

Penerapan Pewarnaan Titik untuk Super $(a, d) - H - \text{Antimagic Total Covering}$ pada Gabungan Graf Khusus

Yuli Nur Azizah¹, Dafik¹
CGANT-Universitas Jember

¹Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
e-mail: yuli_nurazizah@yahoo.com, d.dafik@gmail.com

Abstrak

Aplikasi yang berkaitan dengan graf adalah pewarnaan graf (graph colouring) yang terdiri dari pewarnaan titik, sisi, dan wilayah. Makalah ini berpusat pada pewarnaan titik. Pewarnaan titik (vertex coloring) adalah memberi warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna sama. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf dinyatakan dengan bilangan kromatik. Makalah ini merupakan langkah awal peneliti untuk mengembangkan penelitiannya, sehingga pada makalah ini akan dikaji penerapan pewarnaan titik pada super $(a, d) - P_2 - \text{antimagic covering}$ untuk gabungan graf pohon yang memiliki bilangan kromatik $C(G) = 2$.

Kata Kunci : *Covering, Graf Pohon, Labeling, Graf Path P_n , Pewarnaan Titik.*

Pendahuluan

Sebuah graf G adalah graf pohon dengan himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, banyaknya titik $|V(G)| = p$ dan banyak sisi $|E(G)| = q$. Setiap graf memiliki bilangan kromatik yang didapat dari melakukan pewarnaan titik. Pada makalah ini tidak dibahas lebih mendalam tentang pewarnaan titik, pembaca dapat membacanya pada [2],[8],[11], [14]. G merupakan graf pohon yang selalu memiliki bilangan kromatik $X(G) = 2$. Dengan kata lain setiap graf pohon hanya memiliki dua warna titik yaitu 1 dan 2 atau bisa ditulis sebagai Ψ dan Ω . Dalam [13] telah dijelaskan mengenai covering. SEATL atau antimagic labeling dapat dibaca pada [9], [10], [3, 4, 5, 6, 7], dan [12]. Jika didapatkan sebuah graf yang Edge antimagic covering maka akan lebih mudah untuk mencari SEATL atau covering dari sebuah graf tunggal maupun gabungan saling lepas dari suatu graf. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada menginvestigasi apakah sebuah graf pohon G yang $(a, 1) - P_2 - \text{antimagic covering}$ maka gabungan terpisah sebanyak m , dinotasikan mG , juga $(b, 1) - P_2 - \text{antimagic covering}$.

Teorema dan Lemma yang digunakan

Dalam bagian ini akan disajikan tiga teorema penting terkait dengan pelabelan titik pada super (a, d) -edge-antimagic total labeling. Teorema yang pertama memberikan ide bagaimana penelitian ini dikembangkan. Martin dalam [9] membuktikan sebuah teorema berikut:

Theorem 1 [9] *Misalkan G adalah sebuah graf $(a, 1)$ -EAT. Maka $mG, m \geq 1$ juga merupakan sebuah graf $(b, 1)$ -EAT.*

Penelitian lain yang terkait dengan penelitian ini adalah [3]. Selanjutnya dalam [?] telah dibuktikan sebuah teorema yang lebih khusus lagi tentang SEATL untuk path graf P_n . Sehingga teorema ini memberikan gambaran kepada peneliti untuk mengembangkan penelitian dengan memulai penelitian dari graf P_n .

Theorem 2 [3] *Jika m adalah ganjil, $m \geq 3$, dan $n \geq 2$, maka graf mP_n memiliki pelabelan $(a, 1)$ -edge-antimagic vertex.*

Selanjutnya belajar dari pembuktian ini, artikel dikembangkan dengan cakupan yang lebih luas yaitu keberadaan edge antimagic vertex untuk gabungan saling lepas dari sebuah graf apabila graf tunggalnya memiliki edge antimagic vertex. Untuk kepentingan kajian ini dipakailah teorema yang telah dikembangkan oleh Adawiyah dalam [1].

