Rainbow Connection Number Pada Operasi Graf

Arnasyitha Yulianti S, Dafik
CGANT-Universitas Jember
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
arnasyithays, d.dafik@gmail.com

Abstrak

An edge-colouring of a graph G is rainbow connected if there are k internally vertex-disjoint paths joining them, with no two edges on the path have the same color. Let G be a simple graph and f be an edge coloring, where $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\},\ k \in N$, and the adjacent edges may have the same colour. The rainbow connection numbers of a connected graph G, denoted by $rc(G)$, is a minimal numbers of color G required to make a rainbow connection. This paper discussed rainbow connection for any special graph, namely graph $P_n \otimes H_{2,2}$ and graph $P_3 \otimes C_n$.

Keywords *: Edge coloring, Rainbow connection, Graph operation.*

Pendahuluan

Dalam ilmu matematika dan komputer, teori graf adalah studi tentang grafik dan struktur matematika. Graf dalam konteks ini merujuk pada kumpulan simpul dan tepi yang menghubungkan simpul. Graf adalah salah satu objek utama studi pada Matematika Diskrit. Lebih detail lihat [1],[2].

Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand, Johns, McKeon and Zhang [4]. Konsep ini termotifasi dari informasi dan komunikasi antara suatu agen pemerintah. Departemen Homeland Amerika Serikat yang dibentuk 2003 sebagai respon atas ditemukannya kelemahan transfer informasi setelah serangan teroris 11 September 2001. Suatu informasi membutuhkan perlindungan dikarenakan terhubung langsung ke security negara, sehingga diharuskan juga terdapat prosedur yang memberikan ijin untuk mengakses antara agen-agen pemerintahan. Setiap jalur transfer informasi diperlukan suatu *password* dan $firewall$ angka yang cukup besar untuk melindungi informasi dari serangan pengganggu. Sehinggu muncul pertanyaan, berapa angka minimal *passowrd* dan $firewall$ yang dibutuhkan setiap dua orang agen saat melakukan jalur transfer informasi, disamping itu juga tidak terjadi pengulangan *password* dari masing-masing agen. Lebih detail lihat [8].

Situasi tersebut dapat dimodelkan dengan teori graf. Misalkan G adalah graf terhubung *nontrivial* dengan $edge-coloring$ $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ lihat [1],[7],[9], dimana sisi-sisi yang bertetangga mungkin mempunyai warna yang sama. Suatu jalur disebut *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi pada G yang diwarnai sama. Sebuah $edge - coloring$ graf G adalah *rainbow connected* jika sebarang dua titik yang terhubung dihubungkan oleh jalur *rainbow*. Jelas bahwa jika graf G adalah *rainbow connected* maka pasti terhubung. Sehingga *rainbow connection number* dari graf terhubung G, dinotasikan $rc(G)$, sebagai perwanaan minimum yang dibutuhkan untuk membuat graf G *rainbow connected*. Lebih detail lihat [3],[10], [6]

Penelitian terkait rainbow connection berkembang cukup pesat, lihat [11], [12],[13],[14]. Pada artikel ini akan dipelajari tentang *rainbow connection number* pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantara lain graf $rc(P_n \times H_{2,2})$ dan graf $rc(P_3 \otimes C_n)$. Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan Syafrizal [5] menghasilkan teorema berikut.

Theorem 1 *[5] Andaikan G dan H adalah dua buah graf terhubung,*

$$rc(G \bigodot H) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong K_m \\ 2, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m \text{ dengan } 3 \leq m \leq 6 \\ 3, & \text{untuk } G \cong K_1 \text{ dan } H \cong P_m \text{ dengan } m \geq 7 \\ & G \cong P_2 \text{ dan } H = K_m \text{ dengan } m \geq 1 \end{cases}$$

Proof. Kita perhatikan keempat kondisi.
Kondisi 1, untuk $G \cong K_1$ dan $H \cong K_m$. Karena $K_1 \bigodot K_m$ adalah juga graf komplit, maka $rc(K_1 \bigodot K_m) = 1$. Kondisi 2, untuk $G \cong K_1$ dan $H \cong P_m$ dengan $3 \leq m \leq 6$, maka $rc(K_1 \bigodot K_m) = 2$. Kondisi 3, untuk ($G \cong K_1$ dan $H \cong K_m, m \geq 7$) atau ($G \cong P_2$ dan $H = K_m$). Untuk $G \cong K_1$ dan $H \cong K_m, m \geq 7$ sehingga $rc(K_1 \bigodot K_m) = 3$. Selanjutnya, karena $rc(P_2) = 1$ dan $rc(K_m) = 1$, maka jelaslah bahwa $rc(P_2 \bigodot K_m) = 3$ dimana $m \geq 1$. □

Teorema yang digunakan

Teorema terkait batas atas dan bawah dari rainbow connection.

Theorem 2 *[3] Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$. Maka*
(i) jika G adalah interval graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graph, maka $k(G) = rc(G)$
(ii) jika G adalah AT-free, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 3$
(iii) jika G adalah sebuah threshold graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 3$
(iv) jika G adalah chain graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 4$
(v) jika G adalah sebuah sircular arc graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 4$

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait rainbow connection untuk beberapa graf khusus dan operasinya, seperti $P_n \otimes H_{2,2}$ dan $P_3 \otimes C_n$.

