ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESISMODEL REGRESI BURRTIGA PARAMETER TIPE XII

Rizwan Arisandi[1], Purhadi[2]
[1,2]Jurusan Statistika FMIPA ITS
Surabaya, Indonesia 16680
E-mail:
1 rizwanarisandi@rocketmail.com 2 purhadi@statistika.its.ac.id

Abstrak

Analisis regresi adalah metode statistik yang berguna untuk memeriksa dan memodelkan hubungan diantara variabel-variabel respon dan prediktor. Model regresi pada umumnya dibangun berdasarkan asumsi bahwa data mengikuti distribusi Normal, namun terbatasnya jumlah data dalam analisis dan pemodelan data statistika membuat asumsi kenormalan tidak tepat digunakan karena mungkin saja distribusi data bersifat menceng (asimetri) dan bahkan bisa juga berekor lebih tebal atau berekor lebih tipis dari distribusi normal (neo normal). Ada beberapa distribusi data yang relaksasinya mampu menangkap pola kemencengan dan ketebalan pada ekor datanya salah satunya adalah distribusi Burr.Ketika pola data menceng atau berekor tebal, pemodelan dan pengolahan data harus dilakukan secara hati-hati. Analisis klasik terutama dengan inferensi statistiknya terhadap parameter model tidak akan memberikan hasil yang lebih baik, oleh sebab itu distribusi Burr dirancang utuk mengatasi pola data yang sedikit miring atau tidak simetri karena distribusi ini didesain sebagai distribusi yang fleksibel dan adaptif. Untuk estimasi parameter regresi Burr menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE), namun hasil yang diperoleh tidak *close form* sehingga secara numerik digunakan metode iterasi *Newton-Raphson*. Dalam pengujian hipotesis menggunakan *maksimum likelihood Ratio test* (MLRT). Uji yang digunakan adalah uji serentak dan parsial yang dilakukan dengan statistik uji yang berdistribusi *chi-square*. Penelitian ini mengkaji estimasi parameter dan uji hipotesis model regresi Burr tiga parameter tipe XII. Hasil penelitian pada estimasi parameter dibawah populasi yaitu $\theta = [\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_J]$, λ, β dan parameter di bawah H_0 yaitu λ, β serta perbandingkan nilai *lnlikelihood* di bawah H_0 dengan *lnlikelihood* di bawah populasi atau dengan perumusan $\ln\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$, pada pengujian hipotesis.

Kata Kunci*: distribusi Burr tiga parameter tipe XII, model regresi Burrmaximum likelihood estimation(MLE)*

Abstract

Regression analysis is a statistical method that is useful to examine and model the relationship between the variables and predictors of response. Regression models are generally built on the assumption that the data follow the normal distribution, but the limited amount of data in statistical analysis and data modeling makes the assumption of normality is not appropriate to be used as the data might be skewed distribution (asymmetry) and that it is also a tail thicker or thinner tailed from a normal distribution (neo normal). There are several relaxation data distribution is able to capture the pattern of skewness and the thickness of the tail *of the distribution of the data one is Burr. When the data pattern is skewed or heavy-tailed, modeling and data processing must be done carefully. Classical analysis of the statistical inference, especially with the model parameters will not give better results, and therefore the distribution of weeks to resolve Burr designed data patterns slightly slanted or symmetry because this distribution is designed as a flexible and adaptive distribution. Burr regression for parameter estimation using the method of maximum likelihood estimation (MLE), but the results are not so numerically close form used Newton-Raphson iteration method. In the hypothesis testing using maximum likelihood ratio test (MLRT). Test used is the simultaneous and partial test statistics were performed with chi-square distribution. This study examines the parameter estimation and hypothesis testing Bur regression models with three-parameter of type XII .The results of the study on the population is*$\theta=[\theta_0,\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_J],\lambda,\beta$ *below the parameter estimates and the parameters under* H_0 *Which* λ, β*,and the comparison with the value lnlikelihood under population or to the formulation* $\ln\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$*, the test hypothesis.*

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah metode statistik yang berguna untuk memeriksa dan memodelkan hubungan diantara variabel-variabel respon dan predictor Gujarati (2004).Analisis terhadap distribusi data adalah bidang analisis yang paling penting dalam statistika, terbatasnya jumlah data dalam analisis dan pemodelan data statistika membuat asumsi kenormalan tidak tepat digunakan.Secara analitik asumsi non-normalitas sering dihadapi dan sulit untuk memilih representasi distribusi yang mampu mewakili bentuk standar yang tepat dan memenuhi kaidah yang diharuskan dalam analisis.

Model regresi pada umumnya dibangun berdasarkan asumsi bahwa data mengikuti distribusi Normal, tapi pada praktiknya secara empirik, asumsi ini tidak selalu tepat karena mungkin saja distribusi data bersifat menceng (asimetri) dan bahkan bisa juga berekor lebih tebal atau berekor lebih tipis dari distribusi normal (neo normal). Ada beberapa distribusi data yang relaksasinya mampu menangkap pola kemencengan dan ketebalan pada ekor datanya salah satunya adalah distribusi Burr. Pola data memiliki skewness dan kurtosis yang berbeda dengan distribusi normal, dengan kata lain, data ini mengikuti distribusi yang berekor tebal (heavy-tailed distribution) distribusi Burr, Burr (1942). Oleh sebab itu apabila data dianalisis sesuai dengan karakteristik data aslinya akan mampu memberikan informasi yang lebih baik dari data tersebut, dibandingkan apabila data harus dianalisi dengan cara menyesuaikan datanya untuk memenuhi asumsi yang di syaratkan dalam teori analisisnya.

Ketika pola data menceng atau berekor tebal, pemodelan dan pengolahan data harus dilakukan secara hati-hati. Analisis klasik terutama dengan inferensi statistiknya terhadap parameter model tidak akan memberikan hasil yang lebih baik, oleh sebab itu distribusi Burr dirancang utuk mengatasi pola data yang sedikit miring atau tidak simetri karena distribusi ini didesain sebagai distribusi yang fleksibel dan adaptif, dengan demikian pendekatan yang lebih efisien dan tidak memerlukan penormalan data dapat diperoleh Williams (1959).

