Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan

Alfian Yulia Harsya[1,2], Ika Hesti Agustin[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT- University of Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember,
alfian.yh@gmail.com,hestyarin@gmail.com
[3]Jurusan Matematika FKIP Universitas Jember, d.dafik@gmail.com

Abstract

Pewarnaan titik adalah memberikan warna pada titik - titik graf sehingga setiap dua titik yang bertetangga ($adjacent$) mempunyai warna yang berbeda. Warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3, , n, sehingga $\chi(G) \leq V(G)$. Operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Adapun macam -macam pengoperasian graf yaitu operasi $Joint$ $(G+H)$,*Cartesian Product* $(G\square H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Composition* $(G[F])$, *Shackel*, dan *Amalgamation*. Graf sikel $(cycle)$ merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua yang dilambangkan dengan C_n. Sedangkan graf lintasan $(path)$ ialah graf dengan barisan berselang-seling antara titik dan sisi yang berbentuk v_0, e_1, $v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$ yang dilambangkan dengan P_n. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan operasi graf sikel dengan graf lintasan. Penelitian ini menghasilkan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf ($P_2 \otimes C_n$), $shack$($P_2 \otimes C_5$, n), ($P_3 \odot C_n$), ($P_n[C_3]$), dan $amal$(($P_2 \square C_5$) $+ P_2, v = 1, n$).

Key Words *: pewarnaan titik, operasi graf, graf sikel, graf lintasan.*

Pendahuluan

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan $(colouring)$. Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik ($vertex\ colouring$), pewarnaan sisi ($face\ colouring$), dan pewarnaan wilayah ($region\ colouring$). Pewarnaan titik ($vertex\ colouring$) adalah pemberian warna pada titik-titik graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah warna paling sedikit yang digunakan untuk mewarnai titik pada graf G disebut bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$[1].

Pewarnaan titik dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus yaitu graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan simetris. Sedangkan operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Adapun macam - macam pengoperasian graf yaitu operasi $Joint$ $(G{+}H)$,*Cartesian Product* $(G\Box H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, $(G \oplus H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Composition* $(G[F])$, *Shackel*, dan *Amalgamation*.

Pada tahun 2013, Kavitha telah melakukan penilitian yang mengkaji tentang bilangan kromatik [7]. Pada tahun yang sama Lu telah melakukan pewarnaan titik pada graf bipartit dimana setiap 3-graf bipartit terhubung memiliki bilangan kromatik $\chi(G)$ = 2 [8]. Ardiyansyah juga menentukan bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf yang menghasilkan $\chi(K_{2m}C_n) = m$ [1]. Pada tahun 2014, Kaiser melakukan pewarnaan titik pada graf pesawat ($Plane\ Graph$) [6]. Berdasarkan pada penelitian sebelumnya, peneliti akan mengembangkan pewarnaan titik pada beberapa graf hasil operasi dari dua graf khusus. Graf khusus yang digunakan adalah graf sikel ($cycle$) dan graf lintasan ($path$). Graf sikel ($cycle$) adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua yang dilambangkan dengan C_n. Sedangkan graf lintasan ($path$) adalah graf dengan barisan berselang-seling antara titik dan sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n$ yang dilambangkan dengan P_n. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada hasil pengoperasian graf lintasan dengan graf sikel.

Teorema yang Digunakan

Beberapa teorema yang terkait dengan bilangan kromatik untuk pewarnaan titik.

Theorem 1 *[11] Sebuah graf G memiliki bilangan kromatik $\chi(G)$=1 jika dan hanya jika merupakan graf kosong.*

Theorem 2 *[11] Untuk setiap graf planar berlaku 4 warna yaitu $\chi(G) \leq 4$.*

Theorem 3 *[11] Jika G graf sederhana dengan derajat maksimum (G) , maka $\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$.*

Theorem 4 *[11] Jika G adalah graf dengan titik sebanyak p dan sisi sebanyak q dan G mempunyai kromatik number χ, maka $(\chi - 1)p \leq 2q$.*

Theorem 5 *[13] Misal G_1 dan G_2 adalah dua buah graf sederhana, Tensor Product dari G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \otimes G_2$, maka bilangan kromatik $\chi(G) = min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.*

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait pewarnaan titik pada operasi graf sikel dengan graf lintasan, seperti graf $(P_2 \otimes C_n)$, $shack(P_2 \otimes C_5$, r), $(P_3 \odot C_n)$, $(P_n[C_3])$, dan $amal((P_2 \Box C_5) + P_2, v = 1, n)$.

