Super (a, d)-Face Antimagic Total Labeling of Shackle of C_5

Siska Binastuti[2], Dafik[1,2]

[1]CGANT-University of Jember
[2]Department of Mathematics Education FKIP University of Jember
e-mail : siskabinastuti@rocketmail.com, d.dafik@gmail.ac.id

Abstrak

Suatu graf G memiliki orde p, size q dan face s dapat dikatakan (a, d)-face antimagic total bilamana terdapat pemetaan dari $f : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p + q + s\}$, sedemikian hingga bobot totalnya $W_f = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (s - 1)d\}$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a, bedanya d dan jumlah wajah sisinya s. Graf tersebut dapat dikatakan super apabila label titiknya adalah $f(V) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ dan label sisinya $f(E) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \ldots, p\}$. Dalam penelitian ini, akan dikaji mengenai keberadaan super (a, d) face antimagic total dari Shackle Graf C_5.

Kata Kunci *: Super (a, d)-face antimagic total labeling, Shackle dari C_5.*

Pendahuluan

Seorang matematikawan Swiss, L. Euler pada tahun 1736 membuat jurnal pertama kali tentang teori graf yang membahas tentang masalah jembatan Konigsberg. Dengan perubahan jaman, teori graf semakin luas dan beragam, diantaranya adalah tentang pelabelan graf ([10]). Beberapa definisi tentang pelabelan, terutama terkaitan dengan pelabelan antimagic dapat dibaca di [1], [4], [5]. Dalam artikel ini akan membahas tetang keberadaan pelabelan super (a, d)-face antimagic total. Graf roda dan prisma memiliki pelabelan face tipe (1,1,0), sedangkan grid dan sarang lebah memiliki pelabelan face antimagic total tipe (1,1,1), untuk hasil-hasil lainnya lihat [9, 3, 8, 6, 7, 2].

Suatu graf G memiliki orde p, size q dan face s dapat dikatakan (a, d)-face antimagic total bilamana terdapat pemetaan dari $f : V(G) \cup E(G) \cup F(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p + q + s\}$, sedemikian hingga bobot totalnya $W_f = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (s - 1)d\}$ membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a, bedanya d dan jumlah wajah sisinya s. Graf tersebut dapat dikatakan super apabila label titiknya adalah $f(V) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$ dan label sisinya $f(E) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p\}$, lihat [9],[3].

Makalah ini mengkaji keberadaan super d-antimagic pelabelan untuk graf Shackle C_5 pada d tertentu. Dalam hal ini, artikel ini dikhususkan untuk belajar super(a,d) face antimagic pelabelan tipe $(1, 1, 1)$ untuk Shackle Graf C_5. Sebelum disajikan beberapa hasil berikut ini akan disajikan batas atas d sedemikian hingga graf Shackle C_5 memiliki super (a, d)-face antimagic total.

Lemma 1 *Jika graf* $G = Shack(C_5, e, n)$ *adalah super* (a, d)*-face antimagic total maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s}{s-1}$$

dimana $H = (V', E')$ *adalah sub graf dari* G *dan* $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. Nilai bobot terkecil didapat apabila face dari graf itu dilabeli mulai dari bilangan terkecil sehingga $1 + 2 + ... + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + ... + (p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) = \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + \frac{q_H}{2}(p_G + 1 + p_G + q_H) + (p_G + q_G + 1) = \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1) \leq a$.

Sedangkan nilai terbesar berlaku apabila bobot labelnya adalah:

$$\begin{aligned}
a + (s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) \\
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) - a \\
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2} p_H + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2} q_H + (p_G + q_G + s) - \\
& \quad (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + (p_G + q_G + 1)) \\
(s-1)d &= p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + s - (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} + 1) \\
(s-1)d &= p_G p_H - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + s - \frac{p_H}{2} - \frac{p_H^2}{2} - \frac{q_H}{2} - \frac{q_H^2}{2} - 1 \\
(s-1)d &= p_H p_G + q_H q_G - \frac{2p_H^2}{2} - \frac{2q_H^2}{2} - 1 + s \\
(s-1)d &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 - 1 + s \\
(s-1)d &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H - 1 + s}{s-1}
\end{aligned}$$

□

Corollary 1 *Misal* $G = Shack(C_5, e, n)$ *memiliki super* (a, d)*-face antimagic total labeling maka batas atas* d *adalah* $d \leq 36$.