Lemma 1 [1] *Misalkan Ψ adalah sebuah barisan $\Psi = \{c, c+1, c+2, \dots, c+m-1\}$, m adalah ganjil dan $m \geq 3$. Maka ada sebuah permutasi Ω dari anggota Ψ sedemikian hingga $\Psi + \Omega = \{2c + \frac{m-1}{2}, 2c + \frac{m+1}{2}, 2c + \frac{m+3}{2}, \dots, 2c + \frac{3m-3}{2}\}$.*

Bukti. Misalkan Ψ adalah sebuah barisan $\Psi = \{u_i \mid u_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq m\}$ dan m ganjil dan $m \geq 3$. Menentukan permutasi $\Omega = \{v_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ dari anggota Ψ mengikuti fungsi berikut:

$$v_i = \begin{cases} c + i + \frac{m-3}{2} & , 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} \\ c + i - \frac{m+3}{2} & , \frac{m+3}{2} \leq i \leq m. \end{cases}$$

Dengan perhitungan langsung, kita memperoleh bahwa $\Psi + \Omega = \{u_i + v_i \mid 1 \leq i \leq k + 1\} = \{2c + \frac{m-1}{2}, 2c + \frac{m+1}{2}, 2c + \frac{m+3}{2}, \dots, 2c + \frac{3m-3}{2}\}$. Bobot sisi terkecil didapat dengan memberikan $i = 1$ dan bobot sisi terbesar diperoleh dengan memberikan $i = \frac{m+1}{2}$.

Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait dengan pemanfaatan vertex coloring terhadap $(a, d) - P_2$ -antimagic covering untuk graf pohon. Seperti yang telah dibahas sebelumnya bahwa penelitian ini dikembangkan melalui pengambilan salah satu contoh graf pohon yaitu graf path P_n . Berikut ini adalah teorema-teorema yang didapatkan dari penelitian ini.

◇ **Teorema 0.1** *Ada pelabelan $(a, 1) - P_2$ - antimagic covering pada graf path P_n , $n \geq 2$ dan n bilangan ganjil.*

Bukti. Graf path memiliki himpunan titik $V(P_n) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan banyak titik $|V| = n$. Misalkan $f(x_i)$ adalah Pelabelan titik pada graf P_n , maka $f(x_i) = \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga kita dapat menentukan pelabelan titik pada graf P_n dengan mengikuti fungsi $f(x_i)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n; i \in \text{ganjil} \\ \frac{n+i+1}{2}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n; i \in \text{genap} \end{cases}$$

Maka dengan mudah dapat dipahami bahwa fungsi tersebut adalah fungsi bijektif yang memetakan $f(x_i) : V(P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Misalkan W_i adalah bobot sisi dari $(a, 1) - P_2$ - antimagic covering pada graf path P_n untuk $n \geq 2$ dan n bilangan ganjil, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_i = \frac{n+1}{2} + i + 1; 1 \leq i \leq n - 1$$

◇ **Teorema 0.2** *Jika P_n , n ganjil, adalah $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering, maka ada pelabelan $(b, 1) - P_2$ - antimagic covering pada gabungan saling lepas graf path sebanyak m kopi-an, $m \geq 3$, m ganjil, dinotasikan dengan mP_n .*

Bukti. Dalam [10] ditunjukkan bahwa P_n , $n \geq 2$, dan mP_n adalah gabungan saling lepas maka mP_n memiliki himpunan titik $V(P_{n,m}) = \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, dan himpunan sisi $E(P_{n,m}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}, 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V(P_{n,m})| = nm$, dan $q = |E(P_{n,m})| = m(n - 1)$. Sebelum melabeli titik lakukan pewarnaan titik dengan Ψ dan Ω , kemudian untuk melabeli titik gunakan kombinasi berikut:

$$\Psi = i; 1 \leq i \leq m, m \text{ ganjil}$$

$$\Omega = \begin{cases} i + \frac{m-1}{2} & , 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2} \\ i - \frac{m+1}{2} & , \frac{m+3}{2} \leq i \leq m. \end{cases}$$

Kemudian dengan memanfaatkan kombinasi tersebut dan pelabelan titik pada graf tunggal P_n maka graf mP_n memiliki $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering dengan pelabelan titik mengikuti fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} (\frac{i+1}{2} - 1)m + j & ; 1 \leq i \leq n; \text{iganjil}; 1 \leq j \leq m \\ (\frac{n+i+1}{2} - 1)m + j + \frac{m-1}{2} & ; 1 \leq i \leq n; \text{igenap}; 1 \leq j \leq \frac{m+1}{2} \\ (\frac{n+i+1}{2} - 1)m + j - \frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n; \text{igenap}; \frac{m+3}{2} \leq j \leq m, \end{cases}$$

j di atas menyatakan copi-an graf ke- j , sedangkan i adalah sisi ke- i dari masing-masing graf, dan menyesuaikan dengan graf tunggal. Maka jelas bahwa fungsi $f(x_{i,j})$ adalah fungsi bijektif yang memetakan $f(x_{i,j}) : V(P_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, nm\}$. Misalkan $W_{i,j}$ adalah bobot sisi dari $(b, 1) - P_2$ - antimagic covering pada gabungan saling lepas graf path sebanyak m dengan $m \geq 3$ dan m ganjil, maka dapat diturunkan fungsi bobot sebagai berikut:

$$W_{i,j} = \begin{cases} (\frac{n+1}{2} + i)m + 2j - \frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq \frac{m+1}{2} \\ (\frac{n+1}{2} + i - 1)m + 2j - \frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n-1; \frac{m+3}{2} \leq j \leq m \end{cases}$$

