Bilangan Khromatik Pewarnaan Sisi pada Graf Khusus dan Operasinya

Ilham Saifudin[1], Dafik[2]
[1]CGANT-University of Jember
[2]Department of Mathematics FMIPA University of Jember
ilhamsaifudin@ymail.com
[3]Department of Mathematics Education FKIP University of Jember
d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Misal G adalah graf sederhana dan tidak berarah. Representasi visual dari graf G adalah dinyatakan dengan himpunan titik dan sisi ditulis $G = (V, E)$. Salah satu kajian terhadap graf G yang mempunyai aplikasi luas adalah *graph colouring* yang terdiri dari pewarnaan simpul, sisi, dan wilayah. Dalam makalah ini akan dibahas pewarnaan sisi. Pewarnaan sisi adalah pemberian warna pada sisi graf G sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang bersisian mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf dinyatakan dengan bilangan khromatik. Makalah ini fokus mengkaji tentang bilangan kromatik pada graf-graf khusus dan operasinya.

Key Words :*Pewarnaan sisi graf, Bilangan kromatik.*

Pendahuluan

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Secara umum, graf [4] adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul simpul (*vertex* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut.

$$V = v_1, v_2, v_3, ..., v_n;\ E = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$$
$$\text{atau}$$
$$E = (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), ..., (v_{n-1}, v_n)$$

Di mana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j. Salah satu topik yang menarik adalah masalah pewarnaan graf *(graph coloring)*. Bidang ini memiliki sejarah menarik dan teori-teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan pada kalangan matematikawan. Umumnya pewarnaan graf [6] digunakan untuk memodelkan suatu masalah sehingga menjadi lebih mudah, yaitu dengan cara merepresentasikan objek-objek tersebut. Contoh pemodelan suatu masalah dengan menggunakan pewarnaan graf dapat dilihat pada penggambaran rangkaian listrik, penyusunan jadwal, jaringan komunikasi, jaringan network komputer, analisis algoritma, peta, struktur hierarki sosial, dan lain-lain.

Dalam paper ini, akan membahas salah satu aplikasi pewarnaan graf *(graph colo ring)*, khususnya pewarnaan pada sisi graf G sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang bersisian mempunyai warna yang sama, sehingga akan diperoleh jumlah minimum warna dengan notasi $\varphi(G)$ dan nantinya akan dinyatakan dengan bilangan kromatik dengan notasi $\chi(C_n)$. Penelitian terkait Pewarnaan Sisi berkembang cukup pesat, lihat [2],[7],[8],[9].

Graf yang digunakan dalam penelitian fokus pada beberapa graf khusus beserta operasinya [3], diantaranya yaitu: *Prims graph* ($H_{m,n}$), *Ladder Graph* (L_n), *Fan Graph* (F_n), *Crown Graph* ($P_n \odot P_3$), *Graph Composition* ($G_2[G_1]$).

Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf *(graph coloring)* adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu. Pewarnaan sisi *(edge coloring)* adalah memberi warna berbeda pada sisi yang bersisian sehingga tidak ada dua sisi yang bersisian mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimal $\varphi(G)$ [1],[5]yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi-sisi dalam suatu graph G disebut bilangan khromatik G.

Theorem 1 Teorema (Vizing 1964)*[10]. Jika G adalah graph sederhana, maka $\chi(G) \leq \Delta(G)$ atau $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$*

Hasil Pewarnaan Sisi Graf Khusus dan Operasinya

Dalam penelitian diperoleh beberapa teorema yang berhubungan dengan Khromatik Pewarnaan Sisi Graf Khusus dan Operasinya meliputi: *Prims graph* $H_{m,n}$, *Ladder Graph* L_n, *Fan Graph* (F_n), *Crown Graph* ($P_n \odot P_3$), *Graph Composition* ($G_2[G_1]$).

