

Pewarnaan titik Pada Graf Spesial dan Operasinya

Jesi Irwanto^{1,2}, Dafik^{1,3}

¹CGANT- University of Jember

²Department of Mathematics FMIPA University of Jember

³Department of Mathematics Education FKIP University of Jember

jesyirwanto@yahoo.co.id, d.dafik@gmail.com

Abstract

Misal diketahui graf sederhana G , visualisasi dari graf G adalah dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik atau vertex, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau edge. Salah satu aplikasi yang berkaitan dengan graf adalah pewarnaan graf (graph colouring) yang terdiri dari pewarnaan simpul, sisi dan wilayah. Dalam makalah ini akan di bahas pewarnaan titik. Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titik - titiknya pada suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf dinyatakan dengan bilangan kromatik. Dalam makalah ini akan dikaji tentang bilangan kromatik pada beberapa graf khusus yang meliputi graf roda W_n , graf kipas F_n , graf helm H_n , graf anti prisma H_n , dan graf prisma H_n .

Kata Kunci : *Graf spesial, Operasi graf, Pewarnaan titik.*

Pendahuluan

Graf merupakan suatu pokok bahasan dalam matematika (khususnya matematika diskrit) yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada banyak bidang. Secara umum graf adalah pasangan himpunan (v, e) dimana v adalah sebuah simpul dan e adalah sebuah sisi yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut. Untuk lebih jelas mengenai graf terdapat di [6], [3]. Fungsi graf sangat banyak [1],[2],[7], namun pada umumnya graf dipakai dalam memodelkan suatu masalah sehingga menjadi lebih mudah yaitu dengan cara mempresentasikan objek-objek tersebut. Contohnya adalah pemodelan suatu masalah dengan menggunakan graf dapat dilihat pada penggambaran rangkaian listrik, senyawa kimia, jaringan komunikasi dsb. Salah satu topik yang menarik adalah masalah pewarnaan graf (graph colouring). Bidang ini memiliki sejarah yang menarik dan teori-teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan dikalangan akademisi (matematikawan). Ada 3 (tiga) macam pewarnaan dalam graf, yaitu pewarnaan titik (vertex colouring), pewarnaan sisi [4],[5],[8],[10] (edge colouring) dan pewarnaan wilayah (face colouring). Dalam artikel ini, yang akan dibahas oleh penulis adalah teknik pewarnaan titik (vertex colouring), Pewarnaan titik graf diyakini pertamakali muncul sebagai masalah pewarnaan dalam peta, dimana setiap daerah yang saling berbatasan pada peta dibuat berlainan

sehingga mudah untuk dibedakan . Masalah ini selanjutnya mengembang menjadi teorema - teorema menarik dan berujung pada 4 warna, yang salah satunya menyatakan "bilangan kromatik graf planar tidak boleh lebih dari 4"[9],[11]. Teorema ini muncul pertama kali sebagai suatu pemikiran oleh Prancis Guthrie, mantan murid dari Agustus de Morgan pada tahun 1952. Masalah pewarnaan pada graf juga dapat diterapkan pada bidang lain, contohnya pencocokan pola, penentuan frekuensi untuk radio. Pada artikel ini akan pelajari operasi pewarnaan titik untuk beberapa graf khusus yang meliputi graf roda W_n , graf kipas F_n , graf helm H_n , graf anti prisma H_n , dan graf prisma H_n .

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menentukan pewarnaan titik adalah dengan menggunakan *Greedy Algorithm*.

- START
- Pilih titik tertentu (lebih baik pilih titik awal sesuai dengan notasi dari titik sebuah graf)
- Warnai titik tertentu tersebut dengan warna 1 dan dilanjutkan ke titik-titik lainnya sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.
- Warnai sisa titik-titik lainnya dengan warna 2 sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.
- Lanjutkan dengan teknik yang sama dengan warna lebih besar satu tingkat di atasnya sampai semua titik terwarnai dan warnanya adalah mencapai γ dimana γ adalah arnwa terbesar yang minimal. Maka γ sebagai bilangan kromatik pewarnaan titik.
- STOP

Selanjutnya untuk mengetahui apakah bilangan kromatik yang didapat merupakan bilangan yang kecil maka di sesuaikan dengan menggunakan *Teorema Vizing*.

Theorem 1 Teorema (Vizing 1964). *Jika G adalah graph sederhana, maka bilangan kromatik pewarnaan titiknya $\chi(G)$ berada pada interval ini*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Hasil dan Pembahasan

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait vertex colouring untuk beberapa graf khusus dan operasinya, seperti graf roda (W_n), graf kipas $W_d(m_n)$, graf helm (h_4), graf antiprisma $h(m)$, dan graf prisma $h(m)$.

