Graf-Graf Khusus dan Bilangan Dominasinya

Agustina M[1,2], Ika Hesti A[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember,
mahagustina@yahoo.co.id hestyarin@gmail.com
[3]Jurusan Matematika FKIP Universitas Jember, d.dafik@gmail.com

Abstract

Dominating set merupakan himpunan titik yang mendominasi titik-titik yang bertetangga dan seminimal mungkin. Himpunan $D \subseteq V(G)$ adalah *dominating set* dari titik jika setiap titik di $V(G)$ bertetangga dengan sebuah titik di D. *Domination number* $\gamma(G)$ adalah kardinalitas terkecil dari sebuah *dominating set*. Nilai dari *domination number* selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$. Penelitian ini mengembangkan *dominating set* pada beberapa graf khusus diantaranya adalah graf Shackel (S_m, n), graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$, graf join $C_n + P_n$, graf Lobster $L_{i,j,k}$, dan graf Triangular Ladder L_n. Hasil dari penelitian ini adalah beberapa teorema yang menyatakan kardinalitas minimal *dominating set*.

Key Words : *Dominating set, Domination number.*

Pendahuluan

Sejarah *dominating set* dimulai pada tahun 1850 di Eropa. Untuk menyelesaikan masalah pada papan catur 8×8 diperlukan minimal berapa *Queen* agar semua posisi dapat diserang langsung oleh *Queen*. Secara matematis dipelajari sejak tahun 1960 yang kemudian berkembang pada aplikasi seperti komunikasi, jaringan komputer, teori jaringan sosial, pemasangan kamera pengawas, dan penempatan pos pantau.

Dominating set merupakan subset $D \subseteq V$ dari titik di G sedemikian hingga untuk semua titik $v \in V$, salah satu dari $v \in D$ atau sebuah tetangga u dari v ada di D. *Domination number* dinotasikan $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari sebuah *dominating set*. Nilai dari *domination number* selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$ [6].

Penelitian terkait *dominating set* berkembang cukup pesat [7] [1][9][10][11]. Dalam penelitian ini mengembangkan *dominating set* pada beberapa graf khusus dan operasinya diantaranya adalah graf Shackel (S_m, n), graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$, graf join $C_n + P_n$, graf Lobster $L_{i,j,k}$, dan graf Triangular Ladder L_n.

Teorema yang Digunakan

Teorema terkait batas atas dan bawah dari *domination number*

Theorem 1 [6] *Untuk sebarang graf G,*

$$\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

Bukti. Misalkan S adalah sebuah *dominating set* dari G. Pertama, kita andaikan batas bawah. Setiap titik dapat sebagai *dominating set* dan $\Delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan degree maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai *dominating set* $N[v]$ dan titik di $V - N[v]$ merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan *dominating set* dengan kardinalitas $n - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bagian ini, peneliti mengembangkan *dominating set* yang berjarak satu pada graf khusus meliputi graf Shackel (S_m, n), graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$, graf join $C_n + P_n$, graf Lobster $L_{i,j,k}$, dan graf Triangular Ladder L_n.

◇ **Teorema 1** *Misal G adalah graf Shackel(S_m, n) yang dinotasikan dengan Shackel (S_m, n) untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$. Maka bilangan dominasinya adalah γ(Shackel$(S_m, n)) = n$.*

Bukti. Graf Shackel(S_m, n) adalah graf dengan himpunan titik $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-2\}$ dan himpunan sisi $E = \{z_i x_i \cup x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ serta $p = |V| = mn + n - 1$, $q = |E| = mn$, dan $\Delta = m$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = n$ sehingga $\gamma(\text{Shackel}(S_m, n)) = n$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta} \rceil \leq \gamma \leq p - \Delta$, untuk nilai p dan Δ diperoleh batas atas dan bawah *domination number* yaitu $\lceil \frac{n(m+1)-1}{m+1} \rceil \leq \gamma \leq m(n-1)+n-1$. Maka $\gamma(\text{Shackel}(S_m, n))$ berada dalam interval batas *dominating number* yaitu $\lceil \frac{n(m+1)-1}{m+1} \rceil \leq \gamma \leq m(n-1)+n-1$. □