Persamaan regresi yang digunakan untuk membuat taksiran mengenai nilai variabel terikat disebut persamaan regresi estimasi, yaitu suatu formula matematis yang menunjukkan hubungan keterkaitan antara satu atau beberapa variabel yang nilainya sudah diketahui dengan satu variabel yang nilainya belum diketahui.Sifat hubungan antar variabel dalam persamaan regresi merupakan hubungan sebab akibat.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam penaksiran parameter regresi yaitu maximum likelihood methods, noniterative weighted least square, dan discriminant fungtion analysis methods. Salah satu metode yang lebih umum dan digunakan sebagian besar paket program computer adalah maximum likelihood estimation (MLE).Metode ini dapat digunakan untuk menaksir nilai parameter bila distribusi populasi diketahui, oleh sebab itu metode ini digunakan untuk mengestimasi parameter pada regresi Burr.

Beberapa penelitian yang membahas tentang distribusi Burr telah dilakukan.Distribusi Burr pertama kali di perkenalkan oleh Burr (1942). Dubey (1972, 1973)membahas kegunaan dan sifat-sifat distribusi Burr duaparameter (c,k) sebagai suatu model kegagalan, Evans danSimons (1975) membahas lebih lanjut sifat-sifat distribusiBurr (c,k) sebagai suatu model kegagalan dan mereka jugamenurunkan maksimum likelihood estimator (MLE),pemodelan regresi linier pada data radiate pine compressivestrength yang digunakan dalam Williams (1959), data returnsaham harian Abbey National yang digunakan dalam Buckle

(1995) dan Fernandez (1998).Berdasarkan paparan penelitian di atas padapenelitian ini mencoba mengkaji tentang estimasiparameter dengan metode maksimum likelihoodestimation (MLE) dan pengujian hipotesis dengan metode (MRLT) pada model regresi Burr tiga parameter tipe XII.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Dalam statistika regresi berarti metode untuk menduga nilai-nilai dalam suatu set data berdasarkan nilai satu atau atau lebih data yang lain. Nilai yang diduga disebut variabel respon atau variabel tak bebas biasanya disimbolkan dengan (Y) dan nilai yang digunakan untuk menduga disebut variabel prediktor atau variabel bebas biasanya disimbolkan dengan (X), Draper & Smith (1981).Bentuk umum dari persamaan regresi linier sederhana adalah.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_n X_n + \varepsilon \qquad (1)$$

dimana:

$\beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \beta_3 , \ldots, \beta_p$	adalah parameter model
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$	adalah variabel bebas
ε	adalah error

atau dalam bentuk matriks ditulis

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \text{ dimana} \varepsilon \sim \mathrm{N}\,(0,\sigma^2 I) \qquad (2)$$

Estimasi koefisien regresi β_p dapat menggunakan Metode Kuadrat Terkecil. Metode estimasi ini dilakukan dengan meminimumkan $\varepsilon^{'}\varepsilon$ terhadap β_p dan dan menyamakannya dengan nol sehingga diperoleh estimator,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{'}\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

Dalam analisis regresi linier, sasaran utama kita adalah menjelaskan perilaku suatu variabel (yakni, variabel tak bebas) sehubungan dengan perilaku satu atau lebih variabel lain (dalam hal ini, variabel bebas), dengan memperhitungkan fakta bahwa hubungan antara semua variabel tersebut bersifat tidak pasti, Gujarati (2004).

2.2 Distribusi Burr

Distribusi Burr pertama kali diperkenalkan oleh‘Irving W. Burr” pada tahun 1941. Mengingat yang berhubungan dengan fungsi kepadatan mempunyai bentuk variasi yang luas, system ini sanagat berguna untuk memperkirakan histogram, khususnya ketika struktur matematika yang sederhana untuk fungsi distribusi komulatif (cdf) yang cocok dibutuhkan. Penggunaan lain termasuk simulasi, memperkirakan distribusi, dan membentuk kurva yang tidak normal. Sejumlah teori standar tentang distribusi adalah bentuk terbatas dari distribusi Burr.

Fungsi $g(x,y)$ harus positif untuk $0 \leq y \leq 1$ dan x sebagai pendukung $F(x)$. Perbedaan memiliki nilai $g(x,y)$ memunculkan beberapa pemecahan masalah yang berbeda-beda dari $F(x)$; misalkan ketika $g(x,y) = g(x)$

$$F(x) = \left\{\exp\left[\int_{-\infty}^{x} g(u)\ du\right] + 1\right\}^{-1} \quad (3)$$

Penyelesaiandari $F(x)$; menggunakan persamaan diferensial dari Burr dapat diklasifikasikan berdasarkan bentuk fungsinya, yang setiap fungsi tersebut membentuk tipe cdf distribusi Burr. Diantar tipe-tipe ini, tipe XII adalah fungsi yang paling menarik untuk membuat model statistic dan yang dipelajari atau dijelaskan secara rinci oleh Burr. Fungsi kepadatan peluamh (pdf) dari distribusi Burr tipe XII dengan tiga parameter didefinisikan oleh Beirlant. J (1998) sebagai berikut:

$$Y_i |\ x_i \sim Burr\ (\beta, \lambda, \tau_i),$$
$$f_y(y) = \frac{\lambda\, \beta^{\lambda} \tau\, y^{\tau-1}}{\left(\beta + y^{\tau}\right)^{\lambda+1}} \quad \text{untuk } y > 0 \qquad (4)$$

