Pelabelan Total Super (a, d)-sisi Antimagic pada Graf Daun

Sih Muhni Y.[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
nichachapri@gmail.com Hestyarin@gmail.com
[3]Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pemetaaan bijektif g dari $V(G) \bigcup E(G)$ ke $\{1, 2, ..., |V(G)| + E|(G)|\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi antimagic di G, jika himpunan bobot sisi $W(xy) = \{w(xy)|x(xy) = g(x) + g(y) + g(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat dinyatakan sebagai barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d. Dikatakan sebagai pelabelan total (a, d)-sisi antimagic super jika $g(V(G)) = \{1, 2, ..., |V(G)|\}$. Dalam penelitian ini akan dikaji tentang super (a, d)-sisi antimagic pelabelan total pada graf daun, $n \geq 1$ dan $d \in \{0, 2\}$. Fokus pengkajian ini adalah pembentukan pola super (a, d)-sisi antimagic pelabelan total pada graf daun dengan $n \geq 1$.

Key Words *: super (a, d)-sisi antimagic pelabelan total, graf daun.*

Pendahuluan

Teori graf adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Sebuah graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik $(v1, v2)$ dimana $v1, v2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*)[9]. V disebut himpunan titik dari G, dan E disebut himpunan sisi dari G. Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G[5].

Salah satu topik dalam teori graf yang banyak mendapatkan perhatian adalah pelabelan graf. Berdasarkan elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis, yaitu : pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total[1]. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domiannya sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya adalah titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*)[10].

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Lebih jelas lihat [2]. Beberapa penelitian tentang pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic yang telah dipublikasikan antara lain:[3], [4],[6],[7] dan [8].

Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic

Pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada sebuah graf $G = (V, E)$ dapat diartikan sebagai pelabelan titik dengan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, ...p+q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G. Himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a \geq 0$ dan $d \geq 0$ [9].

Lemma 1 *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Bukti: $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, ..., p+q\}$. Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \bigcup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3..., p+q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $\alpha(u) + \alpha(uv) + \alpha(v) = 1 + (p+1) + 2 = p+4$ dan dapat ditulis :$p+4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p-1) + (p+q) + p = 3p + q - 1$. Akibatnya:

$$\begin{array}{lcl} a + (q-1)d & \leq & 3p + q - 1 \\ d & \leq & \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1} \\ d & \leq & \frac{2p+q-5}{q-1} \end{array}$$

Jadi terbukti bahwa nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf. $\square$

Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Daun

Graf daun dinotasikan Lg_n adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V = \{l, e, a, f, x_i, z_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2n+1\}$ dan himpunan isi $E = \{le, lf, fa, ea, fy_1, ey_1, ay_{2n+1}\} \cup \{x_i y_{2i-1}, x_i y_{2i}, x_i y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{2i-1}, z_i y_{2i}, z_i y_{2i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Kajian pelabelan ini disajikan dalam bentuk lemma dan teorema berikut:

$\diamond$ **Lemma 1** *Ada pelabelan $(n+3, 1)$-sisi antimagic titik pada graf Daun Lg_n untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik graf daun Lg_n dengan fungsi α_1 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(e) &= 1,\\
\alpha_1(x_i) &= i+1, \text{untuk } 1 \le i \le n,\\
\alpha_1(a) &= n+2,\\
\alpha_1(l) &= n+3,\\
\alpha_1(y_i) &= n+i+3, \text{untuk } 1 \le i \le 2n+1,\\
\alpha_1(f) &= 3n+5,\\
\alpha_1(z_i) &= 3n+i+5, \text{untuk } 1 \le i \le n
\end{aligned}
$$

Dengan dapat dilihat bahwa α_1 merupkan fungsi bijektif $\alpha_1 : V(Lg_n) \to \{1, 2, \ldots, 4n+5\}$. Selanjutnya, misal w_{α_1} adalah bobot sisi pelabelan titik $(n+3,1)$-sisi antimagic pada graf daun Lg_n untuk $n \ge 1$, maka himpunan bobot sisi dapat diturunkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha_1}(ea) &= n+3,\\
w_{\alpha_1}(le) &= n+4,\\
w_{\alpha_1}(ey_1) &= n+5,\\
w_{\alpha_1}(x_iy_{2i-1}) &= n+3i+3, \text{untuk} 1 \le i \le n,\\
w_{\alpha_1}(x_iy_{2i}) &= n+3i+4, \text{untuk} 1 \le i \le n,\\
w_{\alpha_1}(x_iy_{2i+1}) &= n+3i+5, \text{untuk} 1 \le i \le n,\\
w_{\alpha_1}(ay_{2n+1}) &= 4n+6,\\
w_{\alpha_1}(fa) &= 4n+7,\\
w_{\alpha_1}(lf) &= 4n+8,\\
w_{\alpha_1}(fy_1) &= 4n+9,\\
w_{\alpha_1}(z_iy_{2i-1}) &= 4n+3i+7, \text{untuk} 1 \le i \le n,\\
w_{\alpha_1}(z_iy_{2i}) &= 4n+3i+8, \text{untuk} 1 \le i \le n,\\
w_{\alpha_1}(z_iy_{2i+1}) &= 4n+3i+9, \text{untuk} 1 \le i \le n
\end{aligned}
$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}(ea)$ yaitu $n+3$, sedangkan bobot sisi tebesar terletak pada $w_{\alpha_1}(z_iy_{2i+1})$ yaitu $4n+3i+9$ untuk $i=n$. Dapat dikatakan bahwa w_{α_1} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = n+3$ dan beda $d = 1$, sehingga dapat ditulis himpunan w_{α_1} = {n+3,n+4,...,7n+9}. Untuk mengetahui bobot sisi terbesar, substitusikan nilai awal $a = n+3$ dan nilai $b = 1$ ke rumus barisan aritmatika, sehingga didapat:

