Super (a, d)-Face Antimagic Total Labeling on Shackle of Cycle with Cord C_6^1

Farah Rezita Nurtaatti[1], Dafik[1,2]

[1]CGANT-University of Jember
[2]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
e-mail: farah.rezita@gmail.com, d.dafik@gmail.com

Abstrak

Suatu graf G memiliki orde p, size q dan face s dapat dikatakan (a, d)-face antimagic total bilamana terdapat pemetaan dari $f : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p + q + s\}$, sedemikian hingga bobot totalnya $W_f = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (s - 1)d\}$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a, bedanya d dan jumlah wajah sisinya s. Graf tersebut dapat dikatakan super apabila label titiknya adalah $f(V) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ dan label sisinya $f(E) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \ldots, q\}$. Dalam penelitian ini, akan dikaji mengenai keberadaan super (a, d) face antimagic total dari Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1.

Kata Kunci: *Super (a, d)-face antimagic total labeling, Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1.*

Pendahuluan

Sejak dua ratus tahun telah ditemukan kajian tentang teori graf yang memiliki terapan sampai saat ini. Teori graf tersebut digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek. Menurut catatan sejarah, seorang matematikawan Swiss, L. Euler pada tahun 1736 yang pertama kali menorehkan kajian teori graf. Beliau membahas tentang masalah jembatan Konigsberg [10].

Melalui perkembangan jaman, teori graf semakin luas dan semakin diperhitungkan aplikasinya. Terutama dalam jaman teknologi digital dimana keberada jaringan komputer semakin diperhitungkan. Pemakaian teori graf semakin dibutuhkan. Teori graf berkembang mulai dari optimal graf, pewarnaan graf dan pelabelan graf, lihat [4, 5] untuk lebih detail. Seorang matematikawan Koi Weng Ling yang pertama kali menawarkan konsep pelabelan antimagic total face. Misal $G = G(V, E, F)$ adalah sebuah graf dengan titik $V = V(G)$, sisi $E = E(G)$, dan face $F = F(G)$, maka Koi Weng Ling menggambarkan pelabelan face antimagic total. Graf roda dan prisma memiliki pelabelan face tipe (1,1,0), sedangkan grid dan sarang lebah memiliki pelabelan face antimagic total tipe (1,1,1), untuk hasil-hasil lainnya lihat [1, 9, 3, 8, 6, 7, 2].

Suatu graf G memiliki orde p, size q dan face s dapat dikatakan (a, d)-face antimagic total bilamana terdapat pemetaan dari $f : V(G) \cup E(G) \cup F(G)$

$\rightarrow \{1, 2, ..., p+q+s\}$, sedemikian hingga bobot totalnya $W_f = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(s-1)d\}$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a, bedanya d dan jumlah wajah sisinya s. Graf tersebut dapat dikatakan super apabila label titiknya adalah $f(V) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ dan label sisinya $f(E) \rightarrow \{p+1, p+2, \ldots, q\}$. Dalam penelitian ini, akan dikaji mengenai keberadaan super (a, d) face antimagic total dari Shackle graf siklus dengan busur C_6^1.

Lemma 1 *Jika $G = Shack(C_6^1, e, n)$ adalah super (a, d)-face antimagic total maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s}{s-1}$$

dimana $H = (V', E')$ adalah sub graf dari G dan $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. Nilai bobot terkecil didapat apabila face dari graf itu dilabeli mulai dari bilangan terkecil sehingga $1 + 2 + ... + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + ... + (p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) = \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + \frac{q_H}{2}(p_G + 1 + p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) = \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1) \leq a$.

Sedangkan nilai terbesar berlaku apabila bobot labelnya adalah:

$$\begin{aligned}
a + (s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) \\
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) - a \\
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) - \\
&\quad (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1)) \\
(s-1)d &= p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + s - (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + 1) \\
(s-1)d &= p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + s - \frac{p_H}{2} - \frac{p_H^2}{2} - \frac{q_H}{2} - \frac{q_H^2}{2} - 1 \\
(s-1)d &= p_H p_G + q_H q_G - \frac{2p_H^2}{2} - \frac{2q_H^2}{2} - 1 + s \\
(s-1)d &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 - 1 + s \\
(s-1)d &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s}{s-1}
\end{aligned}$$

Corollary 1 *Misal $G = (C_6^1, e, n)$ memiliki super (a, d)-face antimagic total labeling maka batas atas d adalah $d \leq 21$.*