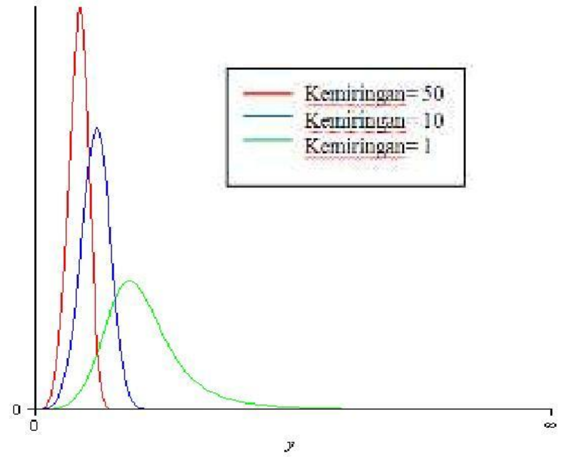
dengan mean,

$$E(y) = \lambda\, \beta^{\frac{1}{\tau}} \int_{0}^{\frac{c^{\tau}}{(\beta+c^{\tau})}} w^{\frac{1}{\tau}} (1-w)^{\frac{\lambda-1}{\tau-1}}\, dw + c\left(\frac{\beta}{\beta + c^{\tau}}\right)^{\lambda} \qquad (5)$$

sehingga bentuk tipe cdf distribusi Burr dengan dengan tiga parameter yaitu:

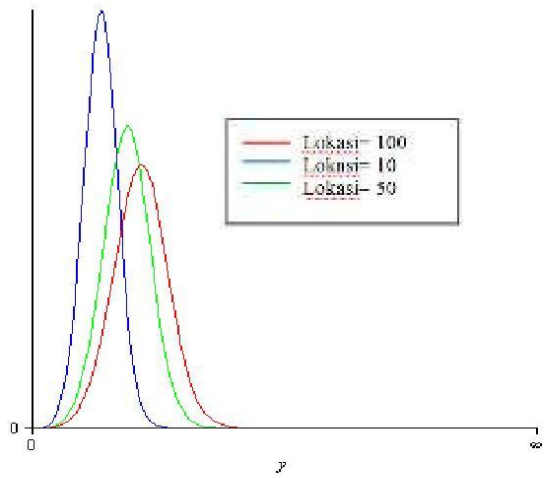
$$F_y(y) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + y^{\tau}}\right)^{\lambda} \quad \text{untuk } y > 0 \qquad (6)$$

Berikut adalah kurva distribusi Burr tiga parameter pada Gambar 2.1, 2.2, dan 2.3Berikut adalah kurva distribusi Burr tiga parameter ditunjukan pada Gambar 2.1, 2.2, dan 2.3



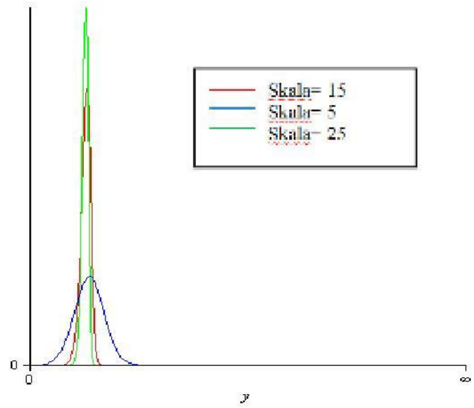
Gambar 2.1 Bentuk kurva distribusi Burr 3 parameter dengan berbagai macam nilai λ

Gambar 2.1 diatas merupakan kurva fungsi kepadatan peluang distribusi Burr 3 parameter dengan nilai parameter lokasi (β) dan parameter skala (τ) yang tetap untuk berbagai macam nilai parameter kemiringan (λ). Semakin kecil nilai λ bentuk kurva dari distribusi Burr 3 parameter akan semakin miring menceng ke kanan dan ekor kurva semakin menebal.



Gambar 2.2 Bentuk kurva distribusi Burr 3 parameter dengan berbagai macam nilai β

Gambar 2.2 diatas merupakan kurva fungsi kepadatan peluang distribusi Burr 3 parameter dengan nilai parameter kemiringan (λ) dan parameter skala (τ) yang tetap untuk berbagai macam nilai parameter lokasi (β). Semakin besar nilai β maka bentuk kurva distribusi Burr 3 parameter akan semakin bergeser ke kanan.



Gambar 2.3 Bentuk kurva distribusi Burr 3 parameter dengan berbagai macam nilai τ

Gambar 2.3 diatas merupakan kurva fungsi kepadatan peluang distribusi Burr 3 parameter dengan nilai parameter kemiringan (λ) dan parameter lokasi (β) yang tetap untuk berbagai macam nilai parameter skala (τ). Semakin kecil nilai τ maka bentuk kurva dari distribusi Burr 3 parameter akan semakin landai.

Melalui kurva distribusi Burr diatas diperoleh kesimpulan bahwa distribusi tersebut mampu mengakomodasi adanya fiksibilitas kemiringan dan menangkap ketebalan dan ketipisan pada ekor yang mana pola datanya tidak sesuai dengan distribusi normal.

2.3 Model Regresi Burr Tiga Parameter Tipe XII

Model regresi Burr tiga parameter tipe XII dituliskan pada persamaan berikut Beirlant.J (1998).

$y_i \mid x_i \sim Burr\ (\beta,\lambda,\tau_i)$

$\boldsymbol{\tau_i = \exp\left(\theta' x_i\right)}$

dengan X adalah variable bebas atau variable prediktor yang dinotasikan dengan

$\mathbf{x_i = \left[x_{1i}\ ,\ x_{2i}\ ,\ ...,\ x_{ki}\right]}$

θ adalah parameter regresi Burr yang dinotasikan sebagai berikut:

$y_i \ \ x_i \sim Burr\ (\beta,\lambda,\tau_i)$

$\theta = \left[\theta_0\ ,\ \theta_1\ ,\ ...,\ \theta_{\ ki}\right]$

Berdasarkan definisi fungsi kepadatan peluang distribusi Burr tiga parameter yaitu:

$$f_y(y) = \frac{\lambda\ \beta^{\lambda}\ \tau\ y^{\tau-1}}{(\beta+y^{\tau})^{\lambda+1}}$$

maka fungsi likelihood dari sampel berukuran n sampel pengamatan diberikan oleh:

$$L(\Omega) = \prod f(y_i)$$

dan logaritma fungsi likelihood diberikan oleh:

$$\ln L(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i)$$

dari fungsi LnLikelihood pada persamaan di atas dapat diperoleh turunan pertama untuk masing-masing parameter dalam model regresi Burr tiga parameter namun persamaan tersebut kemungkinan tidak dapat diselesaikan secara analitis untuk mendapatkan hasil eksplisit untuk estimator maksimum likelihood (MLE). Namun dapat diselesaikan secara numerik, misalnya dengan prosedur Newton-Raphson.

