Rainbow Connection Hasil Operasi Graf

Muhlisatul mahmudah[2], Dafik[1,3]

[1]CGANT-University of Jember
[2]Department of Mathematics FMIPA University of Jember
Maxlisa742@gmail.com
[3]Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Misalkan G adalah graf terhubung yang konektif dan sederhana. Amalgamasi dari graf G yang dinotasikan dengan $Amal(G, e, n)$, adalah kombinasi graf G yang berpusat di satu sisi e sebagai porosnya. Selanjutnya joint graph $G = G_1 + G_2$ adalah kombinasi dua graf G_1 dan G_2 dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) + E(G_2) \cup \{uv|u\epsilon V(G_1), v\epsilon V(G_2)\}$. Dan terakhir shackle graf tribun yang dinotasikan $G = shack\ (Tribun, n)$ yaitu untuk setiap $i\ \epsilon\ [1, n]$ dengan G_i isomorfik dengan graf Tribun $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$, $Shack(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ dinamakan shackle dari $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$. Suatu $u - v$ *path* P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. *Rainbow connection number* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Pada makalah ini akan dikaji tentang berapa bilangan *rainbow connection* untuk graf Buku Segiempat $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$,graf Kipas $\mathcal{K}_n$ dan graf $G = shack(Tribun, n)$.

Key Words : *Graf Operasi, Rainbow Path, Rainbow Connection Number.*

Pendahuluan

Perkembangan teori graf saat ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secara aplikatif seperti dalam ilmu jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, musik, dan ilmu-ilmu lainnya. Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah pengoperasian graf dan rainbow connection. Graf yang dihasilkan dari pengoperasian graf yaitu gabungan dari dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan sebuah graf. Sedangkan untuk *Rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2006 oleh Chartrand dkk [2]. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial dan didefinisikan pewarnaan sisi $c : (EG) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}\ k\epsilon N$. Sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u-v$ path P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

Konsep *rainbow connection* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam bilangan *rainbow connection*. Pengoperasian dilakukan pada graf Cycle C_4, graf Path P_n dengan graf komplit K_1 dan graf Tribun $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$. Untuk graf Cycle C_4 dilakukan operasi $Amalga-masi$, untuk graf Path P_n dengan graf komplit K_1 dilakuan operasi *joint*, lihat [4] [5]. Sedangkan untuk graf Tribun dilakukan pengoperasian shackle yaitu $G = shack$ $(Tribun, n)$.

Amalgamasi pada graf Cycle C_4 yaitu $Amal(C_4, e, n)$ yang dinotasikan $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ seperti pada figure 1.

Figure 1: Graf $Amal(C_4, e, n)$ yang dinotasikan $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$

Untuk graf Path P_n dengan graf komplit K_1 dilakukan operasi $Joint$. $Joint$ antara graf P_n dengan K_1 yang dinotasikan $P_n + K_1$ menjadi seperti figure 2. $P_n + K_1$ dimana V $(\mathcal{K}_n) = V(P_n) \cup V(K_1)$ dan $E(\mathcal{K}_n)$= $E(P_n) + E(K_1) \cup uv|u\epsilon V(P_n), v\epsilon V(K_1)$

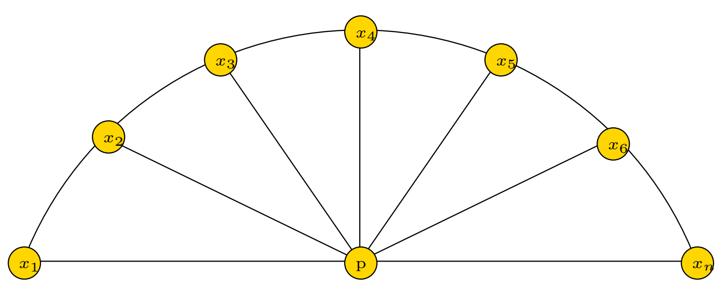

Figure 2: $P_n + K_1$ disimbolkan dengan $\mathcal{K}_n$

Untuk pengorasian graf selanjutnya dimisalkan n adalah bilangan bulat positif dan graf belenggu (Shackle) dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \cdots, G_n)$ sebagai sebuah graf yang dibentuk dari k graf terhubung taktrivial $G_1, G_2, \cdots, G_n$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, n]$ dengan $|s-t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, n-1]$, G_i dan G_{i+t} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $n-1$ titik penghubung itu semua berbeda. Dalam kasus ini shackle graf Tribun dinotasikan dengan dari $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$=$Shack(Tribun, n)$. Figure 3 merupakan graf $G = shack\ (Tribun, 3)$

