Super *(a,d)*-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill

Sherly Citra W[1,2], Ika Hesti A[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT-Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, `clyqueen@gmail.co.id`
[3]Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember, `hestyarin,` `d.dafik@gmail.com`

Abstract

A graph $G(V,E)$ has a $\mathcal{H}$-covering if every edge in E belongs to a subgraph of G isomorphic to $\mathcal{H}$. An (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering is a total labeling λ from $V(G) \cup E(G)$ onto the integers $\{1,2,3,...,|V(G) \cup E(G)|\}$ with the property that, for every subgraph A of G isomorphic to $\mathcal{H}$ the $\sum A = \sum_{v \in V(A)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(A)} \lambda(e)$ forms an arithmetic sequence. A graph that admits such a labeling is called an (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total covering. In addition, if $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1,...,|V|\}$, then the graph is called $\mathcal{H}$-super antimagic graph. In this paper we study the existence of super *(a,d)*-$\mathcal{H}$-Antimagic total covering of Semi Windmill graph

Key Words *: Super $\mathcal{H}$-antimagic total covering, Semi Windmill.*

Pendahuluan

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedl*áčе*k (1963) sebagai perumusan ide bujur sangkar magic. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakkan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif, elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi.Pelabelan titik pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik yang memenuhi sifat tertentu. Pelabelan sisi pada Graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan yang memenuhi sifat tertentu. Sedangkan pelabelan total pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik dan sisi yang memenuhi sifat tertentu.

Pelabelan suatu graf dikatakan antimagic jika sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif dan jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya. Pelabelan antimagic adalah pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan *edge* sebanyak $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antimagic jika masing-masing *edge* dilabeli dengan $\{1, 2, \ldots, e_G\}$ sehingga bobot verteksnya saling berbeda *pairwise distinct*, dengan sebuah bobot verteks dari verteks v.

Pada tahun 2009, Inayah dkk. mengembangkan suatu pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a,d)-\mathcal{H}$-antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d+, \ldots, +a+(t-1)d\}$. Pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering merupakan fungsi bijektif karena label selimutnya selalu berbeda dan berurutan. Pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana bobot label titik lebih kecil dari label sisinya. Dapat disimpulkan bahwa pelabelan antimagic mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya. Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi $(|V(G)| < |E(G)|)$.

Lemma yang Digunakan

Lemma terkait batas atas dari *Covering*

Lemma 1 *[3] Jika sebuah graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut maka batas atas d adalah $d \leq \frac{(v_G - v_H)v_H + (e_G - e_H)e_H}{s-1}$, untuk $s = |H_i|$, $|V(G)| = v_G$, $|E(G)| = e_G$, $|V(H)| = v_H$, dan $|E(H)| = e_H$.*

Bukti. Misalkan graf G mempunyai pelabelan (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic covering dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1,2,3,4,5,6,...,v+e\}$ maka himpunan bobot sisinya adalah $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a(s-1)d\}$ dimana a merupakan bobot sisi terkecil yang dapat ditulis $\{1+2+\ldots+v_H+(v_G+1)+(v_G+2)+\ldots+(v_G+e_H)\}$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari sisi terbesar adalah $\{v_G + v_G - 1 + v_G - 2 + ... + (v_G - (v_H - 1)) + (v_G + e_G) + (v_G + e_G - 1) + (v_G + e_G - 2) + ... + (v_G + e_G - (e_H - 1))\}$.