Turunan parsial urutan kedua dari fungsi LnLikelihood selanjutnya digunakan untuk membentuk suatu matriks Hessien (H) yang berisi turunan parsial kedua dari fungsi LnLikelihood tersebut. Matriks Hessien inilah yang selanjutnya digunakan dalam proses iterasi Newton-Raphson. Dengan H, adalah matriks yang berukuran $(j + 3)\, x\, (j + 3)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0 \partial \theta_j} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0 \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_0 \partial \lambda} \\ & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1 \partial \theta_j} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1 \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_1 \partial \lambda} \\ & & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2 \partial \theta_j} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2 \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_2 \partial \lambda} \\ & & & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_j^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_j \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \theta_j \partial \lambda} \\ & \text{Simetri} & & & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta \partial \lambda} \\ & & & & & \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}$$

2.4 Pengujian Distribusi Data

Uji goodness of fit distribusi data variabel dependen dapat dilakukan dengan beberapa pendekatan antara lain uji Kolmogorov Smirnof, uji Anderson- darling, dan Uji Chi-Square. Menurut Stephens (1974), uji Anderson Darling digunakan sebagai uji kenormalan atau kebaikan sesuai (goodness offit) untuk variabel kuantitatif.

Anderson Darling Test bisa digunakan untuk menguji kenormalan berbagai macam sebaran data yang berdistribusi kontinu dan berlaku untuk sembarang ukuran sampel (n), pengujian tersebut digunakan untuk mengetahui distribusi yang paling sesuai (Law dan Kelton, 2000). Berikut adalah statistik ujinya:

Statistik uji :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)[\ln F(y_i) + \ln(1 - F(y_{n+1-i}))] \qquad (6)$$

dengan uji hipotesis yang digunakan adalah

H0: data Y adalah variabel random independen yang berdistribusi sesuai dengan distribusi F(y),

H1 : data Y adalah variabel random independen yang tidak berdistribusi sesuai dengan distribusi F(y),

Daerah penolakan H0: Tolak H0 jika *nilai A>AD*

Dimana AD adalah nilai dari tabel Anderson Darling, *F* merupakan fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari distribusi tertentu serta *yi* merupakan data yang telah diurutkan.Semakin kecil nilai statistik Anderson-Darling yang diperoleh maka data mengikuti distribusi tertentu.

2.5 Metode Estimasi Parameter

Bermacam- macam metode yang dapat digunakan untuk pengaplikasian distribusi Burr pada data frekuensi salah satunya adalah metode Maximum likelihood estimator (MLE).Sebagai tambahan untuk mengaplikasikan data frekuensi.Distribusi Burr sangat bermanfaat dalam penyelesaian sebuah problema statistik dimana kelas distribusi dengan penyederhanaan fungsi dan bentuk kepadatan yang berbeda-beda dibutuhkan.Sebagai ilustrasi mengingat distribusi Burr tipe XII dapat dibalik dalam bentuk tertutup maka dapat digunakan dalam pekerjaan simulasi dan memperkirakan distribusi secara teori yang momen-momennya diketahui, tetapi bentuk-bentuk fungsinya tidak dapat dinyatakan secara langsung.

2.6 Maximum Likelihood Estimator

Salah satu metode paling popular dalam memperoleh suatu estimator jika distribusi data diketahui adalah maximumlikelihood yang di defenisikan sebagai berikut.

Definisi:

Bain dan Engelhardt, (1992). Misalkan Y1 , Y2,, Y3, …,Yn adalah sampel random iid dari popolasi dengan pdf f(y/ λ1, λ2, λ3, …, λn) maka fungsi likelihood adalah:

$L(\lambda/y) = L(\lambda 1, \lambda 2, \lambda 3, \ldots, \lambda n|\ Y1, Y2, Y3, \ldots, Yn) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$

Definisi:

Estimator $\lambda = \lambda\ (Y_1, Y_2, \ldots Y_N)$ disebut MLE dari λ jika $L(\lambda|y) = \sup(\lambda|\ Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_N)$, λ elemen dari Ω.

Bila fungsi likelihood terdeferensilkan dalam λ maka nilai dari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ diperoleh dengan menyamakan turunan parsial dari fungsi kemungkinan atau fungsi logaritmanya atau logaritma naturalnya dengan nol dan mencari akar-akar dan syarat pencapaian maximum diuji dengan turunan keduanya.Dalam kasus turunan parsial tidak memiliki penyelesaian, maka estimator maximum likelihoodnyadiperoleh melalui argumentasi.

Maximum likelihood estimator (MLE) dari parameter λ, β, dan θ yang berdasarkan pada sampel berukuran N, yang berdistribusi Burr (λ, β, dan θ) tipe XII dengan tiga parameter yang tidak diketahui, mempunyai fungsi kepadatan peluang (pdf) dalam bentuk:

$f_y(y) = \frac{\lambda\, \beta^{\lambda}\ \tau\ y^{\tau-1}}{(\beta + y^{\tau})^{\lambda+1}}$ untuk $y > 0$ dengan $\tau_i = \exp(\theta' x_i)$ dan fungsi distribusi kumulatif (cdf) dalam bentuk:

$F_y(y) = 1 \left(\frac{\beta}{\beta + y^{\lambda}}\right)^{\lambda}$ untuk $y > 0$ adalah:

$$L(\lambda, \beta, \theta|y) = \lambda^n \beta^{n\lambda} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \theta' x_i\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{y_i^{\exp(\theta' x_i)} - 1}{\left[\beta + y_i^{\exp(\theta x_i)}\right]^{\lambda+1}}$$

dan

$$\ln L(\lambda, \beta, \theta|y) = n \ln(\lambda) + n\lambda \ln(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} [\exp(\theta' x_i) - 1] \ln(y_i) - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right] \quad (7)$$

2.7 Metode Newton Raphson

Apabila langkah mengestimasi parameter menggunakan metode maksimum likelihood menghasilkan persamaan yang tidak closed form, maka penyelesaiaan persamaan tersebut untuk memperoleh nilai estimasi parameternya digunakan metode newton raphson (Rao, 1997). Metode newton raphson adalah salah satu metode untuk mencari akar penyelesaian dari f(x) = 0 melalui perhitungan yang iterative, sehingga lebih mudah jika dikerjakan dengan bantuan program computer.