Theorem 2 *Bilangan kromatik graf roda W_n dengan $n \geq 5$ adalah $\chi(W_n) = 4$*

Bukti. Graf roda adalah graf yang memiliki himpunan titik $V = \{P, x_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E = \{Px_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$, dimana $p = |V| = n + 1$, $q = |E| = 2n$. Warnai titik-titiknya dengan

$$f(p) = 1,$$

dan

$$f(x_i) = \begin{cases} 2; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 3; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 4; i = n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf roda memiliki $\chi(W_d) = 4$ sehingga memenuhi $\chi(G) \leq \Delta(G)$. □

Theorem 3 *Bilangan kromatik graf kipas F_n dengan $n \geq 4$ adalah $\chi(F_n) = 3$*

Bukti. Graf kipas adalah graf yang memiliki himpunan titik $V = \{P, x_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E = \{Px_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ untuk i ganjil, dimana $p = |V| = n + 1$, $q = |E| = \frac{3n}{2}$. Warnai titik - titiknya dengan

$$f(p) = 1$$

dan

$$f(x_i) = \begin{cases} 2; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 3; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf kipas memiliki $\chi(F_n) = 3$. □

Theorem 4 *Bilangan kromatik graf helm H_n dengan $n \geq 4$ adalah $\chi(H_n) = 3$*

Bukti. Graf helm adalah graf yang memiliki himpunan titik $V = \{P, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E = \{Px_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup$

$\{x_n x_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dimana $p = |V| = 2n + 1$, $q = |E| = 3n$. warnai titik -titiknya dengan

$$f(p) = 1$$

dan

$$f(x_i) = \begin{cases} 2; 1 \leq i \leq n, i, \text{ genap} \\ 3; 1 \leq i \leq n, i, \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 1; 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf helm $\chi(H_n) = 3$, dan memenuhi $\chi(G) \leq \Delta(G)$. □

Theorem 5 *Bilangan kromatik graf anti prisma H_m dengan $m \geq 4$ adalah $\chi(H_m) = 4$*

Bukti. Graf anti prisma adalah graf yang memiliki himpunan titik $V = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i - 1; 2 \leq i \leq n\} \cup \{x_1 y_n\} \cup \{y_i y_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\}$, dimana $p|V| = 2n$, $q = |E| = 4n$. warnai titik - titiknya dengan

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 2; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

dan

$$f(y_i) = \begin{cases} 3; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 4; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

Terbukti jika graf anti prisma memiliki bilangan kromatik $\chi(H_m) = 4$, dan memenuhi $\chi(G) \leq \Delta(G)$. □

Theorem 6 *Bilangan kromatik graf prisma H_m dengan $m \geq 5$ yaitu $\chi(H_m) = 4$*

Bukti. Graf prisma adalah graf yang memiliki himpunan titik $V = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_i + 1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\}$, dimana $p = |V| = 2n$, $q = |E| = 3n$. warnai titik - titik nya dengan

$$f(x_i) = \begin{cases} 1; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 2; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 3; i = n; i \text{ ganjil} \end{cases}$$

dan

$$f(y_i) = \begin{cases} 1; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 4; i = n; i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Terbukti jika bilangan kromatik graf prisma memiliki $\chi(\mathbf{H}_m) = 4$, dan memenuhi $\chi(G) \leq \Delta(G)$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini kita akan di review kembali bilangan kromatik pada beberapa graf khusus dan operasinya, berdasarkan hasil penelitian kita simpulkan bahwa untuk graf roda W_n dengan $n \geq 5$ didapatkan bilangan kromatik sebesar $\chi(W_n) = 4$, graf kipas F_n dengan $n \geq 4$ kita dapatkan bilangan kromatik nya sebesar $\chi(F_n) = 3$, graf helm H_n untuk $n \geq 4$ kita dapatkan bilangan kromatiknya sebesar $\chi(H_n) = 3$, graf anti prisma H_m untuk $m \geq 4$ kita dapatkan bilangan kromatiknya sebesar $\chi(H_m) = 4$, dan graf prisma \mathbf{H}_m untuk $m \geq 5$ kita dapatkan bilangan kromatiknya sebesar $\chi(\mathbf{H}_m) = 4$, serta Batas bawah untuk graf G teratur berderajat = 1, Batas atas untuk graf G teratur berderajat $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

References

- [1] Hiryanto, H dan Thio, Js. 2011. Pengembangan Metode graph Untuk University Course Time Tabling Problem Pada Fakultas Teknologi Informasi Universitas Taruma Negara, Universitas Taruma Negara.
- [2] Mulya, F. 2013. "Perencanaan Jadwal Dengan Graf Colouring". Bandung. Institut Teknonogi Bandung.
- [3] Liu Changjuan, Zhu, E. 2014. "General Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs". School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China
- [4] Malaguti, E., Toth. 2009. "A survey on vertex coloring problems". University of Bologna Viale Risorgimento, Bologna, Italy
- [5] Korman, Samuel, M. "Face The graph Colouring Problem". Operational Research Unit. Departemen Of Industry. London.

- [6] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.
- [7] Diady,M. 2010."Linear programming formulation of the vertex colouring problem". Int. J. Mathematics in Operational Research, Vol. 2, No. 3, 2010.
- [8] Held ,S,Etc. 2010."Safe Lower Bounds For Graph Coloring".Research supported by NSF Grant CMMI-0726370 and ONR Grant N00014-08-1-1104.
- [9] Fister,I,Etc. 2000."A Hybrid Artificial Bee Colony Algorithm for Graph 3-Coloring".Research supported by NSF Grant CMMI-0726370 and ONR Grant N00014 – 08 – 1 – 1104
- [10] Gualandi,S,Malucelli,F. 2011."A simple branching scheme for Vertex Coloring Problems".aUniversit'a di Pavia, Dipartimento di Matematica, via Ferrata 1, Pavia. bPolitecnico di Milano, Dipartimento di Elettronica ed Informazione, Piazza L. da Vinci 32, Milano.
- [11] Thomassen,C,Etc. 1989."Tight Bounds on the Chromatic Sum of a Connected Graph".Journal of Graph Theory, Vol. 13, No 3. 353-357(1989)