Super (a, d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering of Amalgamation Graph K_4 and W_4

Novri Anggraeni, Dafik
CGANT-Universitas Jember
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
novrianggraeni93, d.dafik@gmail.com

Abstrak

A graph $G(V, E)$ has a $\mathcal{H}$-covering if every edge in E belongs to a subgraph of G isomorphic to $\mathcal{H}$. An (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering is a total labeling λ from $V(G) \cup E(G)$ onto the integers $\{1, 2, 3, ..., |V(G) \cup E(G)|\}$ with the property that, for every subgraph A of G isomorphic to $\mathcal{H}$ the $\sum A = \sum_{v \in V(A)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(A)} \lambda(e)$ forms an arithmetic sequence. A graph that admits such a labeling is called an (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering. In addition, if $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, ..., |V|\}$, then the graph is called $\mathcal{H}$-super antimagic graph. In this paper we study of amalgamasi graph K_4 and W_4.

Kata Kunci *: $\mathcal{H}$-super antimagic total covering, amalgamasi graf K_4 dan W_4.*

Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg yang tercatat dalam sejarah untuk pertama kali menggunakan graf. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat dipresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola tertentu. Seiring perkembangan jaman dan teknologi, teori graf banyak dijadikan model dalam memecahkan masalah yang ada dalam kehidupan.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964, kemudian Stewart tahun 1966, serta Kotzig dan Rosa 1970.

Stewart 1967 mengenalkan pelabelan ajaib yang biasa dikenal pelabelan sisi titik-ajaib. Setelah itu, banyak peneliti yang memperkenalkan berbagai varian dari pelabelan graf. Gutierrez dan Llado pada tahun 2005 kemudian memperluas pelabelan total sisi-ajaib dengan mempertimbangkan konsep selimut-$\mathcal{H}$ yang diperlukan untuk mendefinisikan suatu graf G yang dikatakan $\mathcal{H}$-ajaib [1], [2], [7].

Sebuah graf $G(V, E)$ mempunyai $\mathcal{H}$-covering jika setiap sisi di E dari sebuah subgraph dari G isomorfis terhadap $\mathcal{H}$. Sebuah (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut adalah sebuh pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ terhadap bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., |V(G) \cup E(G)|\}$ dengan sifat, untuk setiap subgraph A dari G isomorfis terhadap $\mathcal{H}$, $\sum A = \sum_{v \in V(A)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(A)} \lambda(e)$ membentuk barisan aritmatika. Sebuah graf m=yang memiliki pelabelan tersebut disebut (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut. Selanjutnya, jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, ..., |V|\}$, maka graf tersebut dinamakan $\mathcal{H}$-super antimagic graf.

Artikel ini akan menjelaskan tentang pelabelan total covering antimagic dari Amalgamasi Graf K_4 dan W_4. Akan ditentukan kardinalitas dan teorema-teorema tentang super antimagic total covering. Dari uraian tersebut maka penulis menulis judul artikel "Super (a, d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering dari Amalgamasi Graf K_4 dan W_4".

Kardinalitas Graf Amalgamasi K_4 dan W_4

Misalkan H_n= $(V(H_n), E(H_n))$ adalah graf berhingga dengan $|V(H_n)| = p_G$ dan $E(H_n) = q_G$. Daerah definisi dari fungsi ini dapat berupa himpunan titik dan himpunan sisi. Pelabelan tersebut berturut-turut disebut pelabelan titik, pelabelan sisi, atau pelabelan total. Selanjutnya, jumlah semua label yang berkaitan dengan satu elemen pada suatu graf dikatakan total covering dari elemen tersebut. [8], [9], [10].

Berdasarkan uraian diatas, Graf Amalgamasi K_4 dan W_4 adalah graf yang memiliki $V(H_n) = \{P\} \cup \{x_i^j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le 3\}$, $E(H_n) = \{Px_i^j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le 3\} \cup \{x_i^j x_i^{j+1}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le 2\} \cup \{x_i^1 x_i^3\}$, $p_G = |V|$=$3n + 1$, $q_G = |E|$=$6n$, $p_{H_n} = 4$, dan $q_{H_n} = 6$.

Batas Atas d Graf Amalgamasi K_4 dan W_4 adalah $d \le \frac{48(n-1)}{n-1}$. [3]

Lemma 1 *[3] Jika graf $K_n(V, E)$ dan $W_n(V, E)$ adalah super (a, d)-antimagic total covering maka*

$$d \le \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$.