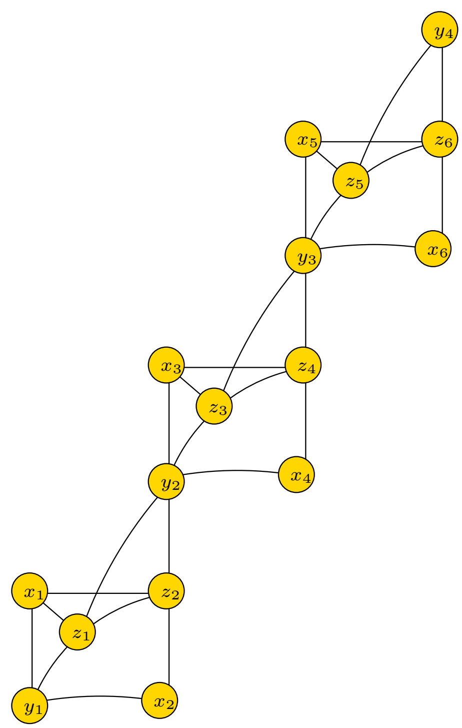

Figure 3: Graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n} = shack\ (Tribun, 3)$

Pada penelitian ini akan dibahas tentang bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G dengan memperhatikan sifat-sifat tertentu dari komplemen graf tersebut.

Teorema yang Digunakan

Beberapa teorema terkait batas atas dan bawah dari rainbow connection.

Theorem 1 *[10] Andaikan G adalah graf terhubung dengan order $n \geq 3$ dan mempunyai degree sekurang-kurangnya $d(G) = 2$. Jika $G \in \{K_3, C_4, K_4-e, C_5\}$, maka $rc(G) \leq n-3$.*

Theorem 2 *[10] Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$. Maka*
(i) jika G adalah interval graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graph, maka $k(G) = rc(G)$
(ii) jika G adalah AT-free, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 3$
(iii) jika G adalah sebuah threshold graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 3$
(iv) jika G adalah chain graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 4$
(v) jika G adalah sebuah sircular arc graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 4$

Hasil dan Pembahasan

Rainbow connention pada graf buku segiempat. Graf buku segiempat dinotasikan dengan $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ berasal dari hasil pengoperasian graf yaitu *Amalgamasi* dari graf cycle C_4 sehingga dapat dituliskan $Amal(C_4, e, n)$. Graf buku segiempat $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ merupakan graf yang terdiri dari n buah segiempat $n \geq 1$ dengan setiap segiempat memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segiempat memiliki 2 titik yang sama.

◇ **Teorema 1** *Untuk $n \geq 1$ rainbow connection number dari graf buku segiempat $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ adalah*

$$rc(\mathfrak{B}_\mathfrak{n}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk n} = 1 \\ 3, & \text{untuk n} = 2 \\ 4, & \text{untuk n} \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf buku segiempat adalah graf yang terdiri dari kumpulan himpunan sisi dan titik dimana himpunan titiknya yaitu $V\ (\mathfrak{B}_\mathfrak{n}) = \{z_1, z_2, x_i, y_i\ ;\ 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisinya $E(\ \mathfrak{B}_\mathfrak{n})= \{z_1z_2\}\cup\{z_1x_i \cup z_1y_i\ ;\ 1 \leq i \leq n\}\cup\{x_iy_i\ ;\ 1 \leq i \leq n\ \}$. Jumlah titik pada graf $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ yaitu $p = |V| = 2n+2$ dan jumlah sisi $q = |E| = 3n + 1$. Berdasarkan Theorem 2 [10] dinyatakan bahwa k($\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$) $\leq$ rc($\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$) $\leq$ ($\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$)+1.

Untuk $n = 1$, graf $\mathfrak{B}_1$ mempunyai diameter 2 maka $2 \leq rc(\mathfrak{B}_1) \leq 3$ Namun demikian terbukti bahwa rc($\mathfrak{B}_1$) ≤ 2. Warnai $\mathfrak{B}_1$ dengan fungsi berikut:

$$f_1(e) = \begin{cases} 1, & e = z_1x_1;\ e = z_2y_1 \\ 2, & e = z_1z_2;\ e = x_1y_1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f_1 : E(\mathfrak{B}_1) \rightarrow \{1,2\}$ dengan $rc(\mathfrak{B}_1) \leq 2$ jadi $rc(\mathfrak{B}_1)$=2.

