Pengembangan Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Khusus

Nindya Laksmita Dewi, Dafik
CGANT-University of Jember
Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
nindyalaksmita@yahoo.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Misal diketahui graf sederhana, konektif dan tak berarah G, visualisasi dari graf G adalah objek dinyatakan dengan titik atau vertex, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau edge. Salah satu aplikasi yang berkaitan dengan graf adalah pewarnaan graf (*graph colouring*) yang terdiri dari pewarnaan titik, sisi, dan wilayah. Dalam makalah ini akan dibahas pewarnaan titik, yaitu memberikan warna pada titik-titik dari suatu operasi graf sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai operasi graf dinyatakan dengan bilangan kromatik. Dalam makalah ini akan dikaji tentang bilangan kromatik pada operasi graf khusus.

Kata Kunci *: Pewarnaan Titik, Bilangan Kromatik, Operasi Graf.*

Pendahuluan

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu. Cabang matematika terkini terkait dengan sain komputer yang cukup terkenal adalah Teori Graf, lihat aplikasi graf pada [1, 2, 3]. Salah satu topik yang menarik pada teori graf adalah masalah dalam pewarnaan titik pada graf. Terdapat berbagai jenis tipe pewarnaan dalam graf, salah satunya adalah pewarnaan titik pada operasi graf. Pewarnaan graf *(graph coloring)* adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu. Pewarnaan titik*(Vertex Coloring)*. Pewarnaan titik *(edge coloring)* adalah memberi warna berbeda pada titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama [4, 5, 7, 8]. Jumlah warna minimal $\varphi(G)$ yang dapat digunakan untuk mewarnai titik-titik dalam suatu graph G disebut bilangan khromatik G. Graf yang digunakan dalam penelitian fokus pada beberapa operasi graf khusus yaitu Crown Graph $(G \odot H)$.[6, 9]

Teorema yang Digunakan

Theorem 1 (Vizing Theorem). *Jika G adalah graph sederhana, maka bilangan kromatik pewarnaan titiknya $\chi(G)$ berada pada interval ini $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.*

Hasil Penelitian

Berikut ini akan disajikan beberapa temuan baru terkait pewarnaan titik pada operasi graf diantaranya adalah koronasi P_n dan C_m, koronasi S_n dan P_m,dan koronasi P_2 dan P_{rm} . Hasil penelitian dalam artikel ini berupa teorema, yang dalam hal ini terdapat tiga teorema kemudian disertai bukti-bukitinya. Teorema pertama terkait dengan $\chi(P_n \odot C_m)$.

◇ **Teorema 0.1** *Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, bilangan kromatik dari graf $G = P_n \bigodot C_m$ adalah $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2}$.*

Bukti. Graf $G = P_n \bigodot C_m$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1};\ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{ij};\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m,\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1};\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1,\} \cup \{x_{im} x_{1i};\ 1 \leq i \leq n\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = n(1+m)$ dan $q = |E| = 2mn + n - 1$, derajad tertingginya $\Delta(G) = m + 2$. Sesuai dengan batas atas bilangan kromatik untuk sebarang graf adalah $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, sehingga untuk graf $G = P_n \bigodot C_m$, dengan $\Delta(G) = m + 2$ berlaku $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 = m + 3$. Akan dibuktikan $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2}$. Pertama dengan mudah dapat dilihat bahwa $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2} \leq m + 3$. Kedua warnai titik-titiknya dengan warna berikut:

Fungsi titik $P_n \odot C_m$ untuk n genap; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

Fungsi titik $P_n \odot C_m$ untuk n genap; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-2 \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-2 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{m} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{m} \end{cases}$$

Fungsi titik $P_n \odot C_m$ untuk n ganjil; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap},;\ 2 \leq i \leq n-1 j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-2 \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1 \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-2 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq i \leq m-1 \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{m} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{m} \end{cases}$$

Fungsi titik $P_n \odot C_m$ untuk n ganjil; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1 \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa nilai maksimal bilangan kromatiknya adalah $\chi(P_n \bigodot C_m) = \frac{7-(-1)^m}{2}$, sehingga terbukti. □

Teorema kedua terkait dengan $\chi(S_n \odot P_m)$.