Bukti. Graf siklus dengan busur C_6^1 adalah graf yang memiliki $V(G) = \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq 2n+1\}$, $E(G) = \{x_i x_{i+1}, x_i y_{i+2}, y_i y_{i+1}, 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq 2n+1\}$,

$p_G = |V|$=$4n + 2$, $q_G = |E|$=$6n + 1$, $p_H = 4$, dan $q_H = 4$. Sehingga shackle graf siklus dengan busur C_6^1, dengan $p_G = |V|$=$4n + 2$, $q_G = |E|$=$6n + 1$, $p_H = 4$, $q_H = 4$ dan $s = |H| = 2n$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
d &\le \frac{((4n+2)-4)4 + ((6n+1)-4)4 - 1 + 2n}{2n-1} \\
d &= \frac{(4n+2-4)4 + (6n+1-4)4 - 1 + 2n}{2n-1} \\
d &= \frac{(4n-2)4 + (6n-3)4 - 1 + 2n}{2n-1} \\
d &= \frac{(16n - 8 + 24n - 12 - 1 + 2n}{2n-1} \\
d &= \frac{(42n-21)}{2n-1} \\
d &\le 21
\end{aligned}$$

Hasil Penelitian

Dalam bagian ini akan disajikan hasil pelabelan super face d-antimagic dengan tipe $(1, 1, 1)$ untuk shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dan beberapa d yang mungkin. Hasil dari penelitian ini berupa teorema untuk $d = 2, 7, 9, 11, 13$.

$\diamond$ **Teorema 1** *Graf* $G = Shack(C_6^1, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(49n+16, 2)$-*face antimagic total untuk* $n \ge 3$.

Bukti. Labeli titik shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_1(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & 1 \le i \le 2n+1, \text{untuk}\, iganjil \\ \frac{2n+i+2}{2}; & 1 \le i \le 2n, \text{untuk}\, igenap \end{cases}$$

$$f_1(y_i) = \begin{cases} \frac{6n+3+i}{2}; & 1 \le i \le 2n+1, \text{untuk}\, iganjil \\ \frac{4n+2+i}{2}; & 1 \le i \le 2n, \text{untuk}\, igenap \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : V(G) \to \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Misal w_{f_1} adalah bobot sisi super face antimagic total shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \ge 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_1} = \begin{cases} \frac{5}{n} + 4i + 1; & 1 \le i \le 2n \\ \frac{8}{n} + 2i + 6; & 1 \le i \le 2n \end{cases}$$

Labeli sisi shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_1(y_iy_{i+1}) = \frac{6n+3-i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

$$f_1(x_ix_{i+1}) = \frac{8n+3-i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

$$f_1(x_iy_i) = \frac{18n-i+9}{2}; 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i \text{ganjil}$$

$$f_1(y_iy_{i+1}) = \frac{20n+9-i}{2}; 1 \leq i \leq 2n_1, \text{untuk}\, i \text{ganjil}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : \ E(G) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 10n+3\}$. Misal W_{f_1} adalah bobot total sisi super face antimagic total shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_1} = 39n + i + 11; 1 \leq i \leq 2n$$

Labeli face shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$F(f_i) = 10n + 3 + i; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : \ F(G) \rightarrow \{10n+4, 10n+5, \ldots, 12n+3\}$. Misal WF_{f_1} adalah bobot total face antimagic total shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_1} = w_{f_1} + W_{f_1} + F(f_i) = 49n + 14 + 2i$. Apabila WF_{f_1} diuraikan untuk $1 \leq i \leq 2n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_1} = \{49n+16, 49n+18, \ldots, 53n+14\}$. Terbukti bahwa shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(49n + 16, 2)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

$\diamond$ **Teorema 2** *Graf* $G = Shack(C_6^1, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(40n+24, 7)$-*face antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Labeli titik shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_2 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_2(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i\,ganjil \\ \frac{2n+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i\,genap \end{cases}$$

$$f_2(y_i) = \begin{cases} \frac{6n+3+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i\,ganjil \\ \frac{4n+2+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i\,genap \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Misal w_{f_2} adalah bobot sisi super face antimagic total shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_2} = \begin{cases} \frac{5}{n} + 4i + 1; & 1 \leq i \leq 2n \\ \frac{8}{n} + 2i + 6; & 1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

