Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda dan Graf Matahari

Tanti Windartini[1], Slamin[1,3], Dafik[1,4]
[1]CGANT-Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
windartini.tanti@gmail.com
[3]Program Studi Sistem Informatika Universitas Jember
Slamins@unej.ac.id
[4]Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember d.dafik@unej.ac.id

Abstract

G adalah suatu graf dengan himpunan vertex $V(G)$ dan himpunan edge $E(G)$. Jarak (*distance*) dari vertex u ke v di G, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v. Pelabelan jarak titik tak teratur pada graf G dengan simpul v dimana $V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ sehingga bobot yang dihitung pada simpul selalu berbeda. Ketakteraturan jarak G dinotasikan sebagai dis (G), adalah nilai minimum dari label terbesar k dari semua ketakteraturan. Bobot dari titik x di G didefinisikan sebagai jarak dari label semua simpul yang berdekatan dengan x (jarak 1 dari x), yaitu $wt(x) = \sum_{y \epsilon N(x)} \lambda(y)$.

Key Words *:nilai ketakteraturan jarak, pelabelan ketakteraturan jarak*

Pendahuluan

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti. Beberapa permasalahan akan lebih jelas untuk diterapkan apabila permasalahan tersebut dimodelkan dalam bentuk graf. Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik u, v ϵ $V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G. Salah satu topik teori graf yang menarik dan dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang ilmu adalah pelabelan graf. Pelabelan graf sangat beragam, salah satu pelabelan yang terbaru yaitu pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf, lebih detail lihat [1], [2], [3], [8].

Pelabelan ketakteraturan jarak titik pada graf didasarkan pada nilai ketakteraturan dan jarak yang sudah dibahas sebelumnya. Daerah asal dan daerah hasil untuk semua titik akan berada pada $1, 2, ..., k$, yang disebut dengan label titik. Sedangkan untuk bobot merupakan berat dari titik x di G didefinisikan sebagai jumlah dari label semua simpul yang berdekatan dengan x (jarak 1 dari x). Apabila semua titik di G memiliki bobot yang berbeda maka pelabelan ini disebut pelabelan jarak titik tak teratur pada graf, lebih detail dapat dilihat pada [4], [5], [9], [10].

Konsep Dasar

Pada bagian ini, kami menyajikan definisi formal pelabelan jarak titik tak teratur. Pelabelan jarak titik tak teratur pada graf G dengan simpul v dimana $\lambda : V \rightarrow 1, 2, ..., k$ sehingga bobot dihitung pada simpul adalah berbeda.

Bobot dari titik x di G didefinisikan sebagai jumlah dari semua label titik yang berdekatan dengan x (jarak 1 dari x), yaitu

$$wt(x) = \sum_{y \epsilon N(x)} \lambda(y)$$

Nilai jarak titik tak teratur pada graf G dinotasikan dengan $y\epsilon N(x)$ $dis(G)$ adalah nilai minimum yang terbesar pada label k dari semua label yang tidak teratur tersebut. Dalam pelabelan ini, label titik belum tentu berbeda, lebih detail lihat [6]

Lemma 1 **[7]** *Misalkan G adalah graf terhubung pada simpul v dengan δ derajat minimum dan Δ derajat maksimum dan tidak ada simpul yang memiliki tetangga yang sama. Maka,*

$$dis(G) \geq \left\lceil \frac{v + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil$$

Bukti. Nilai bobot terkecil dari graf G adalah δ. Karena bobobt setiap simpul harus selalu berbeda dan G memiliki v simpul, maka nilai bobot terbesar dari simpul graf G yang paling sedikit adalah $v + \delta - 1$. Bobot ini didapat dari penjumlahan bilangan bulat Δ. Oleh karena itu, label terbesar yang berkontribusi untuk bobot ini haruslah paling sedikit $\lceil \frac{v+\delta-1}{\Delta} \rceil$.

Observasi 1 **[7]** *Misalkan u dan w merupakan simpul yang berbeda pada graf terhubung G. Jika u dan w mempunyai tetangga yang sama, $N(u) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) + \ldots + \lambda(v_n)$ dan $N(w) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) + \ldots + \lambda(v_n)$ sehingga $N(u) = N(w)$, maka G tidak mempunyai pelabelan ketakteraturan jarak.*

Dalam pelabelan ini tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan ketakteraturan jarak. Berikut beberapa contoh graf yang tidak mempunyai pelabelan ketakteraturan jarak.