Bukti. Graf Shackle C_5 adalah graf yang memiliki $V(G) = \{x_i, y_i, z_j, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n\}$, $E(G) = \{x_i x_{i+1}, y_i z_i, y_{i+1} z_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n+1\}$, $p_G = |V|$=$3n+2$, $q_G = |E|$=$4n+1$, $p_H = 5$, dan $q_H = 5$. Sehingga Graf Shackle C_5, dengan $p_G = |V|$=$3n+2$, $q_G = |E|$=$4n+1$, $p_H = 5$, $q_H = 5$ dan $s = n$

memenuhi hal berikut:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{((3n+2)-5)5+((4n+1)-5)5-1+n}{n-1} \\
d &= \frac{(3n-3)5+(4n-4)5-1+n}{n-1} \\
d &= \frac{(n-1)3.5+(n-1)4.5+(n-1)}{n-1} \\
d &= \frac{(n-1)15+(n-1)20+(n-1)1}{n-1} \\
d &= \frac{(n-1)(15+20+1)}{n-1} \\
d &\leq 36
\end{aligned}$$

□

Hasil Penelitian

Dalam bagian ini akan disajikan pelabelan super face d-antimagic dengan tipe $(1,1,1)$ untuk Shackle Graf C_5 dan beberapa d yang mungkin. Hasil dari penelitian ini berupa teorema untuk $d = 1, 3, 5$ Hasil dari penelitian ini didapatkan teorema terkait face labeling graf untuk Shackle Graf C_5

◇ **Teorema 0.1** *Graf* $G = Shack(C_5, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(40n + 26, 1)$*-face antimagic total.*

Bukti. Labeli titik Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_1(x_i) = i; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_1(y_i) = n+i+1; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_1(z_i) = 2n+i+2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : V(G) \to \{1, 2, \ldots, 3n+2\}$. Misal w_{f_1} adalah bobot sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_1} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi G dengan fungsi f_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_1(y_{i+1}z_i) = 5n - 2i + 3; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_1(y_iz_i) = 5n - 2i + 4; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_1(x_i x_{i+1}) = 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_1(x_i y_i) = 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : E(G) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \ldots, 7n + 3\}$. Misal W_{f_1} adalah bobot total sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $W_{f_1} = 33n + 22; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_1(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : f(G) \rightarrow \{7n+4, 7n+5, \ldots, 8n+3\}$. Misal WF_{f_1} adalah bobot total face Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_1} = w_{f_1} + W_{f_1} + f_1(f_i) = 40n + 25 + i$. Apabila WF_{f_1} diuraikan untuk $1 \leq i \leq n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_1} = \{40n+26, 40n+27, \ldots, 41n+25\}$. Terbukti bahwa Shackle Graf C_5 memiliki pelabelan super $(40n + 26, 1)$-face antimagic total. $\square$

$\diamond$ **Teorema 0.2** *Graf* $G = Shack(C_5, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(38n + 28, 2)$*-face antimagic total.*

Bukti. Labeli titik Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_2(x_i) = i; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f_2(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f_2(z_i) = 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n + 2\}$. Misal w_{f_2} adalah bobot sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_2} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi G dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_2(y_{i+1} z_i) = 6n + i + 3, 1 \leq i \leq n,$$

$$f_2(y_i z_i) = 3n + i + 2, 1 \leq i \leq n,$$

$$f_2(x_i x_{i+1}) = 6n - 2i + 4; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_2(x_iy_i) = 6n - 2i + 5; 1 \leq i \leq n+1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : E(G) \to \{3n+3, 3n+4, \ldots, 7n+3\}$. Misal W_{f_2} adalah bobot total sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $W_{f_2} = 38n + 2i + 26; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_2(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

. Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : f(G) \to \{7n+4, 7n+5, \ldots, 8n+3\}$. Misal WF_{f_2} adalah bobot total face Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_2} = w_{f_2} + W_{f_2} + f_2(f_i) = 38n + 2i + 26$. Apabila WF_{f_2} diuraikan untuk $1 \leq i \leq n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_2} = \{38n+28, 38n+30, \ldots, 40n+26\}$. Terbukti bahwa Shackle Graf C_5 memiliki pelabelan super $(38n+28, 2)$-face antimagic total. □

◇ **Teorema 0.3** *Graf* $G = Shack(C_5, e, n)$ *memiliki pelabelan super* $(39n+27, 3)$*-face antimagic total.*

Bukti. Labeli titik Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_3(x_i) = i; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_3(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_3(z_i) = 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : V(G) \to \{1, 2, \ldots, 3n+2\}$. Misal w_{f_3} adalah bobot sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_3} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n.$$

Labeli sisi G dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_3(y_{i+1}z_i) = 6n + i + 3, 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(y_iz_i) = 3n + i + 2, 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(x_ix_{i+1}) = 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_3(x_iy_i) = 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n+1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : E(G) \to \{3n+3, 3n+4, \dots, 7n+3\}$. Misal W_{f_3} adalah bobot total sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $W_{f_3} = 32n + 2i + 21; 1 \leq i \leq n$

Labeli face Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_3 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_3(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

. Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : f(G) \to \{7n+4, 7n+5, \dots, 8n+3\}$. Misal WF_{f_3} adalah bobot total face Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_3} = w_{f_3} + W_{f_3} + f_3(f_i) = 39n + 3i + 24$. Apabila WF_{f_3} diuraikan untuk $1 \leq i \leq n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_3} = \{39n+27, 39n+30, \dots, 42n+24\}$. Terbukti bahwa Shackle Graf C_5 memiliki pelabelan super $(39n+27, 3)$-face antimagic total. □

◇ **Teorema 0.4** *$G = Shack(C_5, e, n)$ memiliki pelabelan super $(37n+29, 4)$-face antimagic total.*

Bukti. Labeli titik Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_4 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_4(x_i) = i; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_4(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n+1$$

$$f_4(z_i) = 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : V(G) \to \{1, 2, \dots, 3n+2\}$. Misal w_{f_4} adalah bobot sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:$w_{f_4} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n$.

Labeli sisi G dengan fungsi f_4 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_4(y_{i+1}z_i) = 6n + i + 3; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_4(y_iz_i) = 4n + 2i + 2; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_4(x_ix_{i+1}) = 3n + i + 2; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_4(x_iy_i) = 6n - 2i + 5; 1 \leq i \leq n+1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : E(G) \to \{3n+3, 3n+4, \dots, 7n+3\}$. Misal W_{f_4} adalah bobot total sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $W_{f_4} = 29n + 5i + 21; 1 \leq i \leq n$. Labeli face Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_4 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_4(f_i) = 8n - i + 4; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_4 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_4 : \ f(G) \rightarrow \{8n+3, 8n+2, \ldots, 7n+4\}$. Misal WF_{f_4} adalah bobot total face Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_4} = w_{f_4} + W_{f_4} + f_4(f_i) = 37n + 4i + 25$. Apabila WF_{f_4} diuraikan untuk $1 \leq i \leq n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_4} = \{37n+29, 37n+33, \ldots, 41n+25\}$. Terbukti bahwa Shackle Graf C_5 memiliki pelabelan super $(37n + 29, 4)$-face antimagic total. □

◇ **Teorema 0.5** *$G = Shack(C_5, e, n)$ memiliki pelabelan super $(38n+28, 5)$-face antimagic total.*

Bukti. Labeli titik Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_5 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_5(x_i) = i; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f_5(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n + 1$$

$$f_5(z_i) = 2n + i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : \ V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n + 2\}$. Misal w_{f_5} adalah bobot sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:$w_{f_5} = 4n + 5i + 6; 1 \leq i \leq n$.