◇ **Teorema 2** *Misal G adalah graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$, untuk $n \geq 3$ memiliki domination number $\gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) = n$.*

Bukti. Graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 5\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) = \{x_1 x_n, x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 5\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,1} x_{i,5}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 5\} \cup \{x_{i,1} x_{i,3}, x_{i,1} x_{i,4}; 1 \leq i \leq n\}$

serta $p = |V| = 6n$, $q = |E| = 9n$, dan $\Delta(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) = 5$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{i,1}; 1 \le i \le n\}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = n$ sehingga $\gamma(P_4+\overline{K}_1) = n$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n \odot (P_4+\overline{K}_1))} \rceil \le \gamma \le p - \Delta(C_n \odot (P_4+\overline{K}_1))$, untuk nilai p dan $\Delta(C_n \odot (P_4+\overline{K}_1))$ diperoleh batas atas dan bawah *domination number* yaitu $\lceil n \rceil \le \gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) \le 6n - 5$. Maka $\gamma(P_4 + \overline{K}_1)$ berada dalam interval batas *dominating number* yaitu $\lceil n \rceil \le \gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)) \le 6n - 5$. $\square$

◇ **Teorema 3** *Misal G adalah graf Join $C_n + P_n$, untuk $n \ge 3$ memiliki domination number* $\gamma(C_n + P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Bukti. Graf Join C_n+P_n adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n+P_n) = \{x_i, y_i; 1 \le i \le \frac{n}{3}\}$ dan himpunan sisi $E(C_n + P_n) = \{x_1y_n\} \cup \{x_ix_{i+1}, 1 \le i \le n-1\} \cup \{x_iy_j; 1 \le i \le n; 1 \le j \le n\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \le i \le n-1\}$ serta $p = |V| = 2n$, $q = |E| = n^2 + 2n - 1$, dan $\Delta(C_n + P_n) = n + 2$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{3i-2}; 1 \le i \le \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sehingga $\gamma(C_n+P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n+P_n)} \rceil \le \gamma(C_n + P_n) \le p - \Delta(C_n + P_n)$, untuk nilai p dan $\Delta(C_n + P_n)$ diperoleh batas atas dan bawah *domination number* yaitu $\lceil \frac{2n}{n+3} \rceil \le \gamma(C_n+P_n) \le n - 2$. Maka $\gamma(C_n + P_n)$ berada dalam interval batas *dominating number* yaitu $\lceil \frac{2n}{n+3} \rceil \le \gamma(C_n + P_n) \le n - 2$. $\square$

◇ **Teorema 4** *Misal G adalah graf Lobster $L_{i,j,k}$, untuk $n \ge 2$ memiliki domination number* $\gamma(L_{i,j,k}) = 2n$.

Bukti. Graf Lobster $L_{i,j,k}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(L_{i,j,k}) = \{x_i \cup x_{i,j} \cup x_{i,j,k}; 1 \le i \le n, 2 \le j \le p, 1 \le k \le l\}$ dan himpunan sisi $E(L_{i,j,k}) = \{x_ix_{i+1}; 1 \le i \le n-1\} \cup \{x_ix_{i,j} \cup x_{i,j}x_{i,j,k}; 1 \le i \le n, 1 \le j \le p, 1 \le k \le l\}$ serta $p = |V| = 6n$, $q = |E| = 5n - 1$, dan $\Delta(L_{i,j,k}) = 4$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{x_{i,1} \cup x_{i,2}; 1 \le i \le n\}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$. Kardinalitas $|D| = 2n$ sehingga $\gamma(L_{i,j,k}) =$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(L_{i,j,k})} \rceil \le \gamma(L_{i,j,k}) \le p - \Delta(L_{i,j,k})$, untuk nilai p dan $\Delta(L_{i,j,k})$ diperoleh batas atas dan bawah *domination number* yaitu $\lceil \frac{6n}{5} \rceil \le \gamma(L_{i,j,k}) \le 6n - 3$. Maka $\gamma(L_{i,j,k})$ berada dalam interval batas *dominating number* yaitu $\lceil \frac{6n}{5} \rceil \le \gamma(L_{i,j,k}) \le 6n - 3$.