$\diamond$ **Teorema 1** *Diberikan $G = H_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, bilangan khromatik $\chi(H_{m,n}) = 4$.*

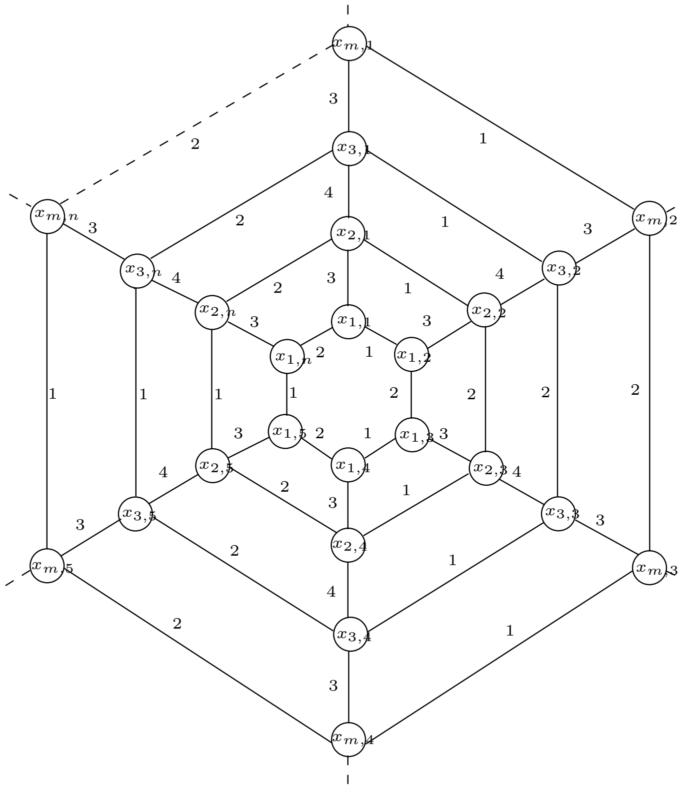

Figure 1: *Prims graph* $H_{m,n}$

Bukti. *Prims graph* adalah graf yang memiliki $V(H_{m,n}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$, $E(H_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{m,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$, $p = |V|{=}m.n$ dan $q = |E|{=}2m.n{-}n$. Untuk $n = 6$ pada *Prims graph* $H_{m,n}$ akan dinyatakan batas atas dan bawah $\chi(H_{m,6}) \leq \Delta(H_{m,6})$ *atau* $\chi(H_{m,6}) \leq \Delta(H_{m,6}) + 1$ dengan derajat $\chi(H_{m,6}) = \Delta(H_{m,6})$ atau $\chi(H_{m,6}) = \Delta(H_{m,6}) + 1$. Dengan demikian karena $\Delta(H_{m,6}) = 3$ diperoleh $\chi(H_{m,6}) = 4$, sehingga terbukti bahwa bilangan khromatik $\chi(H_{m,6}) = 4$ dengan batas $\chi(H_{m,6}) \leq 4$. Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, graf $G = H_{m,n}$ diwarnai sisinya dengan menggunakan fungsi berikut:

Untuk ekspan n ganjil:

$$f(e)=\begin{cases} 1, e=x_{i,j}x_{i,j+1}\,; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m, \text{jika } j \text{ adalah ganjil}, \;\; 1\leq j<n-1\\ 1, e=x_{i,n}x_{i+1,n}\,; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil}\\ 2, e=x_{i,j}x_{i,j+1}\,; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m, \text{jika } j \text{ adalah genap}, \;\; 1<j<n-1\\ 2, e=x_{i,1}x_{i,1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil}\\ 3, e=x_{i,n}x_{i,1}; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m\\ 3, e=x_{i,j}x_{i+1,j}\,; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil}, \;\; 1<j<n-1\\ 4, e=x_{i,j}x_{i+1,j}\,; & \text{jika } i \text{ adalah genap}, \;\; 1\leq j\leq n \end{cases}$$

Untuk ekspan n genap:

$$f(e)=\begin{cases} 1, e=x_{i,j}x_{i,j+1}\,; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m, \text{jika } j \text{ adalah ganjil}, \;\; 1\leq j<n-1\\ 2, e=x_{i,j}x_{i,j+1}\,; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m, \text{jika } j \text{ adalah genap}, \;\; 1<j\leq n\\ 2, e=x_{i,n}x_{i,1}; & \text{untuk}\, 1\leq i\leq m\\ 3, e=x_{i,j}x_{i+1,j}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil}, \;\; 1\leq j\leq n\\ 4, e=x_{i,j}x_{i+1,j}\,; & \text{jika } i \text{ adalah genap}, \;\; 1\leq j\leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa bilangan khromatik $\chi(H_{m,n})=4$, untuk n ganjil maupun genap jelas memenuhi batas bawah dan atas pewarnaan sisinya $\varphi(H_{m,n})\leq 4$. □