Untuk $n = 2$, graf $\mathfrak{B}_2$ mempunyai diameter 3 maka $3 \leq rc(\mathfrak{B}_2) \leq 4$, Namun demikian terbukti bahwa rc($\mathfrak{B}_2$) ≤ 3. Warnai $\mathfrak{B}_2$ dengan fungsi berikut:

$$f_2(e) = \begin{cases} 1, & e = z_1x_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2, & e = z_2y_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 3, & e = z_1z_2;\ e = x_iy_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa $f_2 : E(\mathfrak{B}_2) \rightarrow \{1,2,3\}$ dengan rc($\mathfrak{B}_2$) ≤ 3 jadi rc($\mathfrak{B}_2$) =3.

Untuk $n \geq 3$, graf $\mathfrak{B}_3$ mempunyai diameter 4 maka $4 \leq rc(\mathfrak{B}_3) \leq 5$. Namun demikian terbukti bahwa rc($\mathfrak{B}_3$) ≤ 4. Warnai $\mathfrak{B}_3$ figure 4 dengan fungsi berikut:

Figure 4: $\mathfrak{B}_4$ dengan rc$\mathfrak{B}_4$= 4

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & e = z_1x_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2, & e = z_2y_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 3, & e = x_iy_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 4, & e = z_1z_2 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f_3 : E(\mathfrak{B}_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dengan rc($\mathfrak{B}_3$) ≤ 4 jadi rc($\mathfrak{B}_3$)=4.

Berdasarkan tiga kasus diatas maka nilai *rainbow connection* numbernya adalah

$$rc(\mathfrak{B}_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 1 \\ 3, & \text{untuk } n = 2 \\ 4, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

$\square$

Rainbow connention pada graf kipas. Graf kipas berasal dari hasil pengoperasian graf yaitu joint dari graf path P_n denga graf komplit K_1 sehingga dapat dituliskan $P_n + K_1$. Graf kipas $\mathcal{K}_n$ merupakan graf n buah dengan $n \geq 1$.

◇ **Teorema 2** *Untuk* $n \geq 1$ *rainbow connection number dari graf kipas* $\mathcal{K}_n$ *adalah*

$$rc(\mathcal{K}_\mathrm{n}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 1 \\ 2, & \text{untuk } n = 2 \\ 3, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf kipas adalah graf dengan misalkan graf kipas memiliki himpunan titik $V(\mathcal{K}_n)= \{x_i, P; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(\mathcal{K}_n)= \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n, Px_i; 1 \leq i \leq n-1\}$. Jumlah titik pada graf kipas yaitu $p = |V| = n + 1$ dan jumlah sisinya yaitun $q = |E|\ 2n - 1$, Berdasarkan Theorem 2 [10] dinyatakan bahwa k($\mathcal{K}_n$))≤ rc($\mathcal{K}_n$)≤ k($\mathcal{K}_n$)+1.

Untuk $n = 1$, graf $\mathcal{K}_1$ mempunyai diameter 1 maka $1 \leq$ rc($\mathcal{K}_1$)≤ 2, namun demikian terbukti bahwa rc($\mathcal{K}_1$)≤ 1. Warnai $\mathcal{K}_1$ dengan fungsi berikut:

$$f_4(e) = 1,\ e = x_1x_2;\ e = Px_1, Px_2$$

Jelas bahwa $f_4 : E(\mathcal{K}_1)\rightarrow \{1\}$ dengan rc $(\mathcal{K}_1)\leq 1$ jadi $rc(\mathcal{K}_1)= 1$.

Untuk $n = 2$, graf $(\mathcal{K}_2)$ mempunyai diameter 2 maka $2 \leq (\mathcal{K}_2)\leq 3$, Namun demikian terbukti bahwa $rc(\mathcal{K}_2)\leq 2$. Warnai $(\mathcal{K}_2)$ dengan fungsi berikut:

$$f_5(e) = \begin{cases} 1, & e = x_1x_2;\ e = Px_3;\ e = Px_2 \\ 2, & e = Px_1;\ e = x_2x_3 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f_5 : E(\mathcal{K}_2)\rightarrow$ {1,2} dengan $rc(\mathcal{K}_2)\leq 3$ jadi $rc(K_2) = 2$.