Untuk nilai terkecil berlaku:

$$1 + 2 + \cdots + v_H + (v_G + 1) + (v_G + 2) + ... + (v_G + e_H) \leq a$$

$$\frac{v_H}{2}(1 + v_H) + e_H v_G + \frac{e_H}{2}(1 + e_H) \leq a$$

$$\frac{v_H}{2} + \frac{v_H^2}{2} + e_H v_G + \frac{e_H}{2} + \frac{e_H^2}{2} \leq a$$

$$\begin{aligned} a + (s-1)d \leq\ & v_G + v_G - 1 + v_G - 2 + ... + (v_G - (v_H - 1)) + (v_G + e_G) + \\ & (v_G + e_G - 1) + (v_G + e_G - 2) + \ldots + (v_G + e_G - (e_H - 1)). \\ =\ & v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(1 + (v_H - 1)) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(1 + (e_H - 1)). \\ =\ & v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H). \end{aligned}$$

Untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} (s-1)d &\leq v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H) - a \\ &\leq v_H v_G - \tfrac{v_H - 1}{2}(v_H) + e_H v_G + e_H v_G - \tfrac{e_H - 1}{2}(e_H) - (\tfrac{v_H}{2} + \tfrac{v_H^2}{2} + e_H v_G \end{aligned}$$

$$+\frac{e_H}{2} + \frac{e_H^2}{2})$$
$$\leq v_H v_G - \frac{v_H^2}{2} + \frac{v_H}{2} + e_H v_G - \frac{e_H^2}{2} + \frac{e_H}{2} - (\frac{v_H}{2} + \frac{v_H^2}{2} + \frac{e_H}{2} + \frac{e_H^2}{2})$$
$$\leq v_H v_G + e_H v_G - v_H^2 - e_H^2$$
$$\leq v_H v_G - v_H^2 + e_H v_G - e_H^2$$
$$\leq (v_G - v_H)p_H + (e_G - e_H)q_H$$
$$d \leq \frac{(v_G - v_H)p_H + (e_G - e_H)q_H}{(s-1)}.$$

Dari pertidaksamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(v_G - v_H)v_H + (e_G - e_H)e_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut dari berbagai famili graf. □

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini, menjelaskan hasil penelitian mengenai super $(a,d)-\mathcal{H}$-antimagic covering pada graf semi Windmill dengan hasil akhir berupa teorema untuk super $(a,d)-\mathcal{H}$-antimagic covering pada graf semi Windmill. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas (d), label $\mathcal{HAVC}$ ($\mathcal{H}$ *Antimagic Vertex Covering*) atau pelabelan titik(a,d)-selimut antimagic pada graf semi Windmill W_n konektif.

◇ **Teorema 1** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(22n+20,1)$-$(C_3)+e$-antimagic total covering untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_1 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_1(A) & = & 1, & \\
\alpha_1(x_i) & = & 2i, \quad \text{untuk} & 1 \leq i \leq n, \\
\alpha_1(y_{2i-1}) & = & 2i+1, \text{untuk} & 1 \leq i \leq n, \\
\alpha_1(y_{2i}) & = & i+9, \text{untuk} & 1 \leq i \leq n,
\end{array}$$

Pelabelan titik α_1 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_1 : V(W_n) \rightarrow \{1,2,\ldots,3n+1\}$. Jika w_{α_1} merupakan bobot selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $w_{\alpha_1} = f(A) + f(x_i) + f(y_{2i-1}) + f(y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$w_{\alpha_1} = 5i + 11, \quad \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n$$

Kemudian labeli sisi graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_1 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(Ax_i) &= 4n-i+2, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(x_iy_{2i-1}) &= 5n-i+2, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(x_iy_{2i}) &= 6n-i+2, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\
\alpha_1(y_{2i-1}y_{2i}) &= 7n-i+2, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan sisi α_1 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_1 : E(W_n) \to \{3n+2, 3n+3, \ldots, 7n+1\}$. Terakhir, misal W_{α_1} merupakan bobot total selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $W_{\alpha_1} = w_{\alpha_1} + \alpha_1(Ax_i) + \alpha_1(x_iy_{2i-1}) + \alpha_1(x_iy_{2i}) + \alpha_1(y_{2i-1}y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \alpha_1(Ax_i) + \alpha_1(x_iy_{2i-1}) + \alpha_1(x_iy_{2i}) + \alpha_1(y_{2i-1}y_{2i}) \\
&= 5i + 11 + 4n - i + 2 + 5n - i + 2 + 6n - i + 2 + 7n - i + 2 \\
&= 22n + i + 19, \ 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total ini dengan mudah dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{\alpha_1} = \{22n+20, 22n+21, \ldots, 23n+19\}$. Kebenaran $U_n = 23n+19$ dapat diturunkan dari $U_n = a+(n-1)b = 22n+20+(n-1)1 = 23n+19$. Sehingga terbukti bahwa graf semi Windmill W_n untuk $n \geq 1$, memiliki pelabelan super $(22n+20, 1)$-(C_3+e)-antimagic total selimut.$\square$

