Rainbow Connection Number of Special Graph and Its Operations

Artanty Nastiti, Dafik
CGANT-University of Jember
Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
nastitiartanty02, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Let G be a simple graph. An edge-coloring of a graph G is rainbow connected if, for any two vertices of G, there are k internally vertex-disjoint paths joining them, each of which is rainbow and then a minimal numbers of color G is required to make rainbow connected. The rainbow connection numbers of a connected graph G, denoted $rc(G)$. In this paper we will discuss the rainbow connection number $rc(G)$ for some special graph and its operations, namely crown product of $P_2 \bigodot Pr_n$, tensor product of $P_2 \bigotimes W_n$.

Kata Kunci : *Edge-colouring, Rainbow Connection, Spesial Graph, Graphs Operations.*

Introduction

Perkembangan teori graf saat ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secara aplikatif seperti dalam ilmu jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, musik, dan ilmu-ilmu lainnya lihat [1], [2], [5], [7], [8]. Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah *rainbow connection*. Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand, Johns, McKeon and Zha. Konsep ini termotifasi dari informasi dan komunikasi antara suatu agen pemerintah. Departemen Homeland Amerika Serikat yang dibentuk 2003 sebagai respon atas ditemukannya kelemahan transfer informasi setelah serangan teroris 11 September 2001. Suatu informasi membutuhkan perlindungan dikarenakan terhubung langsung ke security negara, sehingga diharuskan juga terdapat prosedur yang memberikan ijin untuk mengakses antara agen-agen pemerintahan. Setiap jalur transfer informasi diperlukan suatu *password* dan $firewall$ angka yang cukup besar untuk melindungi informasi dari serangan pengganggu. Sehinggu muncul pertanyaan, berapa angka minimal *passowrd* dan $firewall$ yang dibutuhkan setiap dua orang agen saat melakukan jalur transfer informasi, disamping itu juga tidak terjadi pengulangan *password* dari masing-masing agen. Lebih detail lihat [9], [10], [11], [12].

Situasi tersebut dapat dimodelkan dengan teori graf. Misalkan G adalah graf terhubung *nontrivial* dengan $edge-coloring$ $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ dimana sisi-sisi yang bertetangga mungkin mempunyai warna yang sama. Suatu jalur disebut *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi pada G yang diwarnai sama. Sebuah *edge* $-$ *coloring* graf G adalah *rainbow connected* jika sebarang dua titik yang terhubung dihubungkan oleh jalur *rainbow*. Jelas bahwa jika graf G adalah *rainbow connected* maka pasti terhubung. Sehingga *rainbow connection number* dari graf terhubung G, dinotasikan $rc(G)$, sebagai perwanaan minimum yang dibutuhkan untuk membuat graf G *rainbow connected*. Lihat [3], [4], [6].

Penelitian terkait rainbow connection berkembang cukup pesat. Pada artikel ini akan dipelajari tentang *rainbow connection number* pada graf khusus dan operasinya yaitu graf $P_2 \bigodot Pr_n$ dan $P_2 \bigotimes W_n$. Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan Syafrizal menghasilkan teorema berikut.

Theorem 1 *[1] [6] Andaikan G dan H adalah dua buah graf terhubung,*

$$rc(G \bigodot H) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong K_m \\ 2, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m \text{ dengan } 3 \leq m \leq 6 \\ 3, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m \text{ dengan } m \geq 7 \\ & G \cong P_2 \text{ dan } H = K_m \text{ dengan } m \geq 1 \end{cases}$$

Teorema yang Digunakan

Beberapa teorema terkait batas atas dan bawah dari rainbow connection.

Theorem 2 *[3] Andaikan G adalah graf terhubung dengan order $n \geq 3$ dan mempunyai degree sekurang-kurangnya $d(G) = 2$. Jika $G \in \{K_3, C_4, K_4 - e, C_5\}$, maka $rc(G) \leq n - 3$.*

Theorem 3 *[3] Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$. Maka*
(i) jika G adalah interval graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graph, maka $k(G) = rc(G)$
(ii) jika G adalah AT-free, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 3$
(iii) jika G adalah sebuah threshold graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 3$
(iv) jika G adalah chain graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 4$
(v) jika G adalah sebuah sircular arc graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 4$

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait rainbow connection untuk operasi graf $P_2 \bigodot Pr_n$.