◇ **Teorema 0.3** *Diberikan graf path P_n $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering maka gabungan saling lepas dari graf P_n sebanyak m , dinotasikan dengan mP_n , juga $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering.*

Bukti. Pada teorema sebelumnya telah didapatkan fungsi label titik untuk graf tunggal P_n dan gabungan saling lepas graf mP_n . Sehingga ditemukan hubungan antara fungsi label titik pada graf tunggal P_n dengan graf gabungan saling lepas mP_n serta hubungan antara bobot sisi graf path tunggal dengan bobot sisi gabungan saling lepas garf path. Jika $f(x_i)$ adalah fungsi label titik dari graf P_n dan $f(x_{i,j})$ adalah fungsi label titik pada graf gabungan saling lepas mP_n , hubungan pelabelan titik graf path tunggal dengan gabungan saling lepasnya diturunkan oleh fungsi berikut:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} (f(x_i) - 1)m + j & ; 1 \leq i \leq n; \text{iganjil}; 1 \leq j \leq m \\ (f(x_i) - 1)m + j + \frac{m-1}{2} & ; 1 \leq i \leq n; \text{igenap}; 1 \leq j \leq \frac{m+1}{2} \\ (f(x_i) - 1)m + j - \frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n; \text{igenap}; \frac{m+3}{2} \leq j \leq m, \end{cases}$$

Mengingat kombinasi yang digunakan sebelumnya maka kita dapat menyederhanakan fungsi tersebut menjadi

$$f(x_{i,j}) = (f(x_i) - 1)m + \gamma; \text{ dengan } 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; m \in \text{ganjil}$$

dengan γ adalah fungsi kombinasi pada titik tersebut.

Jika W_i adalah bobot sisi dari graf tunggal path sedangkan $W_{i,j}$ adalah bobot sisi dari gabungan graf saling lepasnya yang telah didefinisikan pada teorema sebelumnya, dan ingat bahwa bobot sisi terkecil misalkan a dari W_i ketika $i = 1$

yaitu $a = \frac{n+1}{2} + 2$, maka hubungan bobot sisi gabungan saling lepas graf path dengan graf tunggalnya diturunkan oleh fungsi berikut:

$$W_{i,j} = \begin{cases} (a+i-2)m+2j-\frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq \frac{m+1}{2} \\ (a+i-3)m+2j-\frac{m+1}{2} & ; 1 \leq i \leq n-1; \frac{m+3}{2} \leq j \leq m \end{cases}$$

Observation 1 Misalkan G adalah graf pohon. Bilangan kromatik dari graf pohon $X(G) = 2$.

Bukti. Dengan mempertimbangkan Lemma 1. Warnai semua sisi dengan Ψ, Ω sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bersisian memiliki warna yang sama. Berdasarkan aturan algoritma ini sangat mudah untuk melihat bahwa semua graf pohon hanya memiliki 2 warna.

◇ **Teorema 0.4** G adalah sebarang graf pohon. G adalah sebuah graf $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering dengan order sebanyak p dan sisi sebanyak q . $m \geq 3$ dan m ganjil, gabungan terpisah $\bigcup_{i=1}^m G$ juga $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering.