$$
\begin{aligned}
U_n &= a+(n-1)b\\
&= n+3+(6n+7-1)1\\
&= 7n+9
\end{aligned}
$$

Karena bobot sisi EAV terbesar yang terletak pada $w_{\alpha_1}(z_n y_{2n+1}) = U_n$ yaitu $7n + 9$, jadi dapat dinyatakan bahwa w_{α_1} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = n+3$ dan beda $d = 1$. Sehingga terbukti bahwa graf daun Lg_n mempunyai pelabelan $(n+3, 1)$-sisi antimagic titik untuk $n \geq 1$. □

Berdasarkan Lemma 1 maka diperoleh pelabelan $(n+3, 1)$-sisi antimagic titik, selanjutnya pelabelan total super sisi antimagic dengan nilai awal a dan nilai beda $d = 0$ atau dapat dituliskan dengan pelabelan super $(a, 0)$-sisi antimagic total.

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan super* $(11n + 15, 0)$*-sisi antimagic total graf Daun* Lg_n *untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Gunakan pelabelan titik α_1 untuk melabeli titik graf daun Lg_n, kemudian definisikan label sisi $\alpha_2 : E(Lg_n) \to \{4n+6, 4n+7, \ldots, 10n+12\}$, sehingga label sisi α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$-sisi antimagic pada graf Lg_n dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(z_i y_{2i+1}) &= 7n - 3i + 6, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(z_i y_{2i}) &= 7n - 3i + 7, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(z_i y_{2i-1}) &= 7n - 3i + 8, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(f y_1) &= 7n + 6,\\
\alpha_2(lf) &= 7n + 7,\\
\alpha_2(fa) &= 7n + 8,\\
\alpha_2(a y_{2n+1}) &= 7n + 9,\\
\alpha_2(x_i y_{2i+1}) &= 10n - 3i + 10, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(x_i y_{2i}) &= 10n - 3i + 11, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(x_i y_{2i-1}) &= 10n - 3i + 12, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\\
\alpha_2(e y_1) &= 10n + 10,\\
\alpha_2(le) &= 10n + 11,\\
\alpha_2(ea) &= 10n + 12
\end{aligned}
$$