◇ **Teorema 0.1** *Untuk* $n \geq 2$, *rainbow connection number untuk operasi graf* $P_2 \bigodot Pr_n$ *adalah*

$$rc(P_2 \bigodot Pr_n) = 4; untuk\, n \geq 3$$

Bukti. Operasi graf $P_2 \bigodot Pr_n$ adalah graf yang memiliki memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1};\ i = 1\} \cup \{x_i x_{ij};\ 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i1} x_{in};\ 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1};\ 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n-1\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = 2(1+n)$ dan $q = |E| = 2(2n+1) - 1$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(\bar{P}_2 \bigodot Pr_n) \leq rc(P_2 \bigodot Pr_n) \leq k(\bar{P}_2 \bigodot Pr_n) + 1$.
Untuk $n \geq 2$ graf $\bar{P}_2 \bigodot Pr_n$ memiliki diameter 4 maka $4 \leq rc(\bar{P}_2 \bigodot Pr_n) \leq 5$ namun demikian terbukti bahwa $rc(\bar{P}_2 \bigodot Pr_n) = 4$. akan diwarnai dengan fungsi berikut:
Untuk n ϵ genap

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_{i,1}x_{i,n}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq 2 \\ 1, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq n-1 \\ 1, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 2, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq n \\ 2, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq n \\ 2, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 2, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq n-1 \\ 3, e = x_{i,j}x_{i,j+1}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n-1 \\ 4, e = x_i x_{i+1}; & dengan\, i = 1 \end{cases}$$

Untuk n ϵ ganjil

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_{i,1}x_{i,n}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq 2 \\ 1, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq n \\ 1, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 2, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq n-1 \\ 2, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq n-1 \\ 2, e = x_i x_{i,j}; & \text{dengan}\, i = 2, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq n \\ 3, e = x_{i,j}x_{i,j+1}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n-1 \\ 4, e = x_i x_{i+1}; & dengan\, i = 1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_2 \bigodot Pr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ karena $rc(P_2 \bigodot Pr_n) \leq 4$. Maka, $rc(\bar{P}_2 \bigodot Pr_n) = 4$. □

◇ **Teorema 0.2** *Untuk* $n \geq 4$, *rainbow connection number untuk operasi graf* $P_2 \bigotimes W_n$ *adalah*

$$rc(P_2 \bigotimes W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil; untuk\, n \geq 4$$

Bukti. Operasi graf $P_2 \bigotimes W_n$ adalah graf yang memiliki memiliki himpunan titik $V = \{P, x_j; 1 \leq j \leq 2, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_j x_{j+1};\ j = 1\} \cup \{x_j y_i;\ 1 \leq j \leq 2, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{P x_j;\ 1 \leq j \leq 2\} \cup \{P x_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1};\ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = n+3$ dan $q = |E| = 2n+3$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(\bar{P}_2 \bigotimes W_n) \leq rc(P_2 \bigotimes W_n) \leq k(\bar{P}_2 \bigotimes W_n) + 1$.
Untuk $n \geq 4$ graf $\bar{P}_2 \bigotimes W_n$ memiliki diameter $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ maka $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq rc(\bar{P}_2 \bigotimes W_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ namun demikian terbukti bahwa $rc(\bar{P}_2 \bigotimes W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_j x_{j+1}, j = 1; e = P x_j; e = P y_i; e = x_j y_i; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ i, e = y_i y_{i+1}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i, e = y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i} y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + i + 1}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, e = y_n y_1 & \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_2 \bigotimes W_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ karena $rc(P_2 \bigotimes W_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Maka, $rc(\bar{P}_2 \bigotimes W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini akan diriview kembali rainbow connection number $rc(G)$ pada graf khusus dan operasinya Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Untuk graf $P_2 \bigodot Pr_n$, didapatkan rainbow connection number adalah

$$4\ \ untuk\, n \geq 3$$

- Untuk graf $P_2 \bigotimes W_n$, didapatkan rainbow connection number adalah

$$\lceil \frac{n}{2} \rceil\ \ untuk\, n \geq 4$$

References

[1] Gary Chartrand and Ping Zhang. Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.

[2] A.B. Ericksen, A matter of security, Graduating Engineer and Computer Careers, (2007), 24-28.

[3] X.Li and Y.Sun, Rainbow connection numbers of complementary graphs, arXiv:1011.4572v3 [math.CO], 2010.

[4] X.Li and Y.Sun, Rainbow connections of graphs a survey, arXiv:1101.5747v2 [math.CO], 2011.

[5]] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, and P. Zhang, Rainbow connection in graphs, *Math. Bohem.*, 133, No. 2, (2008), 85–98.

[6] Sy, Syafrizal, and Estetikasari, Dewi, On Rainbow Connection for Some Corona Graphs, *Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 100, (2013), 4975–4979.

[7] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.

[8] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.

[9] L. Sunil Chandran, Anita Das, D. Rajendraprasad, and N.M. Varma. Rainbow Connection Number and Connected Dominating Sets, arXiv:1010.2296v1, [math.CO], 2010

[10] Ingo Schiermeyer, On Minimally Rainbow k-Connected Graphs, Elsevier B.V. All rights reserved, 2011

[11] Sourav Chakraborty, Eldar Fischer, Arie Matsliah, and Raphael Yuster, Hardness and algorithms for rainbow connection. Journal of Combinatorial Optimization, pages 118, 2009.

[12] M. Basavaraju, L. Sunil Chandran, D. Rajendraprasad, and A. Ramaswamy, Rainbow Connection Number of Graph Power and Graph Products, arXiv:1104.4190v2 [math.CO], 2011