Labeli sisi G dengan fungsi f_5 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_5(y_{i+1}z_i) = 4n - i + 2; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_5(y_iz_i) = 4n - i + 3; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_5(x_ix_{i+1}) = 5n + 2 + i; 1 \leq i \leq n,$$

$$f_5(x_iy_i) = 7n + 4 - i; 1 \leq i \leq n + 1,$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : \ E(G) \rightarrow \{3n + 3, 3n + 4, \ldots, 7n + 3\}$. Misal W_{f_5} adalah bobot total sisi super face antimagic total Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $W_{f_5} = 31n + 4i + 20; 1 \leq i \leq n$. Labeli face Shackle Graf C_5 dengan fungsi f_5 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f_5(f_i) = 7n + i + 3; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_5 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_5 : \ f(G) \rightarrow \{7n+4, 7n+5, \ldots, 8n+3\}$. Misal WF_{f_5} adalah bobot total face Shackle Graf C_5 untuk $n \geq 5$, maka dapat diturunkan sebagai berikut: $WF_{f_5} = w_{f_5} + W_{f_5} + f_5(f_i) = 38n + 5i + 23$. Apabila WF_{f_5} diuraikan untuk $1 \leq i \leq n$ maka diperoleh himpunan $WF_{f_3} = \{38n+28, 38n+33, \ldots, 43n+23\}$. Terbukti bahwa Shackle Graf C_5 memiliki pelabelan super $(38n + 28, 5)$-face antimagic total. $\square$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian di atas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat pelabelan super d-face antimagic total labeling dengan tipe $(1, 1, 1)$ untuk beberapa d berikut:

- Shackle dari graf C_5 memiliki pelabelan super $(40n+26, 1)$-face antimagic total.
- Shackle dari graf C_5 memiliki pelabelan super $(38n+28, 2)$-face antimagic total.
- Shackle dari graf C_5 memiliki pelabelan super $(39n+27, 3)$-face antimagic total.
- Shackle dari graf C_5 memiliki pelabelan super $(37n+29, 4)$-face antimagic total.
- Shackle dari graf C_5 memiliki pelabelan super $(38n+28, 5)$-face antimagic total.

Namun demikian untuk d lainnya dengan batas atas $d \leq 36$, peneliti belum menemukannya. Oleh karena itu diajukan masalah terbuka berikut:

Open Problem 1 *Tentukan apakah graf shackle dari C_5 memiliki super (a, d)-face antimagic total labeling selain $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk $d \leq 36$.*

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah bersedia membimbing serta memberikan kritik dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] M. Baca, F. Bertault, J.A. MacDougall, M. Miller, R. Simanjuntak and Slamin, Vertex-antimagic total labelings of graphs, *Discuss Math.*, Graph Theory 23 (2003), 67-83.

[2] Baca, M., Baskoro, E.T., Cholily,, Y.M., Jendrol, S., Lin, Y., Miller, L., Ryan, J., Simanjuntak, R., Slamin., and Sugeng, K.A. (2005), Conjectures and open problems on face antimagic evaluations on graphs. , MIHMI , 11, No. 2, (175-192).

[3] M. Baca, F. Bashir and A. Semanicova, Face antimagic labelings of antiprisms, *Utilitas Math.*, (To appear)

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Baca, On super (a; d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, 309 (2009), 4909-4915..

[5] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.

[6] Y. Lin, Slamin, M. Baca and M. Miller, On d-antimagic labelings of prisms, Ars Combin, 72 (2004), 6576.

[7] Y. Lin and K.A. Sugeng, Face antimagic labelings of plane graphs P_a^b , Ars Combin. 80 (2006), (259-273).

[8] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall, 2008.

[9] K.A. Sugeng, M. Miller, Y. Lin and M. Baca, Face antimagic labelings of prisms, Utilitas Math., 71 (2006), 269-286.

[10] D.B. West, An Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, 1996.