Super (a,d)-$\mathcal{H}$-Antimagic Total Selimut pada Shackle Graf Triangular Book

Putri Rizky H.P.[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
Putrirhp@gmail.com, Hestyarin@gmail.com
[3]Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember
d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Diberikan G graf sederhana, terhubung dan tidak berarah. $G(V, E)$ memiliki selimut-$\mathcal{H}$ jika setiap sisi pada E bagian dari subgraf G yang isomorphic dengan $\mathcal{H}$. Total selimut (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic adalah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., |V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$ dimana $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, ..., |V|\}$, maka graf disebut graf super $\mathcal{H}$- antimagic. Pada makalah ini, kita mengkaji mengenai super (a,d)-$(Bt_3 + 2e)$- antimagic total selimut pada shackle graf triangular book dinotasikan dengan SBt_n.

Key Words : *Super (a, d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut, Shackle graf triangular book.*

Pendahuluan

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Rosa di tahun 1967 [1]. Suatu pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf pada bilangan bulat non-negatif yang disebut label. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total [2]. Kemudian pelabelan berkembang menjadi pelabelan graceful, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib (*anti magic*) dan lain-lain. Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah ajaib dan anti ajaib. Pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa sebagai M-(*valuation*) pada tahun 1970 [8]. Selanjutnya Simanjutak dkk. (2000) memperkenalkan pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib. Berbagai kelas graf telah ditunjukkan memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib, diantaranya lintasan dan lingkaran. Lebih detail lihat [10].

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Lladó pada tahun 2005. Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan selimut $\mathcal{H}$-ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam subgraf H' dari G yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$. Dalam hal ini $\mathcal{H}$ merupakan subgraf dari G. Lihat [4]. Oleh Inayah dkk kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $\mathcal{H}$-anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika $a, a+d, a+2d, ..., a+(t-1)d$. Lebih detail lihat [5]

Hasil- hasil pelabelan super ((a,d))-$\mathcal{H}$-antimagic covering yang sudah ditemukan diantaranya adalah lihat [6] dan [7], Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan pelabelan super ((a,d))-$\mathcal{H}$-antimagic covering pada shakle graf triangular book, dimana $\mathcal{H} = \mathcal{B}\sqcup_{\ni} + \in \rceil$. Graf triangular book yang dinotasikan dengan Bt_n merupakan famili dari graf Komplete Tripartit, yaitu $K_{1,1,n}$, untuk Lebih detail lihat [3].

Kardinalitas Graf Shackle Triangular Book

Misalkan k adalah bilangan bulat positif. Maryati dkk (2010) mendefinisikan graf shackle dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, \ldots, G_k)$, sebagai sebuah graf yang dibentuk dari k graf tak terhubung tak trivial $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k]$ dengan $\mid s, t \mid \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k-1]$, G_i dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $k-1$ titik penghubung itu semua berbeda. Lebih detail lihat [9]. Berdasarkan definisi, shackle graf triangular book adalah graf SBt_n dengan himpunan titik $V = \{x_i, y_i, z_j, p_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E = \{p_i z_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{p_i y_i \cup p_i x_i \cup p_i p_{i+1} \cup p_{i+1} z_i \cup p_{i+1} y_i \cup p_{i+1} x_i \cup x_i z_{i+1}\ ; 1 \leq i \leq n\}$.

Berdasarkan himpunan titik dan sisi dari graf shackle triangular book dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada shackle graf triangular book SBt_n adalah $p_G = 4n+2$. Sedangkan jumlah sisi pada shackle graf triangular book SBt_n adalah $q_G = 8n+1$. Selain itu, terdapat jumlah titik yang merupakan selimut dari shackle graf triangular book adalah $p_H = 6$ dan jumlah sisi pada selimut dari shackle graf triangular book adalah $q_H = 9$ serta jumlah selimut pada shackle graf triangular book yang akan diteliti oleh peneliti adalah sejumlah n.

Batas atas d shackle graf triangular book SBt_n dapat ditentukan dengan membuktikan lemma berikut:

Lemma 1 *Jika sebuah graf G (V, E) adalah pelabelan super (a, d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering maka $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$.*

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, .., p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, .., p_G + q_G\}$.

Misalkan graf (p_G,q_G) mempunyai pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$ antimagic total covering dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a(s-1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \ldots + (p_G + q_H) &\leq a \\
\frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &= \\
\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
a + (s-1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + ... + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
&\quad +(p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + ... + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\
&\quad -\frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - (\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic total selimut dari berbagai famili graf.

Sehingga batas atas d untuk penelitian ini adalah :

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\ &\leq \frac{(4n+2-6)6 + (8n+1-9)9}{n-1} \\ &\leq \frac{(4n-4)6 + (8n-7)9}{n-1} \\ &\leq \frac{96n-96}{n-1} \\ &\leq 96 \end{aligned}$$

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema mengenai graf pada shackle graf triangular book.