Bukti.

$$(s-1)d \le p_H p_G - \tfrac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \tfrac{q_H - 1}{2} q_H - a$$
$$(s-1)d \le p_H p_G - \tfrac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \tfrac{q_H - 1}{2} q_H - \left(\tfrac{p_H}{2} + \tfrac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \tfrac{q_H}{2} + \tfrac{q_H^2}{2}\right)$$
$$(s-1)d = p_H p_G - \tfrac{p_H^2}{2} + \tfrac{p_H}{2} + q_H q_G - \tfrac{q_H^2}{2} + \tfrac{q_H}{2} - \left(\tfrac{p_H}{2} + \tfrac{p_H^2}{2} + \tfrac{q_H}{2} + \tfrac{q_H^2}{2}\right)$$
$$(s-1)d = p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2$$

$(s-1)d = p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2$
$(s-1)d = (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H$
$d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$

Jadi, untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$ terbukti bahwa $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$

Hasil Penelitian

Metode penelitian yang digunakan yaitu menentukan kardinalitas dari Graf Amalgamasi K_4 dan W_4, menentukan d untuk batas atas Graf Amalgamasi K_4 dan W_4, menentukan fungsi titik, fungsi fungsi sisi, dan fungsi total covering. Berikut akan diuraikan hasil dari penelitian berupa teorema-teorema beserta pembuktiannya terkait total covering graf untuk Graf Amalgamasi K_4 dan W_4.

◇ **Teorema 1** *Jika amalgamasi graf K_4 dan W_4 adalah super antimagic total covering maka graf K_n dan W_n memiliki super $(12n + 9i + 106, 9)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$.*

Bukti. Labeli titik graf K_4 dan W_4 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f(P) = 1$$

$$f(x_i^j) = i + (j-1)n + 1; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f: V(K_n, W_n) \to \{1, 2, \ldots, 3n+1\}$. Kemudian labeli sisi graf K_4 dan W_4 dengan fungsi f yang didefinikan sebagai berikut:

$$f(Px_i^j) = 2n + i + nj + 1; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3$$

$$f(x_i^j x_i^{j+1}) = 3n + i + nj + 17; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2$$

dan

$$f(x_i^1 x_i^3) = n + i + 29$$

Misal W didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf K_4 dan W_4. Berdasarkan penjumlahan label titik dengan label sisinya maka W dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah rumus label titik f dan rumus label sisi f dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$W = f(P) + \sum_{j=1}^{3} f(x_i^j) + \sum_{j=1}^{3} f(Px_i^j) + \sum_{j=1}^{2} f(x_i^j x_i^{j+1}) + f(x_i^1 x_i^3)$
$W = 1 + (3n + 3i + 3) + (6n + 3i + 27) + (2n + 2i + 46) + (n + i + 29)$

$W = 12n + 9i + 106$

Sehingga terbukti bahwa Graf K_n dan W_n memiliki super $(12n + 9i + 106, 9)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$.

◇ **Teorema 2** *Jika amalgamasi graf K_4 dan W_4 adalah super antimagic total covering maka graf K_n dan W_n memiliki super $(14n + 7i + 103, 7)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$.*

Bukti. Labeli titik graf K_4 dan W_4 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f(P) = 1$$

$$f(x_i^j) = i + (j - 1)n + 1; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f: V(K_n, W_n) \to \{1, 2, \ldots, 3n + 1\}$. Kemudian labeli sisi graf K_4 dan W_4 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f(Px_i^j) = 2n + i + nj + 1; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3$$

$$f(x_i^j x_i^{j+1}) = n + i + nj + 17; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2$$

dan

$$f(x_i^1 x_i^3) = 3n - i - 26$$

W didefinisikan sebagai total covering pada amalgamasi graf K_4 dan W_4 berdasarkan penjumlahan label titik dengan label sisinya maka W dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah rumus label titik f dan rumus label sisi f dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$W = f(P) + \sum_{j=1}^{3} f(x_i^j) + \sum_{j=1}^{3} f(Px_i^j) + \sum_{j=1}^{2} f(x_i^j x_i^{j+1}) + f(x_i^1 x_i^3)$

$W = 1 + (3n + 3i + 3) + (6n + 3i + 27) + (2n + 2i + 46) + (3n - i + 26)$

$W = 14n + 7i + 103$

Sehingga terbukti bahwa Graf K_n dan W_n memiliki super $(14n + 7i + 103, 7)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa: Graf K_n dan W_n memiliki super $(12n + 9i + 106, 9)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$, dan Graf K_n dan W_n memiliki super $(14n + 7i + 103, 7)$-antimagic total covering untuk $n \geq 4$.

References

[1] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan, Skripsi, Tidak Dipublikasikan, Universitas Negeri Surabaya, 2014.

[2] Nur Inayah, Pelabelan $(a,d)-H$-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf, Disertasi, Tidak Dipublikasikan, Institut Teknologi Bandung, 2013.

[3] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs, University of Ballarat, 2007.

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 97-107

[6] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[7] M. Baca, Y. Lin, M. Miller and M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, Discrete Math, 2007.

[8] Nur Inayah, Pelabelan $(a,d)-H$-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf, Disertasi, Not Publicated, Institut Teknologi Bandung, 2013.

[9] W.D. Wallis, E.T. Baskoro, M. Miller and Slamin, Edge-magic total labelings, Austral, J. Combin., 2000.

[10] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.