◇ **Teorema 0.2** *Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, bilangan kromatik dari graf $G = S_n \odot P_m$ adalah $\chi(G) = 3$.*

Bukti. Graf $G = S_n \odot P_m$ memiliki himpunan titik $V = \{P, P_j, x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{Px_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{PP_j;\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{P_jP_{j+1};\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_ix_{ij};\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m,\} \cup \{x_{ij}x_{ij+1};\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = n(1+m)+1$ dan $q = |E| = 2mn$, derajad tertinggi $\Delta(G) = m$ jika $m \geq n$ dan $\Delta(G) = n$ jika $m \leq n$. Sesuai dengan batas atas bilangan kromatik untuk sebarang graf adalah $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$, sehingga untuk graf $G = S_n \odot P_m$, dengan $\Delta(G) = m$ berlaku $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 = m + 1$. sehingga dapat dilihat bahwa $\chi(G) = 3 \leq m+1$. Kemudian warnai titik-titiknya dengan warna berikut:

Fungsi titik $S_n \odot P_m$ untuk n genap; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = P; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, v = x_i; & \ 1 \leq i \leq n \\ 2, v = P_j; & j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = P_j; & j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

Fungsi titik $S_n \odot P_m$ untuk n genap; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = P; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 2, v = x_i; & \ 1 \leq i \leq n \\ 2, v = P_j; & j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 3, v = P_j; & j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Fungsi titik $S_n \odot P_m$ untuk n ganjil; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = P; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 2, v = x_i; & \ 1 \leq i \leq n \\ 2, v = P_j; & j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \\ 3, v = P_j; & j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Fungsi titik $S_n \odot P_m$ untuk n ganjil; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = P; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 2, v = x_i; & \ 1 \leq i \leq n \\ 2, v = P_j; & j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = P_j; & j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil};\ 1 \leq i \leq n, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap};\ 2 \leq i \leq n-1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa nilai maksimal bilangan kromatiknya adalah $\chi(S_n \bigodot P_m) = 3$, sehingga terbukti. □

Teorema ketiga terkait dengan $\chi(P_2 \odot P_r m)$.

◇ **Teorema 0.3** *Untuk $m \geq 2$ dan $n = 2$, bilangan kromatik dari graf $G = P_2 \odot P_{rm}$ adalah $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2}$.*

Bukti. Graf $G = P_2 \odot P_{rm}$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1};\ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{ij};\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1};\ 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{im} x_{i1};\ ; 1 \leq i \leq n\}$. Kemudian order dan sizenya adalah masing-masing $p = |V| = n(1+m)$ dan $q = |E| = n(2m+1) - 1$, derajad tertingginya $\Delta(G) = m+1$. Sesuai dengan batas atas bilangan kromatik untuk sebarang graf adalah $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, sehingga untuk graf $G = P_2 \bigodot P_{rn}$, dengan $\Delta(G) = m+1$ berlaku $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 = m+2$. Akan dibuktikan $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2}$. Pertama dengan mudah dapat dilihat bahwa $\chi(G) = \frac{7-(-1)^m}{2} \leq m+2$. Kedua warnai titik-titiknya dengan warna berikut:

Fungsi titik $P_2 \odot P_r m$ untuk n 2; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = 2, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 2, v = x_i; & i = 2 \\ 2, v = x_{i,j}; & i = 1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = 1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m \\ 3, v = x_{i,j}; & i = 2, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Fungsi titik $P_2 \odot P_r m$ untuk n 2; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = 1 \\ 1, v = x_{i,j}; & i = 2, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-2 \\ 2, v = x_i; & i = 2 \\ 2, v = x_{i,j}; & i = 1, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-2 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = 1, j = \text{genap};\ 2 \leq j \leq m-1 \\ 3, v = x_{i,j}; & i = 2, j = \text{ganjil};\ 1 \leq j \leq m-1 \\ 4, v = x_{i,j}; & i = 1, j = \text{m} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = 2, j = \text{m} \end{cases}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa nilai maksimal bilangan kromatiknya adalah $\chi(P_2 \bigodot P_{rm}) = \frac{7-(-1)^m}{2}$, sehingga terbukti. □

Kesimpulan

Dari penelitian diatas dapat disimpulkan bahwa: $\chi(P_n \odot C_m) = \chi(P_2 \odot P_{rm}) = \frac{7-(-1)^m}{2}$, $\chi(S_n \odot C_m) = 3$.

References

[1] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[3] Gary Chartrand and Ping Zhang. Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.

[4] Haynes, T.W and Henning, M.A. Total Domination Good Vertices in Graphs. Australasian Journal of Combinatorics, **26** (2002), 305-315.

[5] Haynes, T.W.Fundamental of Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, INC., 1998.

[6] Haynes, T. W., Hedetniemi, S.T., and Slater, P.J. 1998. Fundamental of Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, INC.

[7] Henning, M. A and Yeo, A. Total Domination in Graphs with Given Girth. *Graphs Combin.* 24 (2008) 333-348.

[8] Henning, M. A and Yeo, A. Girth and Total Dominating in Graphs. *Graphs Combin.* 28 (2012) 199-214.

[9] Yannakakis, M. and Gavril, F. Edge Dominating Sets in Graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol 338, No.3 (Jun 1980), pp.364-372.