- Graf komplit bipartit $K_{m,n}$ untuk $m, n \geq 3$
- Graf komplit multipartit $H_{m,n}$ untuk $m, n \geq 2$

- Graf bintang S_n di titik $n+1$ untuk $n \geq 2$
- Graf pohon T_n untuk setiap $n \geq 3$, yang berisi simpul dengan sedikitnya dua daun.

Observasi 2 [7] *Misalkan u dan w merupakan dua simpul yang bertetangga dalam sebuah graf terhubung G. Jika $N(u) - w = N(w) - u$, maka label u dan w harus berbeda, yaitu $\lambda(u) \neq \lambda(w)$.*

Misalkan $N(u) - w = N(w) - u$ merupakan dua simpul yang berdekatan $u, w \epsilon V(G)$. Maka $wt(u) = \lambda(w) + \Sigma_{y\epsilon N(u)-(w)}\lambda(y)$ dan $wt(w) = \lambda(u) + \Sigma_{y\epsilon N(w)-(u)}\lambda(y)$. Karena $\Sigma_{y\epsilon N(u)-(w)}\lambda(y) = \Sigma_{y\epsilon N(w)-(u)}\lambda(y)$, sehingga $\lambda(u) = \lambda(y)$, maka $wt(u) = wt(w)$ yang tidak mungkin mempunyai pelabelan ketakteraturan jarak.

Hasil Penelitian

Pada bagian ini kita akan membahas tentang teorema yang menyebutkan mengenai teorema nilai ketakteraturan jarak titik pada graf friendship $dis(f_n)$, graf helm $dis(H_n)$, graf bunga $dis(Fl_n)$ dan graf matahari $dis(M_n)$.

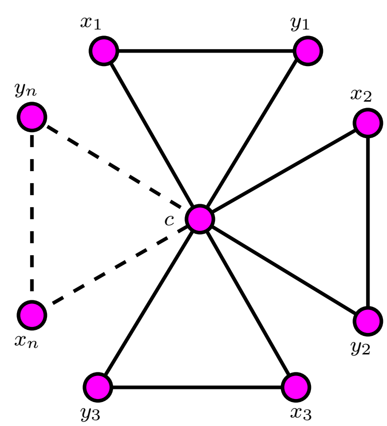

Figure 1: *Friendship graph f_n*

◇ **Teorema 1** *Misalkan f_n adalah graf friendship dengan simpul $n \geq 3$, maka $dis(f_n) = 2n$.*

Bukti. Graf friendship f_n adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(f_n) = \{c\}, \{x_i\}, \{y_i\}$, himpunan sisi $E(f_n) = \{cx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i, 1 \leq i \leq n\}$

$\cup \{cy_i, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = p = 2n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = e = 3n$. Graf friendship dengan $n \geq 3$ simpul dimana $x, y \in V(f_n)$ dan $x \neq y$. Karena setiap pasangan simpul dari f_n berdekatan dengan semua pasangan simpul lainnya, maka $N(x) - y = N(y) - x$ dimana $\lambda(x) \neq \lambda(y)$. Jadi label dari semua simpul di f_n harus berbeda. Akibatnya, $dis(f_n) \geq 2n$.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $dis(f_n) \geq 2n$. Untuk menunjukkan $dis(f_n) \geq 2n$ cukup menunjukkan bahwa setiap titik tepi x_i, y_i untuk $i = 1, 2, ..., n$ tidak boleh sama. Kita bagi menjadi 2 kasus.

- Kedua titik itu bertetangga, yaitu x_i dan y_i. Menurut observasi 2 $\lambda(x_i) \neq \lambda(y_i)$ karena kalau $\lambda(x_i) = \lambda(y_i)$, kontradiksi dengan bobot yang tidak boleh sama.

- Kedua titik itu tidak bertetangga, yaitu x_j dan y_i. Andaikan $\lambda(x_j) = \lambda(y_i)$, dimana $i \neq j$. Maka, $w(x_i) = \lambda(c)+\lambda(y_i)$ dan $w(y_j) = \lambda(c)+\lambda(x_j)$. Karena $\lambda(x_j) = \lambda(y_i)$, maka $\lambda(x_i) = \lambda(y_j)$, juga kontradiksi.