◇ **Teorema 0.1** *Untuk $n \geq 2$, rainbow connection number untuk graf $(P_n \otimes H_{2,2})$ adalah $n+1$.*

Bukti. Graf $P_n \otimes H_{2,2}$ adalah graf yang memiliki $V(P_n \otimes H_{2,2}) = \{a_i, b_i, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n \otimes H_{2,2}) = \{a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}, x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a_i b_i, a_i y_i, b_i x_i, x_i y_i;\ 1 \leq i \leq n\}$, dengan $p = |V| = 4n$ dan $q = |E| = 8n-4$. Berdasarkan Teorema 2 menyatakan bahwa $k(P_n \otimes H_{2,2}) \leq rc(P_n \otimes H_{2,2}) \leq k(P_n \otimes H_{2,2}) + 1$, diamater dari graf $P_n \otimes H_{2,2} = n+1$ maka $n+1 \leq rc(P_n \otimes H_{2,2}) \leq n+2$ sehingga terbukti bahwa $rc(P_n \otimes H_{2,2}) \geq n+1$. Graf $P_n \otimes H_{2,2}$ akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & e = a_i y_i; e = b_i x_i; 1 \leq i \leq n \\ 2, & e = a_i b_i; e = x_i y_i; 1 \leq i \leq n \\ j, & e = a_i a_{i+1}; e = b_i b_{i+1}; e = x_i x_{i+1}; e = y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1; \\ & 3 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n \otimes H_{2,2}) \rightarrow \{1, 2, ..., n+1\}$ karena $rc(P_n \otimes H_{2,2}) \leq n+1$, maka $rc(P_n \otimes H_{2,2}) = n+1$. □

◇ **Teorema 0.2** *Untuk $n \geq 2$, rainbow connection number untuk graf $(P_3 \otimes C_n)$ adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.*

Bukti. Graf $P_3 \otimes C_n$ adalah graf yang memiliki $V(P_3 \otimes C_n) = \{x_i y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_3 \otimes C_n) = \{x_i y_i, y_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup$ \$$x_n x_1, y_n y_1, z_n z_1$, dengan $p = |V| = 4n$ dan $q = |E| = 8n-4$. Berdasarkan Teorema 2 menyatakan bahwa $k(P_3 \otimes C_n) \leq rc(P_3 \otimes C_n) \leq k(P_3 \otimes C_n) + 1$, diamater dari graf $P_3 \otimes C_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$ maka $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq rc(P_3 \otimes C_n) \leq n+3$ sehingga terbukti bahwa $rc(P_3 \otimes C_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$. Graf $P_3 \otimes C_n$ akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, & e = x_i x_{i+1}; e = y_i y_{i+1}; e = z_i z_{i+1}; 1 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil, n = genap \\ & e = x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i+1}; e = y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i+1}; e = z_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} z_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i+1}; \\ & 1 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, n = genap \\ & e = x_i x_{i+1}; e = y_i y_{i+1}; e = z_i z_{i+1}; 1 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, n = ganjil \\ & e = x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i-1} x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}; e = y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i_1} y_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}; e = z_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i-1} z_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}; \\ & 1 \le i \le \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2, n = ganjil \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & e = x_n x_1; e = y_n y_1; e = z_n z_1 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & e = x_i y_i; 1 \le i \le n \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, & e = y_i z_i; 1 \le i \le n \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_3 \otimes C_n) \to \{1, 2, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2\}$ karena $rc(P_3 \otimes C_n) \ge \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$, maka $rc(P_3 \otimes C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$. $\square$

Kesimpulan

Pada bagian ini akan diriview kembali rainbow connection number $rc(G)$ pada beberapa graf khusus dan operasinya. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa.

Untuk graf $P_n \otimes H_{2,2}$, didapatkan *rainbow connection number* adalah $rc(P_n \otimes H_{2,2})$ adalah $n + 1$

Untuk graf $P_3 \otimes C_n$, didapatkan *rainbow connection number* adalah $rc(P_3 \otimes C_n)$ adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembina mata kuliah yang telah membimbing serta memberikan kritik dan saran sehingga artikel ini bisa selesai dengan baik.

References

[1] Gary Chartrand and Ping Zhang. Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory (GTM 244, Springer, 2008).

[3] X.Li and Y.Sun. 2010, Rainbow connection numbers of complementary graphs,
arXiv:1011.4572v3 [math.CO]

[4] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, and P. Zhang, Rainbow connection in
graphs, *Math. Bohem.*, 133, No. 2, (2008), 85–98

[5] Sy, Syafrizal, and Estetikasari, Dewi, On the rainbow connection for some corona
graphs, *Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 100, (2013), 4975–4979.

[6] I. Schiermeyer, Rainbow connection in graphs with minimum degree three, IWOGA 2009, LNCS 5874 (2009) 432-437.

[7] Dafik. Structural properties and labeling of graphs. Diss. University of Ballarat, 2007.

[8] A.B. Ericksen, A matter of security, Graduating Engineer and Computer Careers, (2007), 24-28.

[9] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.

[10] X.Li and Y.Sun, Rainbow connections of graphs a survey, arXiv:1101.5747v2 [math.CO], 2011.

[11] L. Sunil Chandran, Anita Das, D. Rajendraprasad, and N.M. Varma. Rainbow Connection Number and Connected Dominating Sets, arXiv:1010.2296v1, [math.CO], 2010

[12] Ingo Schiermeyer, On Minimally Rainbow k-Connected Graphs, Elsevier B.V. All rights reserved, 2011

[13] Sourav Chakraborty, Eldar Fischer, Arie Matsliah, and Raphael Yuster, Hardness and algorithms for rainbow connection. Journal of Combinatorial Optimization, pages 118, 2009.

[14] M. Basavaraju, L. Sunil Chandran, D. Rajendraprasad, and A. Ramaswamy, Rainbow Connection Number of Graph Power and Graph Products, arXiv:1104.4190v2 [math.CO], 2011