Labeli sisi shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_2 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_2(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{8n+4+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, igenap \\ \frac{14n+5+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, iganjil \end{cases}$$

$$f_2(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} \frac{12n+5+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, iganjil \\ \frac{18n+6+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, igenap \end{cases}$$

$$f_2(x_i y_{i+2}) = \frac{10n+5+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, i\text{ganjil}$$

$$f_2(x_i y_i) = \frac{16n+5+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, iganjil$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2: E(G) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 10n+3\}$. Misal W_{f_2} adalah bobot total sisi super face antimagic total shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = 28n + 8i + 13; 1 \leq i \leq 2n$$

Labeli face shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_2 yang didefinikan sebagai berikut:

$$F(f_i) = 12n + 4 - i; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2: F(G) \rightarrow \{12n+3, 12n+2, \ldots, 10n+4\}$. Misal WF_{f_2} adalah bobot total face antimagic total labelling shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_2} = w_{f_2} + W_{f_2} + F(f_i) = 40n+7i+17$. Apabila WF_{f_2} diuraikan untuk $1 \leq i \leq 2n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_2} = \{40n+24, 40n+31, \ldots, 54n+17\}$. Terbukti bahwa shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(40n+24, 7)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

◇ **Teorema 3** *Graf* $G = Shack(C_6^1, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(38n+25, 9)$-*face antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Labeli titik shakle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_3 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_3(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i ganjil \\ \frac{2n+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \end{cases}$$

$$f_3(y_i) = \begin{cases} \frac{6n+3+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i ganjil \\ \frac{4n+2+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Misal w_{f_3} adalah bobot sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_3} = \begin{cases} \frac{5}{n} + 4i + 1; & 1 \leq i \leq 2n \\ \frac{8}{n} + 2i + 6; & 1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

Labeli sisi shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_3 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_3(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{8n+4+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \\ \frac{14n+5+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, i ganjil \end{cases}$$

$$f_3(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} \frac{12n+5+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, i ganjil \\ \frac{18n+6+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \end{cases}$$

$$f_3(x_i y_{i+2}) = \frac{10n+5+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, i\text{ganjil}$$

$$f_3(x_i y_i) = \frac{16n+5+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i ganjil$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : E(G) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 10n+3\}$. Misal W_{f_3} adalah bobot total sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_3} = 28n + 8i + 13; 1 \leq i \leq 2n$$

Labeli face shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_3 yang didefinikan sebagai berikut:

$$F(f_i) = 10n + 3 + i; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : F(G) \rightarrow \{10n+4, 10n+5, \ldots, 12n+3\}$. Misal WF_{f_3} adalah bobot total face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_3} = w_{f_3} + W_{f_3} + F(f_i) = 28n + 46 + 9i$. Apabila WF_{f_3} diuraikan untuk $1 \leq i \leq 2n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_3} = \{38n + 25, 38n + 34, \ldots, 56n + 16\}$. Terbukti bahwa shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(38n + 25, 9)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

◇ **Teorema 4** *Graf $G = Shack(C_6^1, e, n)$ memiliki pelabelan super* $(36n+26, 11)$-*face antimagic total untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_4 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_4(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i ganjil \\ \frac{2n+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \end{cases}$$

$$f_4(y_i) = \begin{cases} \frac{6n+3+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, i ganjil \\ \frac{4n+2+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, i genap \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n + 2\}$. Misal w_{f_4} adalah bobot sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_4} = \begin{cases} \frac{5}{n} + 4i + 1; & 1 \leq i \leq 2n \\ \frac{8}{n} + 2i + 6; & 1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

Labeli sisi shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_4 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_4(x_i x_{i+1}) = \frac{8n + 4 + i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

$$f_4(x_i y_i) = \frac{6n + 2 + i}{2}; 1 \leq i \leq 2n + 1, \text{untuk}\, i ganjil$$

$$f_4(x_i y_{i+2}) = \frac{6n + 2 + 2i + 2}{4}; 1 \leq i \leq 2n - 1, \text{untuk}\, i\text{ganjil}$$

$$f_4(y_i y_{i+1}) = \frac{8n + 3 + i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : E(G) \rightarrow \{4n + 3, 4n + 4, \ldots, 10n + 3\}$. Misal W_{f_4} adalah bobot total sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_4} = 24n + 12i + 11; 1 \leq i \leq 2n$$

Labeli face shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_4 yang didefinikan sebagai berikut:

$$F(f_i) = 12n + 4 - i; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : \ F(G) \rightarrow \{12n+3, 12n+2, \ldots, 10n+4\}$. Misal WF_{f_4} adalah bobot total face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_4} = w_{f_4} + W_{f_4} + F(f_i) = 36n + 15 + 11i$. Apabila WF_{f_4} diuraikan untuk $1 \leq i \leq 2n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_4} = \{36n+26, 38n+27, \ldots, 58n+15\}$. Terbukti bahwa shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(36n + 26, 11)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