Menurut chapra dan canale (1988) didasarkan pada deret taylor sebagai berikut.

$$f(\theta_{i+1}) = f(\theta_i) + f'(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) + \frac{f''(\theta_i)}{2!}(\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^n(\theta_i)}{n!}(\theta_{i-1} - \theta_i)^n \qquad (8)$$

Persamaan likelihood dengan parameter θ dapat diselesaikan sehingga memperoleh nilai estimator $\hat{\theta}$ dengan menggunakan metode newton raphson. Rumus estimasi untuk parameter $\hat{\theta}$ pada iterasi ke- (t+1) dalam proses iterasi (t = 0, 1, 2, …) dituliskan dalam teorema sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_t - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}_t)^{-1}\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\theta}_t)$$

dimana:

θ_{t+1} = estimasi parameter θ pada iterasi ke- (t+1)
θ_t = estimasi parameter θ pada iterasi ke t
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\theta})$ = matriks turunan pertama dari fungsi likelihood
sehingga entri dari d(θ) adalah $d(\theta_t) = \frac{dL(\theta)}{d\theta}$

D (θ) = matriks turunan kedua fungsi likelihood ataumatriks Hesian sehingga entri dari D (θ) adalah $D(\theta_t) = \frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2}$

Menurut Montgomery dan peck (1992), prosesiterasi dengan menggunakan metode newton raphsonsehingga didapatkan nilai $\hat{\theta}$ yang konvergen yaitu sampai $\left|\frac{\hat{\theta}_{(t+1)} - \hat{\theta}_t}{\hat{\theta}_t}\right| < \delta$, dengan δ bilangan yang sangat kecil tetapi > 0.

2.8 Pengujian Hipotesis

Uji Hipotesis adalah metode pengambilankeputusan yang didasarkan dari analisa data.Keputusandari uji hipotesis hampir selalu dibuat berdasarkanpengujian hipotesis nol. Pengujian statistik ini untukmenjawab pertanyaan yang mengasumsikan hipotesis noladalah benar dan digunakan untuk menentukan apakahvariabel yang terdapat dalam model memiliki kontribusiyang nyata dengan variabel responnya.Pengujian hipotesisini selanjutnya dilakukan dengan pengujian hipotesis secaraserentak dan secara parsial.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Pada bagian ini akan disajikan langkah langkahdalam menyelesaikan masalah penelitian guna untukmencapai tujuan penelitian yaitu menentukan penaksirparameter regresi burr, menentukan statistik uji padapengujian hipotesis model regresi burr.

Metode AnalisisUntuk menyelesaikan penelitian ini dilakukanlangkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan parameter pada model regresi burr denganmetode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

Tahapan penaksiran parameter:

a. Menetapkan fungsi likelihood dibawah populasi.

b. Menetapkan logaritma natural dari fungsi likelihood $\ln L(\Omega)$.

c. Mencari turunan parsial pertama dari fungsilogaritma natural likelihood dibawah populasi.

d. Mencari turunan parsial kedua dari fungsi logaritmanatural likelihood dibawah populasi.

e. Menentukan penaksiran parameter dengan metodeiterasi Newton-Raphson.

2. Menguji hipotesis pada model regresi burr denganmenggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

Tahapan pengujian hipotesis yang dilakukan.

Pengujian serentak:

i. Menetapkan hipotesis

$H_0 : \theta_1 = \cdots = \theta_j = 0$

H_1 : minimal ada satu $\theta_j \neq 0$

ii. Membuat himpunan parameter dibawah populasi (Ω)

$\Omega = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \alpha, \beta\}$

iii. Membuat himpunan parameter di bawah H_0 (ω)

$\omega = \{\alpha, \beta\}$

iv. Menerapkan fungsi likelihood di bawah populasi

$$L(\Omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_y(y_i)\right)$$

v. Menerapkan fungsi likelihood di bawah H_0

$$L(\Omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_y(y_i)\right)$$

vi. Menentukan penaksir parameter dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan dengan metode iterasi Newton-Rapson sehingga diperoleh $(\hat{\Omega})$dan $(\hat{\omega})$

vii. Menentukan $L(\hat{\Omega})=\max_{\Omega} L(\Omega)$ dan $L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$

viii. Mencari rasio likelihood $\frac{L(\hat{\Omega})}{L(\hat{\omega})}$

ix. Menentukan daerah penolakan hipotesis p

Pengujian pasrsial

i. Menentukan hipotesis

$H_0 : \theta_j = 0$

$H_1 : \theta_j \neq 0$

ii. Menentukan Statistik Uji

$$W = \frac{\hat{\theta}_j^2}{\mathrm{var}(\hat{\theta}_j)} \sim \chi^2_{\alpha,1}$$

iii. Menentukan daerah penolakan hipotesis

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas estimasi parameter distribusi Burr 3 parameter tipe XII dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Estimation (MLE). Parameter yang akan diestimasi antara lain : adalah parameter skala bentuk dan lokasi.

4.1 Estimasi Parameter Distribusi Burr 3 Parameter Tipe XII

Untuk memperoleh penaksir parameter danstatistik uji pada pengujian hipotesis model regresi Burrhal utama yang dilakukan dalam mengestimasi parameterdengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)adalah memaksimumkan fungsi likelihood yangmerupakan fungsi peluang bersama dari y1, y2, ..., yn.Berikut adalah *Probability* Distribution Function (PDF)untuk distribusi Burr.

