SUPER (a,d)-$\mathcal{H}$ ANTIMAGIC TOTAL COVERING PADA GRAF TRIANGULAR LADDER

Nur Asia J.[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember,
aisy_jameel@yahoo.co.id Hestyarin@gmail.com
[3]Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Pelabelan selimut (a,d)-$\mathcal{H}$ antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif $\xi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |V(G)| + |E(G)|\}$ sehingga semua subgraf H' yang isomorfik dengan H memiliki bobot subgraf $w(H')$=-$\sum_{v \epsilon V(H')} \xi(v) + \sum_{e \epsilon E(H')} \xi(e)$ yang merupakan deret aritmatika $a, a+d, a+2d, ..., a+(t-1)d$ dengan a dan d adalah bilangan bulat positif dan m adalah jumlah subgraf dari G yang isomorfik dengan H. Graf G dikatakan sebuah graf super $\mathcal{H}$-antimagic jika $f(v) = \{1, 2, ..., |V|\}$ dengan $w(f)$ adalah sebuah jumlahan super antimagic. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pelabelan selimut super (a, d)-C_3-antimagic pada graf triangular ladder $d \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Penelitian ini menghasilkan 5 teorema yang menentukan suku awal a dan nilai beda d pelabelan selimut super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic pada graf triangular ladder.

Key Words : *pelabelan selimut antimagic, super antimagic, triangular ladder.*

Pendahuluan

Sebuah graf G diartikan sebuah struktur G = *(V(G), E(G))*, dimana $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut dua titik u, v dimana titik $u, v \epsilon V(G)$ yang disebut sisi *(edges)*. V disebut himpunan titik dari G dan E disebut himpunan sisi dari G. Jumlah titik pada graf G disebut *order* dari G dinotasikan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisinya disebut *size* dari G dinotasikan $|E(G)|$. Graf yang mempunyai *order* $p = |V(G)|$ dan *size* $q = |E(G)|$ dapat ditulis (p, q)-graf [5].

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto(fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*)[9]. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Lebih detail lihat [12],[2] dan [3].

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Lladó pada tahun 2005. Pelabelan selimut-$\mathcal{H}$-ajaib super pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi [4]. Graf G dikatakan sebuah graf super $\mathcal{H}$-antimagic jika $f(v) = \{1, 2, ..., |V|\}$ dengan $s(f)$ adalah sebuah jumlahan super antimagic [13]. Oleh Inayah dkk kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika $a, a + d, a + 2d, ..., a + (t - 1)d$, lebih detail lihat [7]. Hasil- hasil pelabelan super ((a,d))-$\mathcal{H}$-antimagic covering yang sudah ditemukan diantaranya adalah lihat [6] dan [8],

Super (a, d)-C_3 Antimagic Total Covering pada graf triangular ladder (L_n)

Graf ladder dinotasikan L_n adalah sebuah graf dengan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(L_n) = \{u_iu_{i+1}, v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\} \bigcup \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$, sedangkan graf triangular ladder dinotasikan L_n, $n \geq 2$ adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melengapi graf ladder dengan menambahkan sisi u_iv_{i+1} untuk $1 \leq i \leq n - 1$. Kajian pelabelan ini disajikan dalam bentuk teorema berikut.

$\diamond$ **Teorema 1** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(16n - 3, 0)$ - C_3 antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik dan sisi graf triangular ladder L_n dengan fungsi bijektif f_1 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(u_iu_{i+1}) &= 4n - 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_1(v_iv_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_1(u_iv_i) &= 6n - 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(u_iv_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}
$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa f_1 adalah sebuah fungsi bijektif dari $f_1 : \ V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., 6n - 3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan lebel setiap verteks dan edge dengan syarat batas i yang bersesuaian dari $\mathcal{H} = C_3$ yang menjadi covering pada graf triangular ladder , sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$w^1_{f_1} = \sum_{k=i}^{i+1} f_1(v_k) + f_1(u_i) + f_1(u_iv_i) + f_1(v_iv_{i+1}) + f_1(u_iv_{i+1})$
$= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 6n - 2i - 1 + 4n - 2i + 6n - 2i - 2$
$= 16n - 3$