$\diamond$ **Teorema 2** *Graf semi Windmill* W_n *memiliki super super* $(23n+13, 3)$-(C_3+e)*-antimagic total covering untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Labeli titik graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_2 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(A) &= 1, \\
\alpha_2(x_i) &= 2i, \quad \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n, \\
\alpha_2(y_{2i-1}) &= 2i+1, \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n, \\
\alpha_2(y_{2i}) &= i+9, \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}$$

Pelabelan titik α_2 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_2 : V(W_n) \to \{1, 2, \ldots, 3n+1\}$. Jika w_{α_2} merupakan bobot selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $w_{\alpha_2} = f(A) + f(x_i) + f(y_{2i-1}) + f(y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$w_{\alpha_2} = 5i + 11, \quad \text{untuk}\, 1 \leq i \leq n$$

Kemudian labeli sisi graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_2 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} \alpha_2(Ax_i) & = & 3n+i+1, & \text{untuk} 1 \le i \le n \\ \alpha_2(x_iy_{2i-1}) & = & 9n-2i-6, & \text{untuk} 1 \le i \le n \\ \alpha_2(x_iy_{2i}) & = & 4n+i+1, & \text{untuk} 1 \le i \le n \\ \alpha_2(y_{2i-1}y_{2i}) & = & 7n-2i+3, & \text{untuk} 1 \le i \le n \end{array}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan sisi α_2 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_2 : E(W_n) \to \{3n+2, 3n+3, \dots, 7n+1\}$. Terakhir, misal W_{α_2} merupakan bobot total selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $W_{\alpha_2} = w_{\alpha_2} + \alpha_2(Ax_i) + \alpha_2(x_iy_{2i-1}) + \alpha_2(x_iy_{2i}) + \alpha_2(y_{2i-1}y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + \alpha_2(Ax_i) + \alpha_2(x_iy_{2i-1}) + \alpha_2(x_iy_{2i}) + \alpha_2(y_{2i-1}y_{2i}) \\ &= 5i+11+3n+i+1+9n-2i-6+4n+i+1+7n-2i+3 \\ &= 23n+3i+10,\ 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total ini dengan mudah dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \le i \le n$ didapat himpunan $W_{\alpha_2} = \{23n+13, 23n+16, \dots, 26n+10\}$. Kebenaran $U_n = 23n+19$ dapat diturunkan dari $U_n = a+(n-1)b = 23n+13+(n-1)3 = 23n+19$. Sehingga terbukti bahwa graf semi Windmill W_n untuk $n \ge 1$, memiliki pelabelan super $(23n+13, 3)$-(C_3+e)-antimagic total selimut.□

◇ **Teorema 3** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(25n+17, 5)$-(C_3+e)-antimagic total covering untuk $n \ge 1$.*

Bukti. Labeli titik graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_3 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} \alpha_3(A) & = & 1, & \\ \alpha_3(x_i) & = & 2i, & \text{untuk} \quad 1 \le i \le n, \\ \alpha_3(y_{2i-1}) & = & 2i+1, & \text{untuk} \quad 1 \le i \le n, \\ \alpha_3(y_{2i}) & = & i+9, & \text{untuk} \quad 1 \le i \le n, \end{array}$$