Langkah pertama yang dilakukan adalahmembentuk fungsi likelihood dari n sampel y1, y2, ..., yn.untuk setiap fungsi dari distribusi Burr, sehingga fungsilikelihood yang diperoleh adalah.

$$L(\Omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i)\right)$$

$$L(\Omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda\,\beta^{\lambda}\,\tau\,y_i^{\tau-1}}{(\beta + y_i^{\tau})^{\lambda+1}}\right) \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Langkah selanjutnya adalah membentuk fungsi log*likelihood* sehingga diperoleh

$$\log L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\lambda\,\beta^{\lambda}\,\tau\,y_i^{\tau-1}}{(\beta + y_i^{\tau})^{\lambda+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\log\left(\frac{\lambda\,\beta^{\lambda}\,\tau\,y_i^{\tau-1}}{(\beta + y_i^{\tau})^{\lambda+1}}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\lambda\,\beta^{\lambda}\,\tau\,y_i^{\tau-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} \log\left((\beta + y_i^{\tau})^{\lambda+1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log\lambda + \sum_{i=1}^{n} \log\beta^{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \log\tau + \sum_{i=1}^{n} \log y^{\tau-1} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\log(\beta + y_i^{\tau})$$

$$= n\log\lambda + n\lambda\log\beta + n\log\tau + \sum_{i=1}^{n} \log y^{\tau-1} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\log(\beta + y_i^{\tau})$$

Karena $\tau_i = \exp(\theta' x_i)$, maka fungsi log *likelihood* menjadi

$$= n\log\lambda + n\log\beta^{\lambda} + n\log(\exp(\theta' x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \log y^{\tau-1}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\log(\beta + y_i^{\tau})$$

$$= n\log\lambda + n\lambda\log\beta + n + \sum_{i=1}^{n} \log y^{\tau-1} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\log(\beta + y_i^{\tau})$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan penaksiran parameter pada model regresi Burr dengan cara mencari turunan pertama secara parsial terhadap masing-masing parameter yang diestimasi kemudian disamakan dengan nol. Turunan parsial pertama terhadap λ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \log L(\Omega)}{\partial \lambda}$$
$$= \frac{n \log \lambda + n\,\lambda \log \beta + n \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} (\exp(\theta' x_i) - 1) \log y_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)}{\partial \lambda}$$
$$= \frac{n}{\lambda} + n \log \beta - \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right) (10)$$

Turunan parsial pertama terhadap β adalah sebagai berikut

Turunan parsial pertama terhadap β adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial \log L(\Omega)}{\partial \beta}$$
$$= \frac{n \log \lambda + n\,\lambda \log \beta + n \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} (\exp(\theta' x_i) - 1) \log y_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)}{\partial \beta}$$
$$= \frac{n\lambda}{\beta} - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)^{-1} \qquad (11)$$

Turunan parsial pertama terhadap θ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial \log L(\Omega)}{\partial \theta}$$
$$= \frac{n \log \lambda + n\,\lambda \log \beta + n \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} (\exp(\theta' x_i) - 1) \log y_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)}{\partial \theta}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp(\theta' x_i) x_{ij}\right) \log y_i$$
$$- (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{\exp(\theta' x_i)} \log y_i}{\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}} \exp(\theta' x_i) x_{ij} \qquad (12)$$

dimana$j = 0, 1, 2, \dots, p - 1$

Berdasarkan persamaan (10), (11), dan (12) menunjukkan bahwa turunan pertama fungsi ln *likelihood*terhadap masing-masing parameter menghasilkan bentuktidak *closed form*, oleh karena itu tidak dapat dianalisis secaraanalitik, untuk mendapatkan hasil yang eksplisit sehinggaharus di iterasikan dengan menggunakan metode numerikyaitu metode *Newton-Raphson* untuk mendapatkan estimasiparameter. Persamaan iterasi *Newton-Raphson* adalah sebagaiberikut.

$$\theta_{t+1} = \theta_t - D(\theta_t)^{-1} d(\theta_t) (13)$$

Langkah pertama adalah membuat turunan kedua ln fungsi *likelihood* terhadap masing-masing parameter dan kombinasi masing-masing parameter untuk mendapatkan matriks Hesian Hasilnya sebagai berikut.

Turunan parsial kedua terhadap α adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \log L(\Omega)}{\partial \lambda^2} = \frac{n \log \lambda + n\,\lambda \log \beta + n \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} (\exp(\theta' x_i) - 1) \log y_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)}{\partial \lambda^2}$$

$$= -\frac{n}{\lambda^2} \quad (14)$$

Turunan parsial kedua terhadap β adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \log L(\Omega)}{\partial \beta^2} = \frac{n \log \lambda + n\,\lambda \log \beta + n \sum_{i=1}^{n} \theta' x_i + \sum_{i=1}^{n} (\exp(\theta' x_i) - 1) \log y_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)}{\partial \beta^2}$$

$$= -\frac{n\lambda}{\beta^2} - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \left(\beta + y_i^{\exp(\theta' x_i)}\right)^{-2} \quad (15)$$

Turunan parsial kedua terhadap θ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \log L(\Omega)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = \frac{\mathrm{n} \log \lambda + \mathrm{n}\,\lambda \log \beta + \mathrm{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i +}{\partial \theta_j \partial \theta_k}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (\exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i) - 1) \log \mathrm{y}_i - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log\left(\beta + y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i)}\right)}{\partial \theta_j \partial \theta_k}$$

$$\left(\frac{y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i)} \log \mathrm{y}_i}{\left[\beta + y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i)}\right]^2} \left[\beta \exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i) \log y_i + \beta + y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}' \mathbf{x}_i)}\right] \right) \quad (16)$$

dimana j,k=0,1,2,…,p-1

Turunan parsial pertama terhadap λ kemudian diturunkan lagi terhadap β adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \log L(\Omega)}{\partial\lambda\partial\beta} = \frac{\mathrm{n}\log\lambda + \mathrm{n}\,\lambda\log\beta + \mathrm{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i +}{\partial\lambda\partial\beta}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)-1)\log \mathrm{y}_i - (\lambda+1)\sum_{i=1}^{n}\log(\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)})}{\partial\lambda\partial\beta}$$

$$= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}(\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)})^{-1} \qquad (17)$$

Turunan parsial pertama terhadap λ kemudian diturunkan lagi terhadap θ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \log L(\Omega)}{\partial\lambda\partial\theta_j} = \frac{\mathrm{n}\log\lambda + \mathrm{n}\,\lambda\log\beta + \mathrm{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i +_i}{\partial\lambda\partial\theta_j}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)-1)\log \mathrm{y} - (\lambda+1)\sum_{i=1}^{n}\log(\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)})}{\partial\lambda\partial\theta_j}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)\,\frac{y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)}\log \mathrm{y}_i}{\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)}} \qquad (18)$$