◇ **Teorema 1** *Ada pelabelan super* $(36n+84, 96)$-(Bt_3+2e)-*antimagic total selimut pada shackle graf triangular book* SBt_n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif α_1 yang definisikan sebagai pelabelan $\alpha_1 : V(SBt_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$ dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_i) &= 4i, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= 4i-1, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n \\ \alpha_1(z_j) &= 4i-2, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n+1 \\ \alpha_1(p_j) &= 4i-3, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n+1 \end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan SBt_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf triangular book dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$ yang menjadi covering pada shackle graf triangular book, maka fungsi bijektif w_{α_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1} &= \alpha_1(p_i) + \alpha_1(x_i) + \alpha_1(y_i) + \alpha_1(z_i) + \alpha_1(p_{i+1}) + \alpha_1(z_{i+1}) \\ &= (4i-3) + (4i) + (4i-1) + (4i-2) + (4(i+1)-3) + (4(i+1)-2), \\ &\quad \text{jika } 1 \le i \le n\} \\ &= 24i - 3 \end{aligned}$$

Labeli sisi shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(SBt_n) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 8n+1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(p_iz_i) &= 4n + 8i - 5, \text{untuk} 1 \le i \le n+1, \\ f(p_iy_i) &= 4n + 8i - 4, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(p_ix_i) &= 4n + 8i - 3, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(p_ip_{i+1}) &= 4n + 8i - 2, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(p_{i+1}z_i) &= 4n + 8i - 1, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(p_{i+1}y_i) &= 4n + 8i, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(p_{i+1}x_i) &= 4n + 8i + 1, \text{untuk} 1 \le i \le n, \\ f(x_iz_{i+1}) &= 4n + 8i + 2, \text{untuk} 1 \le i \le n, \end{aligned}$$

Jika W_{α_1} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada shakle graf triangular book berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_1} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + f(p_iz_i) + f(p_iy_i) + f(p_ix_i) + f(p_ip_{i+1}) + f(p_{i+1}z_i) + \\ &\quad f(p_{i+1}y_i) + f(p_{i+1}x_i) + f(x_iz_{i+1}) + f(p_iz_i); \text{ jika } 1 \le i \le n \\ &= 36n + 96i - 12 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_1} = \{36n+84, 36n+180, \ldots, 132n-12\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 36n + 84 + (n-1)96 = 132n - 12$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(36n+84, 96)$-$(Bt_3 + 2e)$-total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 2** *Ada pelabelan super* $(52n + 68, 60)$-$(Bt_3 + 2e)$-*antimagic total selimut pada shackle graf triangular book* SBt_n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif α_2 yang definisikan sebagai pelabelan $\alpha_2 : V(SBt_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 4n + 2\}$ dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x_i) &= 4i, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n \\
\alpha_2(y_i) &= 4i - 1, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n \\
\alpha_2(z_j) &= 4i - 2, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n + 1 \\
\alpha_2(p_j) &= 4i - 3, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n + 1
\end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan SBt_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Jika w_{α_2} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf triangular book dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$ yang menjadi covering pada shackle graf triangular book, maka fungsi bijektif w_{α_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_2} &= \alpha_2(p_i) + \alpha_2(x_i) + \alpha_2(y_i) + \alpha_2(z_i) + \alpha_2(p_{i+1}) + \alpha_2(z_{i+1}) \\
&= (4i - 3) + (4i) + (4i - 1) + (4i - 2) + (4(i + 1) - 3) + (4(i + 1) - 2), \\
&\quad \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
&= 24i - 3
\end{aligned}$$

Labeli sisi shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(SBt_n) \rightarrow \{4n + 3, 4n + 4, \ldots, 8n + 1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(p_iz_i) &= 4n+4i-1, \text{untuk} 1 \leq i \leq n+1, \\
f(p_ix_i) &= 4n+4i, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1}z_i) &= 4n+4i+1, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1}x_i) &= 4n+4i+2, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_iy_i) &= 8n+4i, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_ip_{i+1}) &= 8n+4i+1, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1}y_i) &= 8n+4i+2, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(x_iz_{i+1}) &= 8n+4i+3, \text{untuk} 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}$$

Jika W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada shackle graf triangular book berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{α_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_2} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + f(p_iz_i) + f(p_ix_i) + f(p_{i+1}z_i) + f(p_{i+1}x_i) + f(p_iy_i) + \\
&\quad f(p_ip_{i+1})f(p_{i+1}y_i) + f(x_iz_{i+1}) + f(p_iz_i); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \\
&= 52n + 60i + 8
\end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_2} = \{52n+68, 52n+128, \ldots, 112n+8\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 52n+68+(n-1)60 = 112n+8$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(52n+68, 60)$-(Bt_3+2e)-total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$. □

