymbol{R_2})$menjamin$A \in \gamma$.

Konstruksi radikal atas ditunjukkan oleh teorema di bawah ini.

Teorema 10

Jika diketahui kelas ring ϱ merupakan kelas reguler. Kelas
$\mathcal{U}\varrho = \{A | A \text{ tidak mempunyai peta homomorfisma taknol di } \varrho\}$
Merupakan kelas radikal dengan sifat$\mathcal{U}\varrho \cap \varrho = \{0\}$.dan $\mathcal{U}\varrho$ merupakan radikal terbesar.

Bukti
Jika A mempunyai peta homomorfisma tak nol di B sehingga B tidak mempunyai ideal taknol di $\mathcal{U}\varrho$, maka A tidak mungkin ada di $\mathcal{U}\varrho$. Jika B ada, dan B tidak di $\mathcal{U}\varrho$, dan B harus mempunyai peta homomorfisma taknol D di ϱ. Kemudian $A \longrightarrow B \longrightarrow D$ sehingga mengimplikasikan peta homomorfima taknol A ada di ϱ, akibatnya A tidak di $\mathcal{U}\varrho$. Hal ini kontradiksi dengan $(\boldsymbol{R_1})$. Diasumsikan A tidak di $\mathcal{U}\varrho$, maka A mempunyai peta homomorfisma taknol D di ϱ. Karena ϱ merupakan kelas regular, maka untuk setiap ideal tak nol D mempunyai peta homomorfisma taknol di ϱ. Hal ini kontradiksi. Dengan demikian $\mathcal{U}\varrho$ radikal. Misalkan γ radikal dan $\gamma \cap \varrho = \{0\}$. Jika $\gamma \nsubseteq \mathcal{U}\varrho$, maka harus ada ring A di γ tetapi tidak di $\mathcal{U}\varrho$. Kemudian A mempunyai peta homomorfisma taknol di $\mathcal{U}\varrho$, akan tetapi peta homomorfisma ini harus di γ. Hal ini kontradiksi, jadi $\gamma \subseteq \mathcal{U}\varrho$ dan $\mathcal{U}\varrho$merupakan radikal terbesar dengan sifat $\mathcal{U}\varrho \cap \varrho = \{0\}$. ■

Contoh 11.
Aplikasi kontruksi radikal atas di atas dapat digunakan untuk menentukan radikal atas dari $\mathcal{M}$ kelas ring sederhana dengan unit. Kelas radikal atas ini dinotasikan dengan $\mathcal{G} = \mathcal{UM}$. Perhatikan bahwa $\mathcal{UM} = \{A | A \text{ tidak mempunyai peta homomorfisma taknol di } \mathcal{M}\}$. Kelas $\mathcal{UM} \neq \{\emptyset\}$, karena terdapat ring $R = \{0_R\}$ sehingga R tidak mempunyai peta homomorfisma taknol yang merupakan ring sederhana. Kelas radikal ini disebut dengan radikal Brown-McCoy, Gardner dan Wiegandt [4] .

Pada penjelasan sebelumnya, telah dibahas tentang motivasi adanya radikal dalam teori ring beserta dengan dua kontruksi radikal yang banyak digunakan. Perhatikan bahwa dari kelas-kelas radikal yang ada, ada beberapa kelas radikal yang secara struktur nyata. Diantaranya adalah

1. Radikal prima,

2. Radikal Jacobson,
3. Radikal Brown-McCoy
4. Radikal Nil, dan
5. Radikal von Neumann beraturan.

Dari kelima contoh di atas, untuk saat ini ada tiga kelas radikal ring yang strukturnya digeneralisasikan dalam teori modul. Tiga radikal tersebut adalah Radikal Nil (*Baer's Lower Nil Radical of Module)*, Radikal Prima (*Prime Radical of Modules)* dan Radikal Jacobson (*Jacobson Radical Of Modules)*. Selanjutnya akan dibahas radikal prima, dan radikal Jacobson dari suatu modul.

4 Radikal dari Modul

Perhatikan bahwa pembahasan sebelumnya, definisi modul prima termotivasi oleh definisi ring prima. Begitu juga dengan definisi radikal prima dari modul yang didefinisikan sebagai berikut. Diketahui MR −modul, spectrum M yang dinotasikan oleh $spec(M)$ dan didefinisikan oleh $spec(M) = \{P|P\text{submodul prima } M\}$. Kemudian radikal prima M dinotasikan dengan $rad(M)$ didefinisikan oleh $rad(M) = \bigcap\{P|P \in spec(M)\}$. Di lain pihak, Radikal Jacobson dari M dinotasikan dengan $J(M)$ dan didefinisikan oleh $J(M) = \bigcap\{N|N \text{ ideal maksimal } M\}$. Beberapa penelitian telah menunjukkan bahwa radikal nil (*Baer's Lower Nil Radical of Module)* sama degan radikal prima (*Prime Radical Of Module*s), salah satunya adalah Ssevviiri [9].