Turunan parsial pertama terhadap β kemudian diturunkan lagi terhadap θ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \log L(\Omega)}{\partial\beta\partial\theta} = \frac{\mathrm{n}\log\lambda + \mathrm{n}\,\lambda\log\beta + \mathrm{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i +}{\partial\beta\partial\theta}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)-1)\log \mathrm{y}_i - (\lambda+1)\sum_{i=1}^{n}\log(\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)})}{\partial\beta\partial\theta}$$

$$= (\lambda+1)\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_{ij}(\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)\,\frac{y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)}\log \mathrm{y}_i}{\left[\beta+y_i^{\exp(\boldsymbol{\theta}'\mathbf{x}_i)}\right]^2} \qquad (19)$$

Selanjutnya mencari nilai $\hat{\theta}$yang konvergen yaitu sampai $\left|\frac{\hat{\theta}_{t+1}-\hat{\theta}_t}{\hat{\theta}_t}\right| < \delta$, dengan δ bilangan yang sangat kecil tetapi > 0.

4.2 Uji Hipotesis Model Regresi Burr 3 Parameter Tipe XII

Langkah selanjutnya yaitu melakukan pengujian hipotesis dimana pengujian hipotesis terdiri atas dua bagian yaitu pengujian hipotesis secara serentak dan pengujian hipotesis secara parsial.Pengujian hipotesis tersebut digunakan untuk menentukan apakah variable bebas yang terdapat pada model regresi memiliki konstribusi yang nyata atau signifikan terhadap variable respon. Langkah-langkah pengujian hipotesis secara serentak dilakukan sebagai berikut:

$H_0 : \theta_1 = \ldots = \theta_J = 0$

H_1 : minimal ada satu $\theta_J \neq 0$

Setelah menentukan hipotesis langkah selanjutnya yaitu menentukan statistik uji dengan membandingkan nilai maksimum dari fungsi *likelihood* himpunan parameter dibawah populasi dengan nilai maksimum dari fungsi *likelihood* himpunan parameter dibawah H_0. Misalnya Ω dimana $\Omega=(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_J, \lambda, \beta)$dengan fungsi *likelihood* adalah:

$L(\Omega) = \left(\prod_{i-1}^{n} f_y\,(y_i)\right)$, dimana $f_y\,(y_i) = \frac{\lambda\beta^{\lambda}\tau {y_i}^{r-1}}{(\beta+{y_i}^{r})^{\lambda+1}}$

dan misalkan pula ωhimpunan parameter dibawah H_0 dimana $\omega = (\lambda, \beta)$dengan fungsi *likelihood*nya adalah:

$L(\omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_y(y_i)\right)$, dimana $f_y(y_i) = \frac{\lambda\beta^{\lambda}}{(\beta+y_i)^{\lambda+1}}$

Setelah menentukan fungsi likelihoodnya maka selanjutnya adalah dengan menentukan $\hat{\theta} = \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_j, \hat{\lambda}, \hat{\beta}$yang memaksimumkan fungsi Log *likelihood* Langkah selanjutnya adalah membentuk fungsi log *likelihood* sehingga diperoleh,

$$log\ L(\Omega) = \prod_{i-1}^{n} log\ (\frac{\lambda\beta^{\lambda}\tau {y_i}^{r-1}}{(\beta+{y_i}^{r})^{\lambda+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[log\left(\frac{\lambda\beta^{\lambda}\tau {y_i}^{r-1}}{(\beta+{y_i}^{r})^{\lambda+1}})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} log\,\lambda + \sum_{i=1}^{n} log\,\beta^{\lambda}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} log\,\tau + \sum_{i=1}^{n} log\,{y_i}^{r-1} - \sum_{i=1}^{n}(\lambda+1)\,log(\,\beta+{y_i}^{r})$$

$$= n\,log\,\lambda + n\,\lambda log\,\beta + n\,log\,\tau + \sum_{i=1}^{n} log\,{y_i}^{r-1} - \sum_{i=1}^{n}(\lambda+1\,)\,log\ \ (\beta+{\lambda_i}^{r})$$

Karena $\tau_i = \exp(\theta' x_i)$, maka fungsi log *likelihood* menjadi

$$= n\,log\,\lambda + n\,log\,\beta^{\lambda} + n\,log(exp(\theta' x_i))$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} log\,y_i^{(exp\,(\theta' x_i)-1)} - \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\,log(\,\beta + y_i^{exp\,(\theta' x_i)})$$

$$= n\,log\,\hat{\lambda} + n\,\hat{\lambda}\,log\,\hat{\beta} + n \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}' x_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\exp(\hat{\theta}' x_i) - 1\right) \log y_i$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1)\,log(\,\beta + y_i^{exp\,(\theta' x_i)})$$

Sehingga diperoleh $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$dengan masing-masing nilai parameter yang diperoleh dari iterasi *Newton Raphson*. Untuk $L(\omega) = \max_{\Omega} L(\omega)$dengan $\hat{\lambda}, \hat{\beta}$yang memaksimumkan fungsi Log *likelihood* disajikan sebagai berikut:

$$L(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \beta^{\lambda}}{(\beta + y_i)^{\lambda+1}} \right)$$

$$\log L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\lambda \beta^{\lambda}}{(\beta + y_i)^{\lambda+1}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\log \left(\frac{\lambda \beta^{\lambda}}{(\beta + y_i)^{\lambda+1}} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log \beta^{\lambda} + - \sum_{i=1}^{n} (\lambda + 1) \log (\beta + y_i)$$

$$= \mathrm{n} \log \hat{\lambda} + \mathrm{n}\,\hat{\lambda} \log \hat{\beta} - (\hat{\lambda} + 1) \sum_{i=1}^{n} \log (\hat{\beta} + y_i) \qquad (21)$$

Sehingga diperoleh $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$ dengan masing-masing nilai parameter yang diperoleh dari iterasi *Newton Raphson*.Berikut dituliskan turunan parsial pertama untuk parameter H_0 yaitu parameter λ, β yang disama dengankan dengan nol untuk memperoleh nilai setiap parameternya.