◇ **Teorema 3** *Ada pelabelan super* $(60n+60, 48)$-(Bt_3+2e)-*antimagic total selimut pada shackle graf triangular book* SBt_n *untuk* $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif α_3 yang definisikan sebagai pelabelan $\alpha_3 : V(SBt_n) \to \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$ dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\alpha_3(x_i) &= 4i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_3(y_i) &= 4i-1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\
\alpha_3(z_j) &= 4i-2, \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\
\alpha_3(p_j) &= 4i-3, \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1
\end{aligned}$$

Untuk pelabelan titik pada α_3 adalah fungsi bijektif yang memetakan SBt_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. Jika w_{α_3} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada shackle graf triangular book dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan beberapa buah label titik dari $\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$ yang menjadi covering pada shackle graf triangular book, maka fungsi bijektif w_{α_3} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_3} &= \alpha_3(p_i) + \alpha_3(x_i) + \alpha_3(y_i) + \alpha_3(z_i) + \alpha_3(p_{i+1}) + \alpha_3(z_{i+1}) \\
&= (4i-3) + (4i) + (4i-1) + (4i-2) + (4(i+1)-3) + (4(i+1)-2), \\
&\quad \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
&= 24i-3
\end{aligned}$$

Labeli sisi shackle graf triangular book SBt_n dengan fungsi bijektif f yang definisikan sebagai pelabelan $f : E(SBt_n) \rightarrow \{4n+3, 4n+4, \ldots, 8n+1\}$ maka pelabelan f dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(p_i z_i) &= 12n - 8i + 11, \text{untuk} 1 \leq i \leq n+1, \\
f(p_i y_i) &= 12n - 8i + 10, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_i x_i) &= 12n - 8i + 9, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_i p_{i+1}) &= 12n - 8i + 8, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1} z_i) &= 12n - 8i + 7, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1} y_i) &= 12n - 8i + 6, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(p_{i+1} x_i) &= 12n - 8i + 5, \text{untuk} 1 \leq i \leq n, \\
f(x_i z_{i+1}) &= 12n - 8i + 4, \text{untuk} 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot covering total selimut pada shackle graf triangular book berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka

W_{α_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{α_3} dan rumus label sisi f dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3} + f(p_i z_i) + f(p_i y_i) + f(p_i x_i) + f(p_i p_{i+1}) + f(p_{i+1} z_i) + \\ &\quad f(p_{i+1} y_i) + f(p_{i+1} x_i) + f(x_i z_{i+1}) + f(p_i z_i);\text{ jika } 1 \leq i \leq n \\ &= 108n - 48i + 60 \end{aligned}$$

Dengan demikian $W_{\alpha_3} = \{60n + 60, 60n + 108, \ldots, 108n + 12\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 60n + 60 + (n-1)48 = 108n + 12$ maka terbuktilah bahwa ada pelabelan super $(60n + 60, 48)$-$(Bt_3 + 2e)$-total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini akan direview kembali mengenai total selimut super (a,d)-$\mathcal{H}$-antimagic pada shackle graf triangular book. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat beberapa teorema yang telah dibuktikan adalah sebagai berikut :

- Ada pelabelan super $(36n+84, 96)$-(Bt_3+2e)-antimagic total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$.

- Ada pelabelan super $(52n+68, 60)$-(Bt_3+2e)-antimagic total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$.

- Ada pelabelan super $(60n+60, 48)$-(Bt_3+2e)-antimagic total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n untuk $n \geq 2$.

Namun demikian, sesuai dengan batas atas $d \leq 96$, sedangkan dalam penelitian ini baru diketemukan $d \in \{96, 60, 48\}$ sehingga masih tersisa d yang lain yang belum diketemukan. Oleh karena itu penelitian mengajukan masalah terbuka berikut:

Open Problem 1 *Tentukan (a,d)-$(Bt_3 + 2e)$-total selimut pada shackle graf triangular book SBt_n bila $n \geq 2$ untuk $d \leq 96$ selain $d \in \{96, 60, 48\}$.*

References

[1] A, Rosa. 1967. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph. In Theory of Graphs (Proc. Int. Symposium, Rome, July 1966), Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris 349-355.

[2] Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Dicrete Math.* (2009), 4909-4915.

[3] Dafik, Slamin, Candra, F., Sya'diyah, L. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. Indoms (Indonesian Mathematics Society), Department of Mathematics Universitas Gajah Mada, Indonesia.

[4] Gutiérrez, A. dan Lladó, A. (2005). Magic Coverings. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 55,4356.

[5] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. On (a,d)-H-Antimagic Covering of Graph. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 71, 273-281.

[6] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2013. Super (a,d)-H-Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H. Australasian Journal of Combinatorics 57, 127-138.

[7] Karyanti. 2012. Pelabelan Selimut (a,d)-H-Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

[8] Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). Magic Valuations of Finite Graph. Canada Mathematics Bulletin 13,451461.

[9] Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph. Utilitas Math 83, 333-342.

[10] Simanjuntak, R., Miller, M., dan Bertault, F. (2000). Two New (a,d)-Antimagic Graph Labelings. Proceeding of the Eleventh Australasian Workshop of Combinatorial Algorithm (AWOCA), 179189.