Teorema 12.
Untuk setiap homomorfisma modul $f: M \to N$ berlaku

1. $f(J(M)) \subset J(N)$
2. $J(J/J(M)) = 0$
3. Jika $\ker f \subset J(M)$, maka $f\big(J(M)\big) = J(f(M))$.

Bukti
Anderson dan Fuller [1]. ■

Ada berbagai macam generalisasi dari ideal prima dari suatu ring prima. Yang paling terkenal adalah generalisasi yang dilakukan oleh Launs [4].Adanya radikal prima dari suatu modul, memotivasi eksistensi radikal prima dari suatu submodul dari modul yang diberikan. Hal ini dilakukan oleh Sarac dam Tiras [10]. Jika diberikan $M\,R$ −modul, dan $N \leq M$, radikal prima N di M dinotasikan dengan $rad_M(N)$ dan didefinisikan oleh $rad_M(N) = \bigcap\{P|P \in spec(M)$ dan $N \subseteq P\}$. McCasland dan Moore (1991) mendefinisikan amplop dari N submodul M, dinotasikan dengan $E_M(N)$, $E_M(N) = \{rm|r \in R$ dan $m \in M$ sehingga $r^k m \in N$ untuk k bilangan asli lebih dari sama dengan $1\}$. Perhatikan bahwa untuk setiap submodul N berlaku $E_M(N) \subseteq rad_M(N)$, akan tetapi belum tentu sebaliknya. Hal ini memotivasi munculnya definisi submodul yang memenuhi formula radikal. Kemudian N disebut memenuhi formula radikal jika $rad_M(N) = E_M(N)$. Selanjutnya, jika setiap submodul MR −modul memenuhi formula radikal, maka M disebut modul yang memenuhi formula radikal.

SR −modul disebut sekunder jika $S \neq 0$ dan untuk setiap $r \in R$ berlaku $rS = S$ atau terdapat n bilangan asli sehingga $r^n S = 0$.Diketahui MR −modul, representasi sekunder dari M adalah

$$M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

Dengan S_i submodul sekunder untuk setiap $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$. Modul M disebut terepresentasi jika mempunyai representasi sekunder.

Contoh 13.
1. Jika setiap ideal prima ring R merupakan ideal maksimal, maka setiap modul yang didefinisikan atas R memenuhi formula radikal,
2. Setiap modul terepresentasi atas ring komutatif dengan identitas memenuhi formula radikal (Sarac dan Tiras [10]).

5 Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Radikal prima dari suatu ring dapat digeneralisasikan dalam teori modul, bahkan dalam teori modul sendiri dapat dikembangkan menjadi bahasan tentang formula radikal.

5.2 Saran

Perlu dikaji lebih lanjut, contoh modul yang memenuhi formula radikal. Selain itu juga diberikan contoh sehingga meyakinkan bahwa $E_M(N) \subseteq rad_M(N)$, untuk setiap N submodul M R $-$modul. Selain itu penelitian juga dapat dilanjutkan untuk mengkaji M $-$prime radikal, dan M $-$Baser's Lower Nil Radikal. Salah satu penelitian tentang ini adalah dalam Beachy, dkk [3]

Daftar Pustaka

[1] Anderspn, Frank W and Kent R. Fuller, *Ring And Categories Of Modules*, Springer-Verlag, 1992.

[2] Amitsur, S. A,"General Theory of Radicals I, Radicals in Complete lattices", *Amer.J.Math.* 74, 774-786, 1952.

[3] Beachy, J.; M. Behboodi, and F. Yazdi,"Prime M-ideals, M-Prime Submodules, M-Prime Radical and M-Baer's Lower Nil Radical",*Journal Korean Math. Soc*. 50, No. 0, pp.1-,2013.

[4] Dauns, J, "Prime Modules", *J. Reine Angew. Math*, 298, 156-181, 1978.

[5] Gardner, B.J and R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*, Marcel Dekker, Inc, 2004.

[6] Koethe, G,"Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal Vollstandig reduzibel ist", *Math. Zeitschr*. 32, 161-186, 1930.

[7] Kurosh, A.G, "Radicals of rings and algebras", *Mat. Sb*. 33, 13-26, 1953 (Bahasa Rusia) yang diterjemahkan ke Bahasa Inggris dalam *Coll. Math. Soc. J. Bolyai 6, Rings, Modules, and radicals, Keszthely, North Holland*, pp. 297-312, 1973.

[8] Levitzki, Jakob"Prime Ideals And The Lower Radical",*American Journal of Mathematics Vol.* 73. No.1, 1951.

[9] Ssevviiri, David, *On Prime Modules and Radicals Of Modules*, Dissertation, 2011.

[10] Saras, Bulent dan Yucel Tiras,"On Modules Which Satisfy The Radical Formula",*Turk J Math.* 37 : 195 – 201, 2013.

[11] Tangeman, R and D. Kreiling, "Lower Radicals In NonAssociative Rings", *J. Austral. Math. Soc.*14, 419-423,1972.