$w^2_{f_1} = \sum_{k=i}^{i+1} f_1(u_k) + f_1(v_{i+1}) + f_1(u_{i+1}v_{i+1}) + f_1(u_iu_{i+1}) + f_1(u_iv_{i+1})$
$= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 6n - 2i - 2 - 1 + 4n - 2i - 1 + 6n - 2i - 2$
$= 16n - 3$

Gabungan dari himpunan di atas $\bigcup_{k=1}^{2} w^k_{f_1} = \{16n-3, 16n-3, \ldots, 16n-3\}$. Terbukti bahwa graf triangular ladder L_n memiliki super $(16n-3, 0)$ - C_3 antimagic total covering. □

◇ **Teorema 2** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(15n-1, 1)$ - C_3 antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik dan sisi graf triangular ladder L_n dengan fungsi f_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_2(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(u_iu_{i+1}) &= 4n - 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\
f_2(v_iv_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\
f_2(u_iv_i) &= 5n - i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(u_iv_{i+1}) &= 6n - i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_2 adalah sebuah fungsi bijektif dari $f_1 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., 6n-3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan lebel setiap verteks dan edge dengan syarat batas i yang bersesuaian dari $\mathcal{H} = C_3$ yang menjadi covering pada graf triangular ladder , sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$w^1_{f_2} = \sum_{k=i}^{i+1} f_2(v_k) + f_2(u_i) + f_2(u_iv_i) + f_2(v_iv_{i+1}) + f_2(u_iv_{i+1})$
$= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 5n - i - 1 + 4n - 2i + 6n - i - 2$
$= 15n + 2i - 3$

$w^2_{f_2} = \sum_{k=i}^{i+1} f_2(u_k) + f_2(v_{i+1}) + f_2(u_{i+1}v_{i+1}) + f_2(u_iu_{i+1}) + f_2(u_iv_{i+1})$
$= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 5n - i + 1 - 1 + 4n - 2i - 1 + 6n - i - 2$
$= 15n + 2i - 2$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut $w_{f_2} = \{w^1_{f_2}, w^2_{f_2}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisikan oleh $w^1_{f_2}$ untuk $i = 1$, bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh $w^2_{f_2}$ untuk $i = n - 1$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi w_{f_2} disubtitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkainan bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $15n + 2i - 3$ yang didapat dari subtitusi niali $i = 1$ pada $w^2_{f_2}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{n} w^k_{f_2} = \{15n - 1, 15n, 15n + 1, 15n + 2, \ldots, 17n - 4\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder L_n memiliki super (a, d)-C_3 antimagic total covering dengan $a = 15n - 1$ dan $d = 1$ atau graf triangular ladder L_n mempunyai super $(15n - 1, 1)$-C_3 antimagic total covering dengan $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 3** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(12n + 3, 2)$ - C_3 antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik dan sisi graf triangular ladder L_n dengan fungsi f_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_3(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(u_iu_{i+1}) &= 4n + 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_3(v_iv_{i+1}) &= 4n + 2i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_3(u_iv_i) &= 4n - 2i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_3(u_iv_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_3 adalah sebuah fungsi bijektif dari $f_1 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., 6n - 3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan lebel setiap verteks dan edge dengan syarat batas i yang bersesuaian dari $\mathcal{H} = C_3$ yang menjadi covering pada graf triangular ladder , sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$w^1_{f_3} = \sum_{k=i}^{i+1} f_3(v_k) + f_3(u_i) + f_3(u_iv_i) + f_3(v_iv_{i+1}) + f_3(u_iv_{i+1})$
$= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 4n - 2i + 1 + 4n + 2i - 2 + 4n - 2i$