◇ **Teorema 5** *Graf* $G = Shack(C_n^1, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(34n+27, 13)$-*face antimagic total untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Labeli titik shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_5 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_5(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, iganjil \\ \frac{2n+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, igenap \end{cases}$$

$$f_5(y_i) = \begin{cases} \frac{6n+3+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, iganjil \\ \frac{4n+2+i}{2}; & 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk}\, igenap \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : \ V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Misal w_{f_5} adalah bobot sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_5} = \begin{cases} \frac{5}{n} + 4i + 1; & 1 \leq i \leq 2n \\ \frac{8}{n} + 2i + 6; & 1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

Labeli sisi shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_5 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_5(x_i x_{i+1}) = \frac{8n+4+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

$$f_5(x_i y_i) = \frac{6n+2+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n+1, \text{untuk}\, iganjil$$

$$f_5(x_i y_{i+2}) = \frac{6n+2+2i+2}{4}; 1 \leq i \leq 2n-1, \text{untuk}\, i\text{ganjil}$$

$$f_5(y_iy_{i+1}) = \frac{8n+3+i}{2}; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : E(G) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 10n+3\}$. Misal W_{f_5} adalah bobot total sisi super face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_5} = 24n + 12i + 11; 1 \leq i \leq 2n$$

Labeli face shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 dengan fungsi f_5 yang didefinikan sebagai berikut:

$$F(f_i) = 10n + 3 + i; 1 \leq i \leq 2n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : F(G) \rightarrow \{12n+3, 12n+2, \ldots, 10n+4\}$. Misal WF_{f_5} adalah bobot total face antimagic total shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 untuk $n \geq 1$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_5} = w_{f_5} + W_{f_5} + F(f_i) = 34n + 14 + 13i$. Apabila WF_{f_5} diuraikan untuk $1 \leq i \leq 2n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_5} = \{34n + 27, 34n + 40, \ldots, 60n + 14\}$. Terbukti bahwa shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(34n + 27, 13)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang didapat, maka kita dapat menyimpulkan bahwa: pelabelan super face d-antimagic dengan tipe $(1, 1, 1)$ untuk

- Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(49n + 16, 2)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.
- Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(40n + 24, 7)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.
- Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(38n + 25, 9)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.
- Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(36n + 26, 11)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.
- Shackle dari graf siklus dengan busur C_6^1 memiliki pelabelan super $(34n + 27, 13)$-face antimagic total untuk $n \geq 1$.

Namun demikian untuk d lainnya dengan batas atas $d \leq 21$, peneliti belum menemukannya. Oleh karena itu diajukan masalah terbuka berikut:

Open Problem 1 *Tentukan apakah shackle dari graf siklus dengan busur* C_6^1 *memiliki super* (a, d)*-face antimagic total labeling selain* $d \in \{2, 7, 9, 11, 13\}$ *untuk* $d \leq 21$.

References

[1] M. Baca, F. Bertault, J.A. MacDougall, M. Miller, R. Simanjuntak and Slamin, Vertex-antimagic total labelings of graphs, *Discuss Math.*, Graph Theory 23 (2003), 67-83.

[2] Baca, M., Baskoro, E.T., Cholily,, Y.M., Jendrol, S., Lin, Y., Miller, L., Ryan, J., Simanjuntak, R., Slamin., and Sugeng, K.A. (2005), Conjectures and open problems on face antimagic evaluations on graphs. , MIHMI , 11, No. 2, (175-192).

[3] M. Baca, F. Bashir and A. Semanicova, Face antimagic labelings of antiprisms, *Utilitas Math.*, (To appear)

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Baca, On super (a; d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, 309 (2009), 4909-4915..

[5] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.

[6] Y. Lin, Slamin, M. Baca and M. Miller, On d-antimagic labelings of prisms, Ars Combin, 72 (2004), 6576.

[7] Y. Lin and K.A. Sugeng, Face antimagic labelings of plane graphs P_a^b , Ars Combin. 80 (2006), (259-273).

[8] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory.* Chapman and Hall, 2008.

[9] K.A. Sugeng, M. Miller, Y. Lin and M. Baca, Face antimagic labelings of prisms, Utilitas Math., 71 (2006), 269-286.

[10] D.B. West, An Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, 1996