Dengan demikian setiap titik tepi x_i, y_i untuk $i = 1, 2, ..., n$ tidak boleh sama, sehingga $dis(f_n) \geq 2n$.

Label titik untuk graf friendship dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\lambda(C) = \; 1$$

$$\lambda(x_{1,i}) = \; 2i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda(y_{1,i}) = \; 2i - 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

□

◇ **Teorema 2** *Misalkan H_n adalah graf helm dengan simpul $n \geq 3$, maka $dis(H_n) = n$.*

Bukti. Graf helm H_n adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(H_n) = \{c\}, \{u_i\}, \{v_i\}$, himpunan sisi $E(H_n) = \{cv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = p = 2n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = e = 3n$. Graf helm dengan simpul $n \geq 3$. Titik bandul berderajat satu sehingga bobot tergantung pada label u_i dimana $i = 1, 2, ..., n$.

Pertama akan ditunjukkan bahwa $dis(H_n) \geq n$. Karena tetangga dari setiap titik v_i adalah satu titik yaitu u_i untuk $i = 1, 2, ..., n$ maka label setiap titik u_i harus berbeda, kalau tidak maka bobot v_i akan sama, yang menunjukkan kontradiksi. Dengan demikian $dis(H_n) \geq n$.

Label titik untuk graf helm pada bagian dalam dapat dituliskan dalam fungsi berikut ini.

$$\lambda(C) = \ 1$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda(v_{1,i}) = \ j; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Untuk $n = 5, 6, ..., n$:

$$\lambda(v_{1,i}) = \begin{cases} 2j-1; & j = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n+1-j); & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots n \end{cases}$$

Fungsi untuk label titik bagian luar pada graf bunga dapat dituliskan sebagai berikut:

Untuk $n = 3$:

$$\lambda(u_{1,i}) = \ 1; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda(u_{1,i}) = \begin{cases} 3-j; & j = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ j-2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots n \end{cases}$$

Untuk n ganjil, yaitu $n = 5, 7, 9..., n$:

$$\lambda(u_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j = 1 \\ n-2j+1; & j = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(j-1)-n; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots, n-1 \\ n-3; & j = n \end{cases}$$

Untuk n genap, yaitu $n = 6, 8, ..., n$:

$$\lambda(u_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j = 1 \\ n-2j+1; & j = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(j-1)-n; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots, n-1 \\ n-3; & j = n \end{cases}$$

□

◇ **Teorema 3** *Misalkan Fl_n adalah graf bunga dengan simpul $n \geq 3$, maka $dis(Fl_n) = n$.*

Bukti. Graf bunga Fl_n adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(Fl_n) = \{c\}, \{u_i\}, \{v_i\}$, himpunan sisi $E(Fl_n) = \{cv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cu_i, 1 \leq i \leq n\} \cup$ - $\{u_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = p = 2n+1$ dan banyaknya sisi $|E| = e = 4n$. Graf bunga dengan simpul $n \geq 3$. Titik bandul berderajat dua sehingga bobot tergantung pada label u_i dimana $i = 1, 2, ..., n$. Karena tetangga dari setiap titi v_i adalah c dan u_i untuk $i = 1, 2, ..., n$ maka label setiap titik u_i harus berbeda. Jadi label terbesar yang minimal dari graf matahari adalah n. Maka, $dis(Fl_n) \geq n$.

Label titik untuk graf bunga pada bagian dalam dapat dituliskan dalam fungsi berikut ini.

$$\lambda(C) = \ 1$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda(v_{1,i}) = \ j; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Untuk $n = 5, 6, ..., n$:

$$\lambda(v_{1,i}) = \begin{cases} 2j-1; & j = 1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n+1-j); & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \dots n \end{cases}$$

Fungsi untuk label titik bagian luar pada graf bunga dapat dituliskan sebagai berikut:

Untuk $n = 3$:

$$\lambda(u_{1,i}) = \ 1; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda(u_{1,i}) = \begin{cases} 2; & j = 1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 1; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \dots n \end{cases}$$

Untuk n ganjil, yaitu $n = 5, 7, 9..., n$:

$$\lambda(u_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j = 1 \\ n-2j+1; & j = 2, 3, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(j-1)-n; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \dots, n-1 \\ n-3; & j = n \end{cases}$$