$= 12n + 4i - 1$

$w^2_{f_3} = \sum_{k=i}^{i+1} f_3(u_k) + f_3(v_{i+1}) + f_3(u_{i+1}v_{i+1}) + f_3(u_iu_{i+1}) + f_3(u_iv_{i+1})$
$= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 4n - 2i - 2 + 1 + 4n + 2i - 1 + 4n - 2i$
$= 12n + 4i + 1$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut $w_{f_3} = \{w^1_{f_3}, w^2_{f_3}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisikan oleh $w^1_{f_3}$ untuk $i = 1$, bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh $w^2_{f_3}$ untuk $i = n - 1$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi w_{f_3} disubtitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkainan bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $12n + 4i - 1$ yang didapat dari subtitusi niali $i = 1$ pada $w^2_{f_3}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 2, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{n} w^k_{f_3} = \{12n + 3, 12n + 5, 12n + 7, 12n + 9, \ldots, 16n - 3\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder L_n memiliki super (a, d)-C_3 antimagic total covering dengan $a = 12n+3$ dan $d = 2$ atau graf triangular ladder L_n mempunyai super $(12n + 3, 2)$-C_3 antimagic total covering dengan $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 4** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(11n + 5, 3)$ - C_3 antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik dan sisi graf triangular ladder L_n dengan fungsi f_4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_4(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_4(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_4(u_iu_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_4(v_iv_{i+1}) &= 6n - 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_4(u_iv_i) &= 2n + i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_4(u_iv_{i+1}) &= 3n + i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_4 adalah sebuah fungsi bijektif dari $f_1 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., 6n - 3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan lebel setiap verteks dan edge dengan syarat batas i yang bersesuaian dari $\mathcal{H} = C_3$ yang menjadi covering pada graf triangular ladder , sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$w^1_{f_4} = \sum_{k=i}^{i+1} f_4(v_k) + f_4(u_i) + f_4(u_iv_i) + f_4(v_iv_{i+1}) + f_4(u_iv_{i+1})$
$= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + i + + 6n - 2i - 1 + 3n + i$
$= 11n + 6i - 1$

$w^2_{f_4} = \sum_{k=i}^{i+1} f_4(u_k) + f_4(v_{i+1}) + f_4(u_{i+1}v_{i+1}) + f_4(u_iu_{i+1}) + f_4(u_iv_{i+1})$
$= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + i + 1 + 6n - 2i - 2 + 3n + i$
$= 11n + 6i + 2$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut $w_{f_4} = \{w^1_{f_4}, w^2_{f4}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisikan oleh $w^1_{f_4}$ untuk $i = 1$, bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh $w^2_{f_4}$ untuk $i = n - 1$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi w_{f_4} disubtitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkainan bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $11n + 6i - 1$ yang didapat dari subtitusi niali $i = 1$ pada $w^2_{f_4}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 3, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{n} w^k_{f_4} = \{11n+5, 11n+8, 11n+11, 11n+14, \ldots, 17n-4\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder L_n memiliki super (a, d)-C_3 antimagic total covering dengan $a = 11n + 5$ dan $d = 3$ atau graf triangular ladder L_n mempunyai super $(11n5, 3)$-C_3 antimagic total covering dengan $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 5** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(10n + 6, 4)$ - C_3 antimagic total covering pada untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik dan sisi graf triangular ladder L_n dengan fungsi f_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_5(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(u_iu_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_5(v_iv_{i+1}) &= 6n - 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_5(u_iv_i) &= 2n + 2i - 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(u_iv_{i+1}) &= 2n + 2i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_5 adalah sebuah fungsi bijektif dari $f_1 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., 6n - 3\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan lebel setiap verteks dan edge dengan syarat batas i yang bersesuaian dari