Pelabelan titik α_3 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_3 : V(W_n) \to \{1, 2, \dots, 3n+1\}$. Jika w_{α_3} merupakan bobot selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $w_{\alpha_3} = f(A) + f(x_i) + f(y_{2i-1}) + f(y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$w_{\alpha_3} = 5i + 11, \quad \text{untuk}\, 1 \le i \le n$$

Kemudian labeli sisi graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_3 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_3(Ax_i) &= 4n - i + 2, && \text{untuk} 1 \le i \le n \\
\alpha_3(x_i y_{2i-1}) &= 6n - 3i + 7, && \text{untuk} 1 \le i \le n \\
\alpha_3(x_i y_{2i}) &= 12n - 3i - 18, && \text{untuk} 1 \le i \le n \\
\alpha_3(y_{2i-1} y_{2i}) &= 3n - 3i + 20, && \text{untuk} 1 \le i \le n
\end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan sisi α_3 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_3 : E(W_n) \to \{3n+2, 3n+3, \ldots, 7n+1\}$. Terakhir, misal W_{α_3} merupakan bobot total selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $W_{\alpha_3} = w_{\alpha_3} + \alpha_3(Ax_i) + \alpha_3(x_i y_{2i-1}) + \alpha_3(x_i y_{2i}) + \alpha_3(y_{2i-1} y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3} + \alpha_3(Ax_i) + \alpha_3(x_i y_{2i-1}) + \alpha_3(x_i y_{2i}) + \alpha_3(y_{2i-1} y_{2i}) \\
&= 5i + 11 + 4n - i + 2 + 6n - 3i + 7 + 12n - 3i - 18 + 3n - 3i + 20 \\
&= 25n - 5i + 22, \ 1 \le i \le n
\end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total ini dengan mudah dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \le i \le n$ didapat himpunan $W_{\alpha_3} = \{25n+17, 25n+12, \ldots, 30n+12\}$. Kebenaran $U_n = 30n+12$ dapat diturunkan dari $U_n = a + (n-1)b = 25n + 17 + (n-1)5 = 30n + 12$. Sehingga terbukti bahwa graf semi Windmill W_n untuk $n \ge 1$, memiliki pelabelan super $(25n+17, 5)$-$(C_3 + e)$-antimagic total selimut.$\Box$

$\diamond$ **Teorema 4** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(18n+27, 7)$-(C_3+e)-antimagic total covering untuk $n \ge 1$.*

Bukti. Labeli titik graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_4 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_4(A) &= 1, \\
\alpha_4(x_i) &= i + 1, \quad \text{untuk} \quad 1 \le i \le n, \\
\alpha_4(y_{2i-1}) &= i + 5, \text{untuk} \quad 1 \le i \le n, \\
\alpha_4(y_{2i}) &= i + 9, \text{untuk} \quad 1 \le i \le n,
\end{aligned}$$

Pelabelan titik α_4 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_4 : V(W_n) \to \{1, 2, \ldots, 3n+1\}$. Jika w_{α_4} merupakan bobot selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $w_{\alpha_4} = f(A) + f(x_i) + f(y_{2i-1}) + f(y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$w_{\alpha_4} = 3i + 16, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$

Kemudian labeli sisi graf semi Windmill W_n dengan fungsi α_4 yang definisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_4(Ax_i) &= 3n + i + 1, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\ \alpha_4(x_i y_{2i-1}) &= 4n + i + 1, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\ \alpha_4(x_i y_{2i}) &= 5n + i + 1, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \\ \alpha_4(y_{2i-1} y_{2i}) &= 6n + i + 1, \quad \text{untuk} 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa pelabelan sisi α_4 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif $\alpha_4 : E(W_n) \rightarrow \{3n+2, 3n+3, \ldots, 7n+1\}$. Terakhir, misal W_{α_4} merupakan bobot total selimut dari graf semi Windmill W_n, maka $W_{\alpha_4} = w_{\alpha_4} + \alpha_4(Ax_i) + \alpha_4(x_i y_{2i-1}) + \alpha_4(x_i y_{2i}) + \alpha_4(y_{2i-1} y_{2i})$. Dengan mudah dapat diturunkan bahwa :

