BILANGAN DOMINASI DARI GRAF-GRAF KHUSUS

Dwi Agustin Retno Wardani[1,2], Ika Hesti Agustin[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
Jl. Kalimantan 37 Kampus Tegal Boto
2i.agustin@gmail.com **Abstract**

Dominating number $\gamma(G)$ adalah kardinalitas terkecil dari sebuah *dominating set*. Nilai dari *dominating number* selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* mengcover titik yang ada disekitarnya dan seminimal mungkin dengan ketentuan graf sederhana yang tidak memiliki loop dan sisi ganda. Diberikan graf G dengan V titik dan E sisi, misalkan D merupakan subset dari V. Jika setiap titik dari $V - D$ saling *adjacent* sedikitnya dengan satu titik dari D, maka D dikatakan *dominating set* dalam graf G. Artikel ini akan membahas *dominating set* pada beberapa graf khusus diantaranya adalah Graf Bunga (Fl_n), Graf Gunung Berapi (ϑ_n), Graf Firecracker ($F_{n,k}$), Graf Pohon Pisang ($B_{n,m}$) dan Graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$).

Key Words : *dominating set, dominating number.*

Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang banyak penerapannya dalam berbagai bidang ilmu seperti *engineering*, fisika, biologi, kimia, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Teori graf juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan - persoalan, seperti *Travelling Salesperson Problem, Chinese Postman Problem, Shortest Path, Electrical Network Problems, Graph Coloring*, dan lain-lain [9].

Dominating number dinotasikan $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari sebuah *dominating set* yang merupakan pengembangan dari penelitian-penelitian sebelumnya. Nilai dari *dominating number* selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$. Mengenai batas atas dari *dominating number* adalah banyaknya titik pada graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma(G) \leq n$ untuk setiap graf yang berordo n. Diketahui graf $G = (V, E)$. Misalkan D merupakan subset dari V. Jika setiap titik dari $V - D$ saling *adjacent* sedikitnya dengan satu titik dari D, maka D dikatakan himpunan dominasi dalam graf G [6].

Himpunan dominasi minimal adalah himpunan dominasi yang tidak ada titik yang dapat dihilangkan tanpa mengubah dominasinya. Himpunan kebebasan *independent set* dari graf G adalah suatu himpunan titik - titik dengan tidak ada dua titik dalam himpunan yang saling berdekatan (*adjacent*). Bilangan kebebasan *independent number* merupakan kardinalitas terbesar dari himpunan kebebasan dan dinotasikan dengan $\beta(G)$. Himpunan kebebasan maksimal adalah himpunan kebebasan yang tidak ada titik lainnya dapat ditambahkan kedalamnya tanpa mengubah kebebasannya [4].

Penelitian terkait *dominating set* berkembang cukup pesat [7] [8][1][10]. Dalam penelitian ini mengembangkan *dominating set* pada beberapa graf khusus diantaranya adalah Graf Bunga (Fl_n), Graf Gunung Berapi (ϑ_n), Graf Firecracker ($F_{n,k}$), Graf Pohon Pisang ($B_{n,m}$) dan Graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$).

Teorema yang Digunakan

Teorema mengenai batas atas dan batas bawah dari *dominating set* yang akan digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

Theorem 1 [5] *Untuk sebarang graf G,*

$$\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$$

Keterangan:

p = *Banyaknya titik*

$\Delta(G)$= *Derajat Terbesar*

$\gamma(G)$ = *Dominating Number*

Bukti: Misalkan S adalah sebuah $\gamma - set$ dari G. Pertama, kita andaikan batas bawah. Setiap titik dapat sebagai *dominating set* dan $\Delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan derajat maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai *dominating set* $N[v]$ dan titik di $V - N[v]$ merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan *dominating set* dengan kardinalitas $n - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$. □

Hasil Penelitian

Di bagian ini akan di bahas mengenai pengembangan *dominating number* pada graf khusus meliputi Graf Bunga (Fl_n), Graf Gunung Berapi (ϑ_n), Graf Firecracker ($F_{n,k}$), Graf Pohon Pisang ($B_{n,m}$) dan Graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$). Sebelum mencari *dominating set*nya akan dicaei terlebih dahulu definisi himpunan titik dan sisinya [2][3].

◇ **Teorema 1** *Misal* $G = Fl_n$ *untuk* $n \geq 2$ *maka dominating number dari graf bunga* $\gamma(Fl_n) = 1$

Bukti: Graf bunga (Fl_n) memiliki $V(Fl_n) = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Fl_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{Ay_i; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{x_n x_1, 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$ serta $p = |V| = 2n + 1$, $q = |E| = 4n$ dan $\Delta Fl_n = 2n$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta Fl_n} \rceil \leq \gamma(Fl_n) \leq p - \Delta Fl_n$. Disubstitusikan nilai p dan ΔFl_n sehingga diperoleh $1 \leq \gamma(Fl_n) \leq 1$. Pilih *dominating set* $D = \{A\}$. Sehingga $|D| = 1$. Terbukti bahwa $\gamma(Fl_n) = 1$ □

◇ **Teorema 2** *Misal* $G = \vartheta_{n,m}$ *untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 1$ *maka* $\gamma(\vartheta_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Bukti: Graf gunung berapi $\vartheta_{n,m}$ memiliki $V = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \bigcup \{x_n x_1\} \bigcup \{x_1 y_j; 1 \leq j \leq n\}$ serta $p = |V| = n+m$, $q = |E| = n+m-1$ dan $\Delta\vartheta_{n,m} = m+2$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta\vartheta_{n,m}} \rceil \leq \gamma(\vartheta_{n,m}) \leq p - \Delta\vartheta_{n,m}$. Disubstitusikan nilai p dan $\Delta\vartheta_{n,m}$ sehingga diperoleh $1 \leq \gamma(\vartheta_{n,m}) \leq 1$. Pilih *dominating set* $D = \{x_1, x_{3i-2}; dimana 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$ sehingga $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Terbukti bahwa $\gamma(\vartheta_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{x_1, x_n, x_{3i-1}, x_{3i-2}; 1 \leq i \leq \frac{n}{3} \rceil\}$ sehingga $|D| = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. Terbukti bahwa $\gamma_t(\vartheta_{n,m}) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. □