$\mathcal{H} = C_3$ yang menjadi covering pada graf triangular ladder , sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$w^1_{f_5} = \sum_{k=i}^{i+1} f_5(v_k) + f_5(u_i) + f_5(u_iv_i) + f_5(v_iv_{i+1}) + f_5(u_iv_{i+1})$
$= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + 2i - 1 + 6n - 2i - 1 + 2n + 2i$
$= 10n + 8i - 2$

$w^2_{f_5} = \sum_{k=i}^{i+1} f_5(u_k) + f_5(v_{i+1}) + f_5(u_{i+1}v_{i+1}) + f_5(u_iu_{i+1}) + f_5(u_iv_{i+1})$
$= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + 2i + 2 - 1 + 6n - 2i - 2 + 2n + 2i$
$= 10n + 8i + 2$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut $w_{f_5} = \{w^1_{f_5}, w^2_{f_5}\}$, dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisikan oleh $w^1_{f_5}$ untuk $i = 1$, bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh $w^2_{f_5}$ untuk $i = n - 1$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi w_{f_5} disubtitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkainan bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $10n + 8i - 2$ yang didapat dari subtitusi niali $i = 1$ pada $w^2_{f_5}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 4, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{k=1}^{n} w^k_{f_5} = \{10n+6, 10n+10, 10n+14, 10n+18, \ldots, 18n-6\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder L_n memiliki super (a, d)-C_3 antimagic total covering dengan $a = 10n + 6$ dan $d = 4$ atau graf triangular ladder L_n mempunyai super $(10n + 6, 4)$-C_3 antimagic total covering dengan $n \geq 2$. □

Kesimpulan

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa graf triangular ladder L_n dengan $n \geq 2$ mempunyai super (a, d)-C_3 antimagic covering, yaitu :

◇ **Teorema 6** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(16n - 3, 0)$ - C_3 antimagic total covering pada untuk $n \geq 2$.*

◇ **Teorema 7** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(15n - 1, 1)$ - C_3 antimagic total covering pada untuk $n \geq 2$.*

◇ **Teorema 8** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(12n + 3, 2)$ - C_3 antimagic total covering pada untuk $n \geq 2$.*

◇ **Teorema 9** *Graf triangular ladder L_n memiliki super $(11n + 5, 3)$ - C_3 antimagic total covering pada untuk $n \geq 2$.*

◇ **Teorema 10** *Graf triangular ladder* L_n *memiliki super* $(10n + 6, 4)$ - C_3 *antimagic total covering pada untuk* $n \geq 2$.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Ahmad Kamsyawuni, S.Si, M.Kom dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] Dafik. Structural properties and labeling of graphs. Diss. University of Ballarat, 2007.

[2] Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J.Combin. Comput*, (2008), 41-49

[3] Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Dicrete Math.* (2009), 4909-4915.

[4] Gutiérrez, A. dan Lladó, A. Magic Caverings. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. Vol.55: 451-461, 2005.

[5] Hartsfield, N. dan Ringel, G., Pearls in Graph Theory. London: Accademic Press Limited, 1994.

[6] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A., On (a,d)-$\mathcal{H}$ Antimagic Covering of Graph. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 71(2009), 273-281.

[7] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A., Super (a,d)-$\mathcal{H}$ Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. Australasian Journal of Combinatorics, 57(2013), 127-138.

[8] Karyanti, Pelabelan Selimut (a,d)-$\mathcal{H}$ Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret, 2012.

[9] Kotzig, A. dan Rosa, A., Magic Valuations of Finite Graph. Canada Mathematics Bulletin 13 (1970),451461.

[10] M.Bača, Y.Lin, M.Miller and R.Simanjutak, New contructions of magic and antimagic graph labelings,*Utilitas Math*, (2001), 229-239.

[11] Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M., On $\mathcal{H}$ Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. Utilitas Math, (2010), 333-342.

[12] Simanjuntak, R., Salman, A., Super (a,d)-$\mathcal{H}$ Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. Australasian Journal of Combinatorics, (2010), 127-138.

[13] Sugeng, K.A. *Magic and Antimagic Labeling og Graph.* PhD Thesis, School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, 2005.