Jika W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf Daun, maka W_{α_2} dapat diperoleh dengan menjumlahkan bobot sisi EAVL $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_2}$ dengan label sisi α_2 yang bersesuaian, sehingga himpunan bobot sisi pelabelan total dapat diturunkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
W^1_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(z_i y_{2i+1}) + \alpha_2(z_i y_{2i+1});\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n\}\\
&= (4n + 3i + 9) + (7n - 3i + 6)\\
&= 11n + 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^2_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(z_iy_{2i}) + \alpha_2(z_iy_{2i});\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (4n+3i+8) + (7n-3i+7) \\
&= 11n+15 \\
W^3_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(z_iy_{2i-1}) + \alpha_2(z_iy_{2i-1});\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (4n+3i+7) + (7n-3i+8) \\
&= 11n+15 \\
W^4_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(fy_1) + \alpha_2(fy_1)\} \\
&= (4n+9) + (7n+6) \\
&= 11n+15 \\
W^5_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(lf) + \alpha_2(lf)\} \\
&= (4n+8) + (7n+7) \\
&= 11n+15 \\
W^6_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(fa) + \alpha_2(fa)\} \\
&= (4n+7) + (7n+8) \\
&= 11n+15 \\
W^7_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(ay_{2n+1}) + \alpha_2(ay_{2n+1})\} \\
&= (4n+6) + (7n+9) \\
&= 11n+15 \\
W^8_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(x_iy_{2i+1}) + \alpha_2(x_iy_{2i+1});\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (n+3i+5) + (10n-3i+10) \\
&= 11n+15 \\
W^9_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(x_iy_{2i}) + \alpha_2(x_iy_{2i});\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (n+3i+4) + (10n-3i+11) \\
&= 11n+15 \\
W^{10}_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(x_iy_{2i-1}) + \alpha_2(x_iy_{2i-1});\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (n+3i+3) + (10n-3i+12) \\
&= 11n+15 \\
W^{11}_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(ey_1) + \alpha_2(ey_1)\} \\
&= (n+5) + (10n+10) \\
&= 11n+15 \\
W^{12}_{\alpha_2} &= \{w_{\alpha_2}(le) + \alpha_2(le)\} \\
&= (n+4) + (10n+11) \\
&= 11n+15
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^{13} &= \{w_{\alpha_2}(ea) + \alpha_2(ea)\} \\ &= (n+3) + (10n+12) \\ &= 11n+15 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa $W_{\alpha_2}^1 = W_{\alpha_2}^2 = \cdots = W_{\alpha_2}^{13} = 11n+15$. Rumusan tersebut dapat pula dituliskan sebagai: $\bigcup_{r=1}^{13} W_{\alpha_2}^r = \{11n+15,\ 11n+15,\ \ldots,\ 11n+15\}$. Sehingga terbukti bahwa graf daun Lg_n dengan $n \geq 1$ mempunyai pelabelan super(a,d)-sisi antimagic total dengan $a = 11n+15$ dan $d = 0$, dengan kata lain graf daun Lg_n mempunyai pelabelan super $(11n+15, 0)$-sisi antimagic total. Bilangan 1, 2, ..., 13 pada $W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, W_{\alpha_2}^3, \ldots, W_{\alpha_2}^{13}$ bukan merupakan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot sisi W_{α_2} untuk tiap sisi yang berlainan. □

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan super* $(5n+9, 2)$*-sisi antimagic total pada graf Daun* Lg_n *untuk* $n \geq 1$.

Bukti. Labeli titik graf daun Lg_n dengan $\alpha_3(e) = \alpha_1(e)$, $\alpha_3(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_3(a) = \alpha_1(a)$,$\alpha_3(l) = \alpha_1(l)$ $\alpha_3(y_i) = \alpha_1(y_i)$, $\alpha_3(f) = \alpha_1(f)$,dan $\alpha_3(z_i) = \alpha_1(z_i)$ definisikan label sisi $\alpha_3 : E(Lg_n) \rightarrow \{4n+6, 4n+7, \ldots, 10n+12\}$, maka label sisi α_3 untuk pelabelan total super $(a, 2)$-sisi antimagic pada graf daun Lg_n dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_3(ea) &= 4n+6, \\ \alpha_3(le) &= 4n+7, \\ \alpha_3(ey_1) &= 4n+8, \\ \alpha_3(x_i y_{2i-1}) &= 4n+3i+6, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_3(x_i y_{2i}) &= 4n+3i+7, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_3(x_i y_{2i+1}) &= 4n+3i+8, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_3(ay_{2n+1}) &= 7n+9, \\ \alpha_3(fa) &= 7n+10, \\ \alpha_3(lf) &= 7n+11, \\ \alpha_3(fy_1) &= 7n+12, \\ \alpha_3(z_i y_{2i-1}) &= 7n+3i+10, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_3(z_i y_{2i}) &= 7n+3i+11, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_3(z_i y_{2i+1}) &= 7n+3i+12, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf daun, berdasarkan pelabelan α_3 maka W_{α_3} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_3}$ dan rumus label sisi α_3, sehingga himpunan bobot total dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W^1_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(ea) + \alpha_3(ea)\}\\
&= (n+3) + (4n+6)\\
&= 5n+9\\
W^2_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(le) + \alpha_3(le)\}\\
&= (n+4) + (4n+7)\\
&= 5n+11\\
W^3_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(ey_1) + \alpha_3(ey_1)\}\\
&= (n+5) + (4n+8)\\
&= 5n+13\\
W^4_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(x_iy_{2i-1}) + \alpha_3(x_iy_{2i-1}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\}\\
&= (n+3i+3) + (4n+3i+6)\\
&= 5n+6i+9\\
W^5_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(x_iy_{2i}) + \alpha_3(x_iy_{2i}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\}\\
&= (n+3i+4) + (4n+3i+7)\\
&= 5n+6i+11\\
W^6_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(x_iy_{2i+1}) + \alpha_3(x_iy_{2i+1}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\}\\
&= (n+3i+5) + (4n+3i+8)\\
&= 5n+6i+13\\
W^7_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(ay_{2n+1}) + \alpha_3(ay_{2n+1})\}\\
&= (4n+6) + (7n+9)\\
&= 11n+15\\
W^8_{\alpha_3} &= \{w^8_{\alpha_3}(fa) + \alpha_3(fa)\}\\
&= (4n+7) + (7n+10)\\
&= 11n+17\\
W^9_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(lf) + \alpha_3(lf)\}\\
&= (4n+8) + (7n+11)\\
&= 11n+19\\
W^{10}_{\alpha_3} &= \{w_{\alpha_3}(fy_1) + \alpha_3(fy_1)\}\\
&= (4n+9) + (7n+12)\\
&= 11n+19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_3}^{11} &= \{w_{\alpha_3}(z_i y_{2i-1}) + \alpha_3(z_i y_{2i-1}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (4n+3i+7) + (7n+3i+10) \\
&= 11n+6i+17 \\
W_{\alpha_3}^{12} &= \{w_{\alpha_3}(z_i y_{2i}) + \alpha_3(z_i y_{2i}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (4n+3i+8) + (7n+3i+11) \\
&= 11n+6i+17 \\
W_{\alpha_3}^{13} &= \{w_{\alpha_3}(z_i y_{2i+1}) + \alpha_3(z_i y_{2i+1}),\ \text{untuk}\ 1 \le i \le n\} \\
&= (4n+3i+9) + (7n+3i+12) \\
&= 11n+6i+21
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi W_{α_3}, dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil pertama adalah $W_{\alpha_3}^1$ yaitu $w_{\alpha_3}(ea) + \alpha_3(ea) = 5n+9$, bobot sisi terkecil kedua adalah $W_{\alpha_3}^2$ yaitu $w_{\alpha_3}(le) + \alpha_3(le) = 5n+11$ dan bobot sisi terbesar adalah $W_{\alpha_3}^{13}$ yaitu $w_{\alpha_3}(z_i y_{2i+1}) + \alpha_3(z_i y_{2i+1}) = 11n+6i+21$ dengan $i = n$. Dapat dikatakan bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 5n+9$ dan beda $d = 2$, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\bigcup_{r=1}^{13} W_{\alpha_3}^r =$ {5n+9,5n+11,...,17n+21}. Untuk mengetahui bobot sisi terbesar dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 5n+9$ dan nilai $b = 2$ ke rumus barisan aritmatika, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
U_n &= a + (n-1)b \\
&= 5n+9+(6n+7-1)2 \\
&= 17n+21
\end{aligned}$$