◇ **Teorema 3** *Misal* $G = F_{n,k}$ *untuk* $n \geq 1$ *maka dominating number dari graf firecracker* $\gamma(F_{n,k}) = n$

Bukti: Graf firecracker $(F_{n,m})$ memiliki $V(F_{n,k}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(F_{n,m}) = \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \bigcup \{x_{i,1} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ serta $p = |V| = nm+n$, $q = |E| = nm+n-1$ dan $\Delta F_{n,m} = n$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta F_{n,m}} \rceil \leq \gamma(F_{n,m}) \leq p - \Delta F_{n,m}$. Disubstitusikan nilai p dan $\Delta F_{n,m}$ sehingga diperoleh $n \leq \gamma(F_{n,m}) \leq nm$. Pilih *dominating set* $D = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|D| = n$. Terbukti bahwa $\gamma(F_{n,m}) = n$. □

◇ **Teorema 4** *Misal* $G = B_{nm}$ *untuk* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 3$ *maka dominating number dari graf pohon pisang* $\gamma(B_{nm}) = n + 1$

Bukti: Graf pohon pisang (B_{nm}) memiliki $V(B_{nm}) = \{p, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq m\}$ dan $E(B_{nm}) = \{px_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq m\} \bigcup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ serta $p = |V| = n(m+1)+1$, $q = |E| = n + nm$ dan $\Delta B_{nm} = m$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta B_{nm}} \rceil \leq \gamma(B_{nm}) \leq p - \Delta B_{nm}$. Disubtitusikan nilai p dan ΔB_{nm} sehingga diperoleh $n+1 \leq \gamma(B_{nm}) \leq n(m+1)+1-m$. Pilih *dominating set* $D = \{P, x_i;$ dimana $1 \leq i \leq m\}$ sehingga $|D| = n+1$. Terbukti bahwa $\gamma(B_{nm}) = n+1$. □

◇ **Teorema 5** *Misal* $G = CR_{n,m}$ *untuk* $n \geq 3$ *maka dominating number dari graf tunas kelapa* $\gamma(CR_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Bukti: Graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ memiliki $V(CR_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, y_i; 1 \leq i \leq m, Z\}$ dan $E(CR_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \bigcup \{x_n x_1\} \bigcup \{x_n x_Z\} \bigcup \{x_n y_1\} \bigcup \{x_n y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \bigcup \{x_n y_m\}$ serta $p = |V| = m + n + 1$, $q = |E| = n + 2m$ dan $\Delta CR_{n,m} = m + 3$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan $\lceil \frac{p}{1+\Delta CR_{n,m}} \rceil \leq \gamma(CR_{n,m}) \leq p - \Delta CR_{n,m}$. Disubstitusikan nilai p dan $\Delta CR_{n,m}$ sehingga diperoleh $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma(CR_{n,m}) \leq n - 2$. Pilih *dominating set* $D = \{x_1, x_{3i-2}; dimana 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$ sehingga $|D| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Terbukti bahwa $\gamma(CR_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. □

Kesimpulan

Di bagian ini *dominating set* yang menjadi fokus penelitian adalah *dominating set* berjarak satu $\gamma(G)$ pada sebarang graf khusus dengan batas bawah dan atas yang signifikan $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. Sehingga dapat disimpulkan hasil penelitian diatas mengenai penegembangan teori *dominating set* pada sebarang graf khusus.

a. Graf bunga (Fl_n)

$$\gamma(Fl_n) = 1$$

b. Graf Gunung Berapi (ϑ_n)

$$\gamma(\vartheta_n) = \lceil \tfrac{n}{3} \rceil$$

c. Graf Firecracker ($F_{n,k}$)

$$\gamma(F_{n,k}) = n$$

d. Graf Pohon Pisang ($B_{n,m}$)

$$\gamma(B_{nm}) = n + 1$$

e. Graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$)

$$\gamma(CR_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

References

[1] A. D. Jumani, L. Chand, *Dominating Number of Prism over Cycle C_n*, Sindh University Research Journal (Science Series), Sindh Univ. Res. Jour. (Sci. ser) Vol.44 (2) 237-238 (2012).

[2] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, *Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs*, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[3] Dafik, *Structural Properties and Labeling of Graphs*, University of Ballarat, 2007.

[4] Goddard, W and Henning, M.A. *Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results*. South African National Research Foundation and The University Of Johannesburg, 2006.

[5] Haynes, T.W, *Fundamental of Domination in Graphs*, New York: Marcel Dekker, INC., 1998.

[6] Haynes, T.W and Henning, M.A, *Total Domination Good Vertices in Graphs. Australasian Journal of Combinatorics*, **26** (2002), 305-315.

[7] Hesti, I. A, Dafik. *On the Domination Number of Some Families of Special Graph*. 2014

[8] Liedloff, *Dominating Set on Bipartite Graphs*, Université Paul Verlaine-Metz, 2009.

[9] Rosen. K. H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application (5 ed)*.New York: McGraw-Hill.

[10] Y. B. Maralabhavi, Anupama S. B., *Domination Number of Jump Graph*, International Mathematical Forum, Vol. 8, 2013, no. 16, 753 - 758.