◇ **Teorema 2** *Diberikan $G=L_n$ untuk $n\geq 3$, bilangan khromatik $\chi(L_n)=3$.*

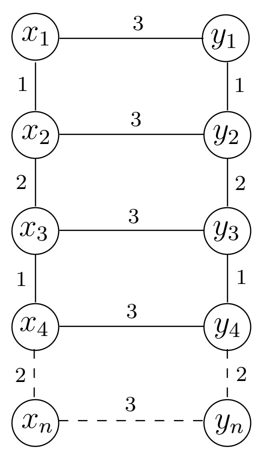

Figure 2: *Ladder Graph L_n*

Bukti. *Ladder Graph* adalah graf yang memiliki $V(L_n)=\{x_i;1\leq i\leq n;n\leq 2\}\cup\{y_i;1\leq i\leq n;n\leq 2\}$, $E(L_n)=\{x_iy_i;1\leq i\leq n;n\leq 2\}\cup\{x_ix_{i+1};1\leq i\leq n;n\leq 1\}\cup\{y_iy_{i+1};1\leq i\leq n;n\leq 1\}$, $p=|V|$=4.n dan $q=|E|$=3.$n+1$.

Untuk $n = 3$ pada *Ladder Graph* L_n akan dinyatakan batas atas dan bawah $\chi(L_3) \leq \Delta(L_3)$ *atau* $\chi(L_3) \leq \Delta(L_3) + 1$ dengan derajat $\chi(L_3) = \Delta(L_3)$ atau $\chi(L_3) = \Delta(L_3) + 1$. Dengan demikian karena $\Delta(L_3) = 3$ diperoleh $\chi(L_3) = 3$, sehingga terbukti bahwa bilangan khromatik $\chi(L_n) = 3$ dengan batas $\chi(L_n) \leq 3$. Untuk $n \geq 3$, graf $G = L_n$ diwarnai sisinya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 2, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 1, e = y_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 2, e = y_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 3, e = x_i y_i; & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa bilangan khromatik $\chi(L_n) = 3$, untuk n ganjil maupun genap, jelas memenuhi batas bawah dan atas pewarnaan sisinya $\varphi(L_n) \leq 3$. □

◇ **Teorema 3** *Diberikan* $G = F_n$ *untuk* $n \geq 2$*, bilangan khromatik* $\chi(F_n) = 2n$

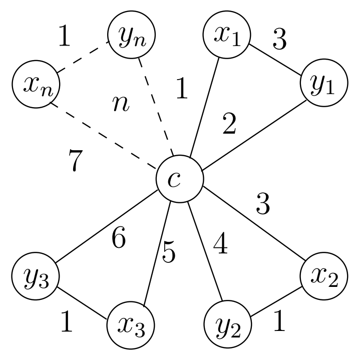

Figure 3: *Fan Graph* (F_n)

Bukti. *Fan Graph* adalah graf yang memiliki $V(F_n) = \{c\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \geq 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \geq 3\}$, $E(F_n) = \{cx_i; 1 \leq i \leq n; n \geq 3\} \cup \{cy_i; 1 \leq i \leq n; n \geq 3\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n; n \geq 3\}$, $p = |V|{=}2.n + 1$ dan $q = |E|{=}3.n$. Untuk $n = 3$ pada *Fan Graph* $G = (F_n)$ akan dinyatakan batas atas dan bawah $\chi(F_3) \leq \Delta(F_3)$ *atau* $\chi(F_3) \leq \Delta(F_3) + 1$ dengan derajat $\chi(F_3) = \Delta(F_3)$ atau $\chi(F_3) = \Delta(F_3) + 1$. Dengan demikian karena $\Delta(F_3) = 6$ diperoleh $\chi(F_3) = 6$, sehingga terbukti bahwa bilangan khromatik $\chi(F_n) = 2n$ dengan batas $\chi(F_n) \leq 2.n$. Untuk $n \geq 2$, graf $G = F_n$ diwarnai sisinya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_i y_i; & \text{untuk}\, 1 < i \leq n \\ 3, e = x_1 y_1; & \text{untuk}\, i = 1 \\ 2.n; e = cx_i; & 1 \leq i \leq n, \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 2.n; e = cy_i; & 1 \leq i \leq n, \text{jika } i \text{ adalah genap} \end{cases}$$