Maka $\gamma(L_{i,j,k})$. □

◇ **Teorema 5** *Misal G adalah graf Triangular Ladder L_n memiliki domination number*

$$\gamma(L_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } n = 2k \text{ dimana } k \geq 2 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{untuk } n = 2k+1 \text{ dimana } k \geq 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf Triangular Ladder L_n adalah graf dengan himpunan titik $V(L_n) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i; 1 \leq i \leq n\}$ serta $p = |V| = 2n$, $q = |E| = 4n - 3$, dan $\Delta(L_n) = 4$. Pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{y_{4i-2} \cup x_{4j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, untuk $n = 3$ dan $n = 2k$ dimana $k \geq 2$ maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$, kardinalitas $|D| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sehingga $\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, untuk $n = 3$ dan $n = 2k$ dimana $k \geq 2$. Sedangkan untuk n yang lainnya, pilih titik yang menjadi *dominating set* $D = \{y_2, x_{2i+2}; 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa D adjacent dengan semua elemen $V \setminus D$, kardinalitas $|D| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sehingga $\gamma(L_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, untuk $n = 2k + 1$ dimana $k \geq 2$. Berdasarkan teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(L_n)} \rceil \leq \gamma(L_n) \leq p - \Delta(L_n)$, disubtitusikan nilai p dan $\Delta(L_n)$ diperoleh batas atas dan bawah *domination number* yaitu $\lceil \frac{2n}{5} \rceil \leq \gamma(L_n) \leq 2n - 4$. Maka $\gamma(L_n)$ berada dalam interval batas *dominating number.* □

Kesimpulan

Pada penelitian ini difokuskan pada *domination number* $\gamma(G)$ berjarak satu pada beberapa graf khusus dan operasinya. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Untuk graf Shackel(S_m, n) dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, didapatkan *domination number* γ (Shack $(S_m, n)) = n$.
- Untuk graf $C_n \odot (P_4 + \overline{k}_1)$ dengan $n \geq 3$, didapatkan *domination number* $\gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{k}_1)) = n$.
- Untuk graf Join $C_n + P_n$ dengan $n \geq 3$, didapatkan *domination number* $\gamma(C_n + P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

- Untuk graf Lobster $L_{i,j,k}$ dengan $n \geq 2$, didapatkan *domination number* $\gamma(L_{i,j,k}) = 2n$
- Untuk graf Triangular Ladder L_n, didapatkan *domination number*

$$\gamma(L_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } n = 2k \text{ dimana } k \geq 2 \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{untuk } n = 2k + 1 \text{ dimana } k \geq 2 \end{cases}$$

References

[1] A. D. Jumani, L. Chand, *Dominating Number of Prism over Cycle C_n*, Sindh University Research Journal (Science Series), Sindh Univ. Res. Jour. (Sci. ser) Vol.44 (2) 237-238 (2012).

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, *Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs*, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[3] Dafik, *Structural Properties and Labeling of Graphs*, University of Ballarat, 2007.

[4] Goddard, W and Henning, M.A. *Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results*. South African National Research Foundation and The University Of Johannesburg, 2006.

[5] Haynes, T.W and Henning, M.A, *Total Domination Good Vertices in Graphs. Australasian Journal of Combinatorics*, **26** (2002), 305-315.

[6] Haynes, T.W, *Fundamental of Domination in Graphs*, New York: Marcel Dekker, INC., 1998.

[7] Hesti, I.K, Dafik, *On the Domination Number of Some Families of Special Graph*, Jember: University of Jember, 2014.

[8] Joseph A. Gallian, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, University of Minnesota, 1997.

[9] Liedloff, *Dominating Set on Bipartite Graphs*, Université Paul Verlaine-Metz, 2009.

[10] Y. B. Maralabhavi, Anupama S. B., *Domination Number of Jump Graph*, International Mathematical Forum, Vol. 8, 2013, no. 16, 753 - 758. 2013.

[11] Michael A. Henning, Anders Yeo, *A New Upper Bound on The Total Domination Number of a Graph*, the electronic journal of combinatorics 14, 2007.