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4} &= w_{\alpha_4} + \alpha_4(Ax_i) + \alpha_4(x_i y_{2i-1}) + \alpha_4(x_i y_{2i}) + \alpha_4(y_{2i-1} y_{2i}) \\ &= 3i + 16 + 3n + i + 1 + 4n + i + 1 + 5n + i + 1 + 6n + i + 1 \\ &= 18n + 7i + 20, \ 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total ini dengan mudah dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{\alpha_4} = \{18n+27, 18n+34, \ldots, 25n+20\}$. Kebenaran $U_n = 25n+20$ dapat diturunkan dari $U_n = a + (n-1)b = 18n + 27 + (n-1)7 = 25n + 20$. Sehingga terbukti bahwa graf semi Windmill W_n untuk $n \geq 1$, memiliki pelabelan super $(18n+27, 7)$-$(C_3 + e)$-antimagic total selimut.$\square$

Kesimpulan

Pada penelitian ini hasil yang didapatkan adalah fungsi bijektif dari pelabelan total covering antimagic pada graf semi Windmill konektif sebagai berikut:

- Pelabelan total super $(22n+20, 1)$-$C_3 + e$-covering antimagic pada graf semi Windmill $W_{m,n}$ untuk $n \in \geq 1$.
- Pelabelan total super $(23n+13, 3)$-$C_3 + e$-covering antimagic pada graf semi Windmill $W_{m,n}$ untuk $n \in \geq 1$.
- Pelabelan total super $(25n+17, 5)$-$C_3 + e$-covering antimagic pada graf semi Windmill $W_{m,n}$ untuk $n \in \geq 1$.
- Pelabelan total super $(18n+27, 7)$-$C_3 + e$-covering antimagic pada graf semi Windmill $W_{m,n}$ untuk $n \in \geq 1$.

References

[1] Abdussakir, Nisnawati, N. dan Nawandi, Fifi. *Teori Graf*. UIN Malang Press. 2009.

[2] Chandra, F.E. *Pelabelan Total Super*(a, d)*-Sisi Antimagic pada Graf Buku Segitiga*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember. 2011.

[3] Dafik, Pelabelan super (a, d)-H antimagic total covering pada graf khusus diskonektif dan diskonektif, *Working Paper.*, CGANT-Universitas Jember, 2014.

[4] Dafik. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graph.* CSS Jember National Library (KDT).**3**, 445. 2013.

[5] Dafik, A. Fajriatin dan K. Miladiyah. *Super Antimagicness of a Well-Defined Graph,Saintifika.*14, 106-116. 2012.

[6] Dafik, Mirka.M, dkk. *On super* (a, d)*-edge-antimagic total lebelling of disconnected graphs.* Discrete Mathematics 309 (15). 2009.

[7] Dafik,Slamin, dkk. *Super edge antimagic total lebelling of disjoint union of triangular ladder and lobster graphs.* Indonesian Mathematics Society. 2009.

[8] Hartsfield, N. and Ringel, G. *Pearls in Graph Theory.* Boston-San Diego-NewYork-London: Academic Press. 1990.

[9] Inayah, N., Salman, A.N.M. and Simanjuntak, R. *On (a,d)-H-antimagic H-decomposition. The Journal of Combinatorial Mathematics* dan *Combinatorial Computing* 71, 273-281. 2013.

[10] Inayah, N. *Pelabelan (a,d)-H-antiajaib pada beberapa kelas graf.* Bandung: Institut Teknologi Bandung. 2013.

[11] Roosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Application.* New York: The McGraw-Hill Companies. 2003.