Jelas bahwa bilangan khromatik $\chi(F_n) = 2n$, untuk n ganjil maupun genap, jelas memenuhi batas bawah dan atas pewarnaan sisinya $\varphi(F_n) \leq 2n$. $\square$

◇ **Teorema 4** *Diberikan $G = (P_n \odot P_3)$ untuk $n \geq 3$, bilangan khromatiknya $\chi(P_n \odot P_3) = 5$.*

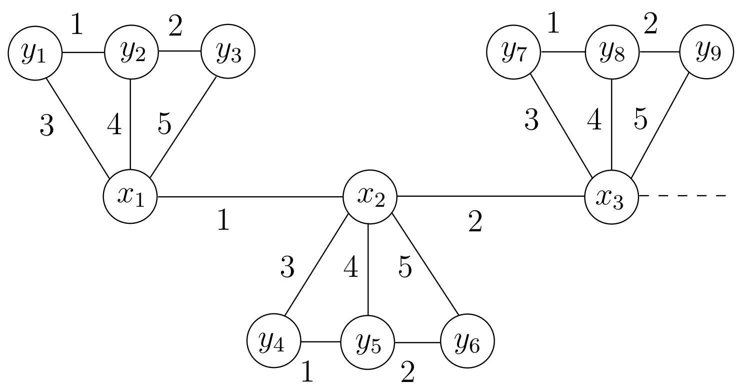

Figure 4: *Crown Graph ($P_n \odot P_3$)*

Bukti. *Joint Graph* adalah graf yang memiliki $V(P_n \odot P_3) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(P_n \odot P_3) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V|$=$4.n$ dan $q = |E|$=$6.n-1$. Untuk $n = 3$ pada *Crown Graph* $P_n \odot P_3$ akan dinyatakan batas atas dan bawah $\chi(P_3 \odot P_3) \leq \Delta(P_3 \odot P_3)$ *atau* $\chi(P_3 \odot P_3) \leq \Delta(P_3 \odot P_3) + 1$ dengan derajat $\chi(P_3 \odot P_3) = \Delta(P_3 \odot P_3)$ atau $\chi(P_3 \odot P_3) = \Delta(P_3 \odot P_3) + 1$. Dengan demikian karena $\Delta(P_3 \odot P_3) = 5$ diperoleh $\chi(P_3 \odot P_3) = 5$, sehingga terbukti bahwa bilangan khromatik $\chi(P_n \odot P_3) = 5$ dengan batas $\chi(P_n \odot P_3) \leq 5$. Untuk $n \geq 3$, graf $G = P_n \odot P_3$ diwarnai sisinya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 1, e = y_{3.i-2} y_{(3.i-2)+1}; & \text{untuk } 1 < i \leq n \\ 2, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 2, e = y_{3.i-1} y_{(3.i-1)+1}; & \text{untuk } 1 < i \leq n \\ 3, e = x_i y_{3.i-2}; & \text{untuk } 1 < i \leq n \\ 4, e = x_i y_{3.i-1}; & \text{untuk } 1 < i \leq n \\ 5, e = x_i y_{3.i}; & \text{untuk } 1 < i \leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa bilangan khromatik $\chi(P_n \odot P_3) = 5$, untuk n ganjil maupun genap, jelas memenuhi batas bawah dan atas pewarnaan sisinya $\varphi(P_n \odot P_3) \leq 5$. □

◇ **Teorema 5** *Diberikan* $G = (G_2[G_1])$ *untuk* $n \geq 3$, *bilangan khromatiknya* $\chi(G_2[G_1]) = 5$.