Untuk $n \geq 3$, graf $(\mathcal{K}_3)$ mempunyai diameter 3 maka $3 \leq (\mathcal{K}_3) \leq 4$. Namun demikian terbukti bahwa rc($\mathcal{K}_3$) ≤ 3. Warnai $(\mathcal{K}_3)$ figure 5 dengan fungsi berikut:

$$f_6(e) = \begin{cases} 1, & e = x_i x_{i+1} \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2, & e = Px_i \text{ untuk } i \ \epsilon \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n \\ 3, & e = Px_i \text{ untuk } i \ \epsilon \text{ genap } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f_6 : E(\mathcal{K}_n)\rightarrow \{1, 2, 3\}$ dengan $rc(\mathcal{K}_n)\leq 3$ jadi $rc(\mathcal{K}_n)= 3$.

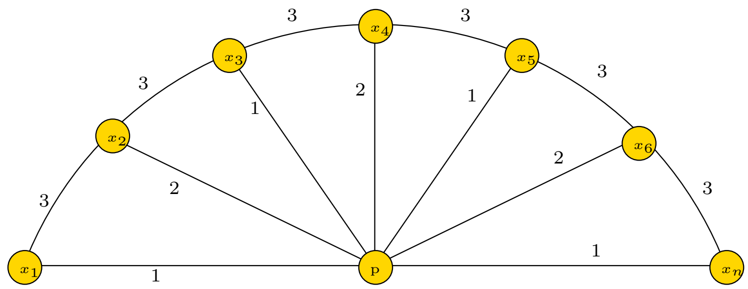

Figure 5: $(\mathcal{K}_7)$ dengan rc$(\mathcal{K}_7)$=3

Berdasarkan tiga kasus diatas maka nilai *rainbow connection*

$$rc(\mathcal{K}_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 1 \\ 2, & \text{untuk } n = 2 \\ 3, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

□

◇ **Teorema 3** *Nilai rainbow connection number untuk graf* $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$= *shack*$(Tribun, n)$ *adalah* $rc(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) = 2n$.

Bukti. Graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$= *shack* $(Tribun, n)$ adalah graf hasil shackle (belenggu) sebuah graf tribun sebanyak n kali sehingga memiliki $V(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) = \{x_i, z, y_j\ ;\ 1 \leq i \leq 2n\ ;1 \leq j \leq n+1\}$ dan himpunan sisinya $E(\mathfrak{T}_\mathfrak{n})$= $\{x_i z_i\ ;\ i\ \epsilon$ ganjil$\}$ $\cup\{y_j x_{2j-1}\ ;\ 1 \leq j \leq j+1\}\cup\{z_i x_{i-1}\ ;i\ \epsilon$ genap; $1 \leq i \leq n\ \}\cup\{y_j z_{2j-1}\ ;\ 1 \leq j \leq n-1\ \}\cup\{z_i z_{i+1}\ ;i\ \epsilon$ ganjil; $1 \leq i \leq n\ \}$ $\cup\{y_j x_{2j}\ ;\ 1 \leq j \leq n-1\ \}\cup\{x_i z_i\ ;i\ \epsilon$ genap; $1 \leq i \leq n\ \}\cup\{z_i y_{j+1}\ ;i\ \epsilon$ ganjil; $1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n+1\ \}\cup\{z_i y_{i+1}\ ;i\ \epsilon$ genap; $1 \leq i \leq n\ ;\ 1 \leq j \leq n+1\ \}$. Jumlah titik pada graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ yaitu $p = |V| = 5n + 1$ dan jumlah sisi $q = |E| = 9n$. Batas atas dan batas bawah dari graf $rc(\mathfrak{T}_\mathfrak{n})$ adalah $k(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) \leq$ rc$(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) \leq k(\mathfrak{T}_\mathfrak{n})$-1. Graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ memiliki diameter $2n$ sehingga berdasarkan Theorem 2, maka $2n \leq rc(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) \leq 2n + 1$. Warnai Graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ dengan fungsi berikut:

$$f_6(e) = \begin{cases} 2i-1, & e = x_iz_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2j-1, & e = y_jx_{2j-1} \text{ untuk } 1 \leq j \leq n-1; \\ & e = y_jz_{2j-1} \text{ untuk } 1 \leq j \leq n+1 \\ 2i, & e = z_iz_{i+1} \text{ untuk } i \in \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n; \\ & e = z_ix_{i-1} \text{ untuk } i \in \text{ genap } 1 \leq i \leq n \\ 2j, & e = y_jx_{2j} \text{ untuk } 1 \leq j \leq n-1; \\ & e = z_iy_{j+1} \text{ untuk } i \in \text{ ganjil } 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq n+1; \\ & e = z_iy_{j+1} \text{ untuk } i \in \text{ genap } 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi edge tersebut warna sisi terbesar muncul pada rc$(\mathfrak{T}_n)$ = $2i$, $e = e = z_iz_{i+1}$ $i \in$ ganjil $1 \leq i \leq n$ dan $e = z_ix_{i-1}$ $i \in$ genap $1 \leq i \leq n$ Jika diambil nilai n terbesar maka warna sisi terbesar dari $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}$ adalah $2n$. Jelas bahwa f_6 :E$(\mathfrak{T}_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, dengan demikian rc$(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) = 2n$. Figure 6 adalah contoh Graf $\mathfrak{T}_n = shack(Tribun, 3)$ dengan rc$(\mathfrak{T}_3) = 6$. □

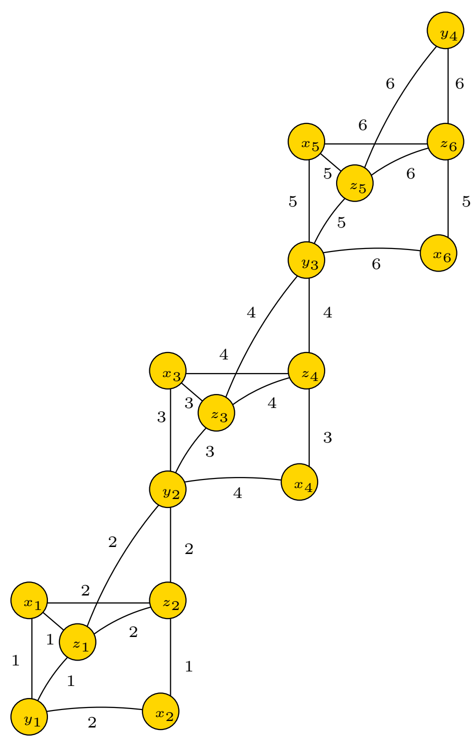

Figure 6: Graf $\mathfrak{T}_n = shack(Tribun, 3)$ dengan rc$(\mathfrak{T}_3) = 6$.

Kesimpulan

Rainbow connection pada 3 sebarang graf yang telah dioperasikan menggunakan *Amalgamasi*, *joint* dan *shacle* didapatkan 3 teorema mengenai *Rainbow connection* yaitu untuk graf buku segiempat $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$:

$$rc(\mathfrak{B}_\mathfrak{n}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 1 \\ 3, & \text{untuk } n = 2 \\ 4, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

untuk graf kipas $\mathcal{K}_n$:

$$rc(\mathcal{K}_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 1 \\ 2, & \text{untuk } n = 2 \\ 3, & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Untuk graf $\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) = shack(Tribun, n)$ didapatkan nilai rainbow connection numbernya adalah $rc(\mathfrak{T}_\mathfrak{n}) = 2n$.

References

[1] B.Bollobas, *External Graph Theory,* Academic Pres, London,1978.

[2] Chartrand, G., Kalamazoo, G.L.Johns, S Valley, K.A. McKeon. 2006. Rainbow Connection in Graphs. New London :London .

[3] Chartrand,G.dkk.2008. *Rainbow Connection in Graph*. Math.Bohem. 133 : 85 – 98.

[4] Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Tidak dipublikasikan (Tesis) Australia : The University of Ballarat.

[5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[6] J.A. Galian. 2009. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. [serial on line]. http:www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf. [17 Agustus 2010].

[7] Li, X. dan Sun, Y. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer, New York.

[8] M. Bača, Y. Lin, M. Miller and R. Simanjuntak, New constructions of magic and antimagic graph labelings, *Utilitas Math.* **60** (2001), 229–239.

[9] N.Alon and J.H.Spencer *The Probabilistic Method,* Second Edition, Wiley, New York,2000.

[10] X.Li and Y.Sun, Rainbow connection numbers of complementary graphs, arXiv:1011.4572v3 [math.CO], 2010.(2008