Karena bobot sisi terbesar yang terletak pada $W_{\alpha_3}^{13} = U_n$ yaitu $17n+21$, jadi dapat dinyatakan bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 5n+9$ dan beda $d = 2$. Sehingga terbukti bahwa graf daun Lg_n mempunyai pelabelan super $(5n+9, 2)$-sisi antimagic total. $\square$

Kesimpulan

Pada penelitian ini ditunjukkan bahwa graf Daun Lg_n dengan $n \ge 1$ mempunyai pelabelan $(n+3, 1)$-sisi antimagic titik serta pelabelan super (a, d)-sisi antimagic total yaitu pelabelan super $(11n+15, 0)$-sisi antimagic total dan pelabelan super $(5n+9, 2)$-sisi antimagic total.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si dan Bapak Drs.Rusli Hidayat, M.Sc yang telah memberika masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] AAG Ngurah, ET Baskoro, R Simanjuntak, *On Antimagic Total Labelings of Generalized* .Journal JCMCC: The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **54**(2005), 57.

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, *Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput, **65** (2008), 41–49.

[3] Dafik, Slamin, Fitriana Eka R, Laelatus Sya'diyah, *Super Antimagic of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs*,Indoms(Indonesian Mathematic Society),Departement of Mathematic Universitas Gajah Mada, Indonesia, (2013).

[4] Dafik, M Mirka, J Ryan, M Bača,Dafik, M Mirka, J Ryan, *Antimagic labeling of the union of stars*,Australasian Journal of Combinatorics **42**(2008), 35-44.

[5] N.Hartsfield dan Ringel, G,*Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited, 1994.

[6] Martin Bača, Edy Tri Baskoro, Mirka Miller, Joe Ryan, Rinovia Simanjuntak, Slamin, Kiki A Sugeng,*Survey of edge antimagic labelings of graphs*,Journal of Indonesian Math,**12** (2006), 113-130.

[7] M Bača, Dafik, M Miller, J Ryan, *Edge-antimagic total labeling of disjoint union of caterpillars*,Journal Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Coputing **65**(2008), 61.

[8] Slamin, M Bača, Y Lin, M Miller, R Simanjuntak,*Edge-magic total labelings of wheels, fans and friendship graphs*, Bulletin of ICA, **35** (2002), 89-98

[9] K.A Sugeng, M Miller, *Super edge-antimagic total labelings, JUtilitas Mathematica*, **71** (2006), 131-141.

[10] WD Wallis, ET Baskoro, M Miller, Slamin, *Edge-magic total labelings*, Australasian Journal of Combinatorics, **22** (2002), 177-190.