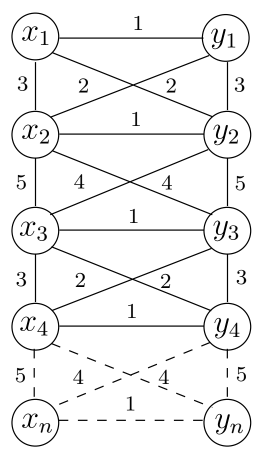

Figure 5: *Graph Composition* $G_2[G_1]$

Bukti. *Graph Composition* adalah graf yang memiliki $V(G_2[G_1]) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(G_2[G_1]) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$ $\cup$ $\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $p = |V|$=$4.n$ dan $q = |E|$=$5n + 1$. Untuk $n = 4$, batas atas dan bawah $\chi(G_2[G_1]) \leq \Delta(G_2[G_1])$ *atau* $\chi(G_2[G_1]) \leq \Delta(G_2[G_1]) + 1$ dengan derajat $\chi(G_2[G_1]) = \Delta(G_2[G_1])$ atau $\chi(G_2[G_1]) = \Delta(G_2[G_1]) + 1$. Dengan demikian karena $\Delta(G_2[G_1]) = 5$ diperoleh $\chi(G_2[G_1]) = 5$, sehingga terbukti bahwa bilangan khromatik $\chi(G_2[G_1]) = 5$ dengan batas $\chi(G_2[G_1]) \leq 5$. Untuk

$n \geq 3$, graf $G = G_2[G_1]$ diwarnai sisinya dengan menggunakan fungsi berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_i y_i; & \text{untuk}\, 1 < i \leq n \\ 2, e = x_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 2, e = x_i y_{i-1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 3, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 3, e = y_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 4, e = x_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 4, e = x_i y_{i-1}; & \text{jika } i \text{ adalah ganjil} \\ 5, e = x_i x_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \\ 5, e = y_i y_{i+1}; & \text{jika } i \text{ adalah genap} \end{cases}$$

Jelas bahwa bilangan khromatik $\chi(G_2[G_1]) = 5$, untuk n ganjil maupun genap, jelas memenuhi batas bawah dan atas pewarnaan sisinya: $\varphi(G_2[G_1]) \leq 5$. □

Kesimpulan

Bilangan khromatik pewarnaan sisi pada graf khusus dan operasinya adalah *Prims graph* $H_{m,n}$ adalah $\varphi(H_{m,n}) \leq 4$, *Ladder Graph* L_n adalah $\varphi(L_n) \leq 3$, *Fan Graph* F_n adalah $\varphi(F_n) \leq 2n$, *Crown Graph* $P_n \odot P_3$ adalah $\varphi(P_n \odot P_3) \leq 5$, *Graph Composition* $G_2[G_1]$ adalah $\varphi(G_2[G_1]) \leq 5$.

References

[1] Asmiati, H. Assiyatun, dan E.T. Baskoro, Locating-chromatic number of amalgamation of stars. ITB J. Sci, 2011, 1-8.

[2] Budajova, Julius Czap, Locating-chromatic number of amalgamation of stars FACIAL R-ACYCLIC EDGE-COLORINGS OF PLANE GRAPHS. Technical University of Kosice,2013, Volume 85 No. 1 141-147

[3] Dafik, F. Alfin, F. M. Kunti, Super Antimagicness of A Well-defined Graph *Indonesia, Saintifika* 14 (2012), 106–118.

[4] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.

[5] Gary Chartrand and Ping Zhang, Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.

[6] Marx, Daniel, Graph Coloring Problems And Their Applications In Scheduling, Sabri, New Graph Coloring, Algorithms. Springer, Berlin, 2007

[7] Preeti Gupta, A study of Vertex - Edge Coloring Techniques with Application. Department of Engg. Mathematics, 2014 Volume 1, Issue 2

[8] Poornima B,Dr. V. Ramaswamy, Application of Edge Coloring of a Fuzzy Graph. I.S and E Department, B.I.E.T. Davangere, 2010. Volume 6

[9] R.Cole, J. Hopcroft, On edge coloring bipartite graphs,SIAM Journal on Computing11 (1982) 540-546.

[10] Vizing, On an estimate of the chromatic class of ap-graph, (in Russian), Diskret. Analiz, 1964, 25-30