Turunan parsial pertama terhadap λ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \log L(\omega)}{\partial \lambda} = \frac{\mathrm{n} \log \lambda + \mathrm{n}\,\lambda \log \beta - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^{n} \log (\beta + y_i)}{\lambda}$$

$$= \frac{n}{\lambda} + \mathrm{n} \log \beta - \sum_{i=1}^{n} \log (\beta + y_i) \qquad (22)$$

Turunan parsial pertama terhadap β adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \log L(\omega)}{\partial \beta} = \frac{\text{n} \log \lambda + \text{n} \lambda \log \beta - (\lambda+1)\sum_{i=1}^{n} \log(\beta + y_i)}{\beta}$$

$$= \frac{n\lambda}{\beta} - (\lambda+1)\sum_{i-1}^{n} (\beta + y_i)^{-1} \tag{23}$$

Dari hasil penurunan parsial untuk turunan ke dua dari fungsilogaritma *likelihood*model regresi Burr diperoleh $D(\omega_t)$sebagai berikut:

$$\text{D}(\omega_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \lambda \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \lambda \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai $\widehat{\omega}_t$ yang konvergen yaitu sampai $\left|\frac{\omega_{t+1-\omega_t}}{\omega_t}\right| < \delta$, dengan δ nilangan yang sangat kecil tetapi > 0 atau konvergen.

Setelah memperoleh turunan parsial fungsi logaritma *likelihood* langkah selanjutnya adalah menentukan statistic uji dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$G^2 = -2\log \frac{\text{L}(\hat{\omega})}{\text{L}(\hat{\Omega})} = 2\log \text{L}(\hat{\Omega}) - 2\log \text{L}(\hat{\omega}) \tag{24}$$

dimanaG^2 mengikuti distribusi $chi - square$ sehingga sehingga kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 jika $G^2 > \chi^2_{\alpha,p}$.

Selanjutnya menguji hipotesis secara parsial, dimana uji ini digunakan untuk mengetahui parameter θ yang berpengaruh secara nyata atau signifikan terhadap variable respon Langkah pertama untuk pengujian hipotesis in yaitu menetapkan hipotesi, dimana hipotesisnya

H_0:θ_j=0

H_1:θ_j≠0

Langkah selanjutnya yaitu menentukan statistik uji. Statistik uji yang digunakan adalah

$$W = \frac{\hat{\theta}_j^2}{\text{var}(\hat{\theta}_j)} \sim \chi^2_{\alpha,1}$$

dengan$W$ mengikuti distribusi *chi-square* sehingga kriteria pengujiannya adalah tolak H_0 jika $W > \chi^2_{\alpha,p}$.

Dimana $\hat{\theta}_j$ merupakan penaksiran parameter dari θ_j dan standar *error* diperoleh dari $SE\ (\hat{\theta}_j) = \sqrt{var\ (\hat{\theta}_j)}$ dengan $var\ (\hat{\theta}_j)$ merupakan elemen diagonal utama matriks Informasi (I) yaitu I=-(D) dengan matriks.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil analisis maka dapat diambil kesimpulan adalah sebagai berikut : Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, estimasi parameter model regresi Burr dengan menggunakan metode *maksimumlikelihood* (MLE).Hasil yang diperoleh dari estimasiparameter tersebut tidak *close form* sehingga perlu dilakukan dengan metode iterasi *Newton-Raphson*. Estimasi parameter di bawah populasi menghasilkan yang meliputi $\theta = [\theta_0\ , \theta_1\ , \theta_2\ , ..., \theta_J]$, λ, β , sedangkan hasil untuk estimasi parameter di bawah *H0* menghasilkan parameter antara lain λ, β . Hasilestimasi parameter selanjutnya diperoleh suatu nilai *lnlikelihood* dibawah populasi dan *lnlikelihood* di bawah *H0* yang dianalisis pada pengujian hipotesis dengan menggunakan metode *maksimum likelihood rasio test*(MLRT) dengan membandingkan nilai antara *lnlikelihood* di bawah H_0 dan *lnlikelihood* dibawah populasi atau dengan perumusan $\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$. Pengujian hipotesis sendiri dilakukan dengan 2 bagian yaitu secara serentak dan secara parsial.

5.2 Saran

Diharapkan dapat memodelkan berbagai ukuranpada distribusi yang asimetrisdalam hal ini Distribution Burrtipe lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Burr, I.V. 1942. Cumulative frequency functions. *Annalsof Mathematical Statistics* 13, 215-232.

[2] Bain, L. J., & Engelhard, M. 1992. *Intruduction ToProbability And Mathematical Statistic*, Duxbury Press,Belmont, California.

[3] Box, G.E.P. & Cox, D.R. 1964 Analysis of Transformation, *Journal Of Royal Statistical Society*, Seri B (Methodological), 26(2) 211-252

[4] Chapra, S. C., & Canale, R. P. 1998. *Numerical Methods*. New York.

Publishing Corporation.

[5] Draper, N & Smith, H. 1981. *Applied Regression Analysis.Second Edition*. New York

[6] Gujarati, D. N.(2004), "*Basic Econometrics 4thedition"*, The Mc Graw Hill Companies, New York.

[7] Jan, B. et al. 1998. Burr Regression and Portfolio Segmentation. *Journal Mathematics and Economics*. Vol. 23. no 231-250.Elsevier.

[8] Law, AM., & Kelton, D.W. 2000. *Simultan Modelling Analysis* 3th*edition"*, New York: MacGraw-Hill.

[9] Montgomery, D. C. and Peck, E. A. 1992. *Introduction ToLinier Regression Analysis*. Second Edition. USA. Johnwilley and Sons.

[10] Rao, Poduri. 1997. *Variance Components Estimation,Mixed Models*, Methodologies and Applications. NewYork. Chapman Hall.

[11] Stephens, M.A. 1997. EDF Statistics For Goodness Of Fit and Some Comparisons, *Journal of AmericanStatistical Association*, Vol 69, 730-737.

[12] Williams, E. J., (1959). *Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York.