Untuk n genap, yaitu $n = 6, 8, ..., n$:

$$\lambda(u_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j = 1 \\ n-2j+1; & j = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(j-1)-n; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots, n-1 \\ n-3; & j = n \end{cases}$$

□

◇ **Teorema 4** *Misalkan M_n adalah graf matahari dengan simpul $n \geq 3$, maka $dis(M_n) = n$.*

Bukti. Graf matahari M_n adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(M_n) = \{u_i\}, \{v_i\}$, himpunan sisi $E(M_n) = \{u_i v_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = p = 2n$ dan banyaknya sisi $|E| = e = 2n$. Graf matahari dengan simpul $n \geq 3$. Titik bandul berderajat satu sehingga bobot tergantung pada label u_i dimana $i = 1, 2, ..., n$. Karena bobot u_i harus berbeda maka label v_i harus berbeda. Jadi label terbesar yang minimal dari graf matahari adalah n. Maka, $dis(M_n) \geq n$.

Label titik untuk graf matahari pada bagian dalam dapat dituliskan dalam fungsi berikut ini.

Untuk $n = 4$

$$\lambda(V_{1,j}) = j; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Untuk $n = 3, 5, 6, \ldots, n$

$$\lambda(V_{1,j}) = \begin{cases} 2j-1; & j = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n+1-j); & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \ldots n \end{cases}$$

Label titik untuk simpul graf matahari pada bagian luar dapat dituliskan sebagai berikut.

Untuk $n = 3$

$$\lambda(U_{1,j}) = 1; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Untuk $n = 4$

$$\lambda(U_{1,j}) = \begin{cases} 1; & j = 1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & j = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots n \end{cases}$$

Untuk n ganjil, yaitu $n = 5, 7, ..., n$:

$$\lambda(U_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j=1 \\ n-2j+1; & j=2,3,\ldots,\lceil\frac{n}{2}\rceil-1 \\ 3; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 2; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \\ 2(j-1)-n; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil+2,\ldots,n-1 \\ n-3; & j=n \end{cases}$$

Untuk n genap, yaitu $n = 6, 8, ..., n$:

$$\lambda(U_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & j=1 \\ n-2j+1; & j=2,3,\ldots,\lceil\frac{n}{2}\rceil-1 \\ 2; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 3; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1 \\ 2(j-1)-n; & j=\lceil\frac{n}{2}\rceil+2,\ldots,n-1 \\ n-3; & j=n \end{cases}$$

□

Kesimpulan

Nilai ketakteraturan jarak titik dari graf friendship f_n untuk $n \geq 3$ adalah $dis(f_n) = 2n$ dan nilai ketakteraturan jarak titik dari graf helm H_n, graf bunga fl_n dan graf matahari S_n untuk $n \geq 3$ adalah $dis(G_n) = n$ dengan n bilangan bulat positif.

References

[1] Baca, M., Jendrol.,M. and Ryan,J. 2007.*On Irregular Total Labelling. Discrete Mathematics,* 307(1): 1378-388.

[2] Chartrad, G, and Oellermann. 1993.*Applied and Algoritmic Graph Theory.* New York: MacGraw-Hill, inc.

[3] Kusmayadi, Tri Atmojo dkk. *Digraf Eksentrik dari Graf Flower*. Universitas Sebelas Maret, 2012.

[4] M. Miller, C. Rodger* and R. Simanjuntak. 2003. *Distance Magic Labelings of Graphs. Australasian Journal Of Combinatorics*, Volume 28: 305-315.

[5] Slamin. 2009. *DESAIN JARINGAN: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember-University press.

[6] Slamin, Dafik, W. Winnona. 2012. *Total Vertex Irregularity Strength of The Disjoint Union of Sun Graphs. Int. J. Comb.*

[7] Slamin. 2014. *Distance Irregular Labelings Of Graphs*. Submitted.

[8] Vasudev,C. 2006. *Graph Theory With Application*. New Delhi: New Age International (P). Ltd.

[9] R. Simanjuntak. 2003.*Distance-related problems in graph theory*. The University of Newcastle.

[10] R. Simanjuntak, K. Wijaya. 2013. *On Distance Antimagic Graphs*. arXiv preprint arXiv:1312.7405.