Bukti. Misalkan G adalah graf pohon. Diberikan G sebuah graf yang $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering dengan titik sebanyak p , sisi sebanyak q , dan label titiknya $f(x)$. Dengan menggunakan Lemma 1 dan menetapkan warna Ψ, Ω pada Observation 1, atur $c = 1$ dan tentukan label f_i untuk titik dari $\bigcup_{i=1}^m G$ dengan mengikuti $f_i(x) = \gamma + [f(x) - 1]m$, dimana γ adalah sebuah pewarnaan dari $x \in V(mG)$, dan $f_i(x)$ adalah sebuah label dari copy G yang ke i . Menurut Lemma 1, kita dapat melihat bahwa label $f_i(x)$ adalah fungsi bi-jektif. Bobot sisi dari $\bigcup_{i=1}^m G$ dengan pelabelan $f_i(x)$ merupakan himpunan $\{\Psi + [f(u) - 1]m + \Omega + [f(v) - 1]m | u, v \in V(\bigcup_{i=1}^m G)\} = \{\Psi + \Omega + [f(u) + f(v) - 2]m | u, v \in V(\bigcup_{i=1}^m G)\}$. $\{f(u) + f(v)\}$ adalah himpunan bobot sisi dari graf tunggal dengan nilai awal a . Berdasarkan Lemma 1, $\Psi + \Omega$ terkecil didapat ketika $i = 1$ dan nilai awal graf tunggal pembaca dapat dengan mudah memverifikasi bobot sisi yang berbeda dan berurut, untuk itu himpunan $\{f_i(u) + f_i(v) | u, v \in V \bigcup_{i=1}^m G\} = \{\frac{m+3}{2} + [a - 2]m, \frac{m+3}{2} + [a - 2]m + 1, \dots, \frac{m+3}{2} + [a + p - 2]m - 1\}$. Fungsi dari himpunan bobot sisi $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering tersebut adalah sebagai berikut:

$$W = \begin{cases} \frac{m+3}{2} + (a+j-3)m + (i-1)2; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}; 1 \leq j \leq p \\ \frac{m+3}{2} + (a+j-4)m + (i-1)2; & \text{dengan } \frac{m+3}{2} \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

Ingat bahwa m adalah banyaknya copy-an graf pohon, sedangkan i adalah copy-an graf ke- i , dan j menyatakan indeks atau sisi ke- j dari sebuah graf pohon tunggal G yang bobot sisinya telah diurutkan dari yang terkecil, dan p menyatakan banyaknya sisi pada graf pohon G . Dari fungsi bobot sisi diatas dapat kita simpulkan bahwa $\bigcup_{i=1}^m G$ memiliki $(\frac{m+3}{2} + (a - 2)m, 1) - P_2$ -antimagic covering.

Kesimpulan

Pada makalah ini telah terbukti jika sebuah graf pohon G memiliki $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering maka gabungan graf terpisah sebanyak m , yang dinotasikan dengan mG , juga $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering yaitu $(\frac{m+3}{2} + (a - 2)m, 1) - P_2$ -antimagic covering. Manfaat dari penelitian ini adalah mempermudah dalam menentukan $(b, 1) - P_2$ -antimagic covering untuk sebarang gabungan saling lepas dari graf pohon mG jika diketahui $(a, 1) - P_2$ -antimagic covering untuk graf tunggalnya. Dengan demikian pula akan lebih mudah mencari SEATL ataupun $(b, d) - P_2$ -antimagic total covering jika unuk graf tunggalnya diketahui.

References

- [1] R. Adawiyah, Pelabelan Total Super (a, d) - Antimagic pada Graf Lam-pion, Skripsi, Tidak dipublikasikan, Universitas Jember, (2014).
- [2] Ardiansyah, F.S. Efendi, Syaifullah, M. Pinto, Pujiyanto, H.S. Tem-pake, Implementasi Algoritma Greedy untuk Melakukan Graf Coloring: Study Kasus Peta Profinsi Jawa Timur, Jurnal Informatika, 4 (2010).
- [3] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s -partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.
- [4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909–4915.
- [5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria*, **101** (2011), 97–107
- [6] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s -partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.
- [7] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909–4915.
- [8] F. Bonomo, Y. Faenza, G. Oriolo, On Coloring Problems with Local Con-straints, (2010).
- [9] M. Bača, Yoquing Lin, dan Andrea, Note on Super Antimagicness of Dis-connection Graphs, *AKCE J. Graphs. Combin.*, 6 (2009), 47–55.

- [10] M. Bača, Y. Lin, and F.A. Muntaner-Batle, Super edge-antimagic labellings of the path-like trees, *Utilitas*,73(2007), 117-128.
- [11] N.W. Lin, Approximating the Chromatic Polynomial of a Graph.
- [12] Sugeng, Kiki Ariyanti, Magic and Antimagic Labeling of Graphs, Diss., University of Ballarat, (2005).
- [13] T. Gayathri dan S. Meena, Geodesic Graphoidal Covering Number of Graph, *IJMA*, 8 (2014), 62-70.
- [14] T. Beşeri, Edge Coloring of A Graph, Diss., İzmir Institute of Technology, (2004).