Akibat 0.1 *Misal* $G = P_2 \otimes C_n$*, untuk* $n \geq 3$*, memiliki bilangan kromatik sebagai berikut*

$$\chi(P_2 \otimes C_n) = 2$$

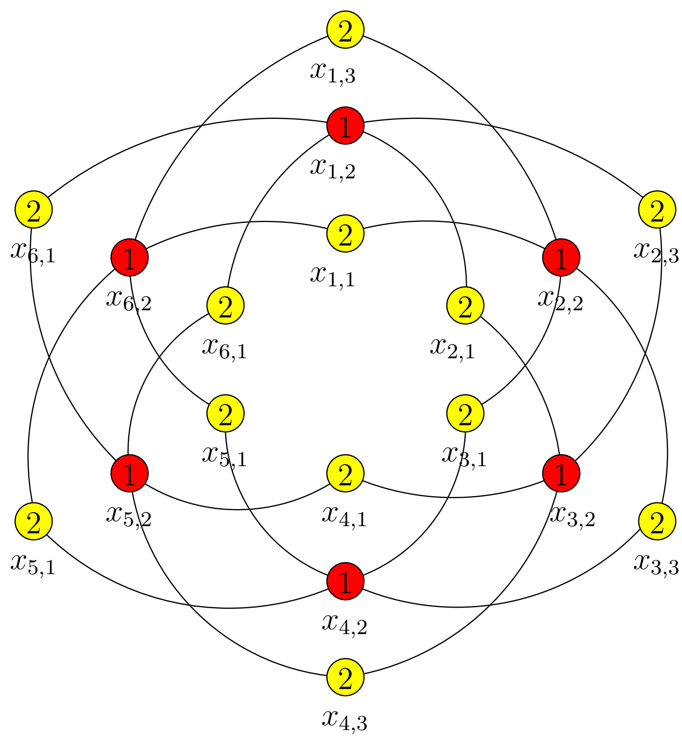

Figure 1: Contoh pewarnaan titik $(P_2 \otimes C_n)$ untuk n genap

Bukti. Graf $P_2 \otimes C_n$ adalah graf yang memiliki himpunan titik V= $\{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\}$ dan himpunan sisi E= $\{x_{i,1}x_{i+1,2}; 1 \leq i \leq n-1\}$ $\cup\{x_{i,1}x_{i-1,2}; 2 \leq i \leq n-1\}$ serta $|V|$= p= $2n$ dan $|E|$=$2n$. Fungsi pewarnaan titik pada graf G = $P_2 \otimes C_n$ adalah

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ ganjil, \ j = \ 1 \\ 2, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ genap, \ j = \ 2 \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $P_2 \otimes C_n$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(P_2 \otimes C_n)$= 2. □

◇ **Teorema 0.1** *Misal G = $shack(P_2 \otimes C_5, r)$, untuk $n \geq 2$, memiliki bilangan kromatik*

$$\chi(shack(P_2 \otimes C_5, n)) = 2$$

Bukti. Graf $shack(P_2 \otimes C_5, n)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik V= $\{x^k_{i,1}; 1 \leq i \leq 5; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x^k_{i,2}; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq k \leq r\}$ dan himpunan sisi E= $\{x^k_{i,1}x^k_{i+1,2}; 1 \leq i \leq 3; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x^k_{i,1}x^k_{i-1,2}; 2 \leq i \leq 5; 1 \leq k \leq r\}$ $\cup\{x^k_{5,1}x^k_{1,2}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x^k_{4,1}x^{k+1}_{1,2}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x^k_{1,1}x^{k+1}_{1,2}; 1 \leq k \leq r\}$serta $|V|$= p= $9n + 1$ dan $|E|$=q= $10r$ Fungsi pewarnaan titik pada graf $shack(P_2 \otimes C_5, r)$ adalah

$$f(x^k_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq i \leq n,\ i\ ganjil,\ j =\ 1; 1 \leq k \leq r \\ 2,\ 1 \leq i \leq n,\ i\ genap,\ j =\ 2; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $shack(P_2 \otimes C_5, r)$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(shack(P_2 \otimes C_5, n))$= 2. □

◇ **Teorema 0.2** *Misal $P_3 \odot C_n$, untuk $n \geq 3$, memiliki bilangan kromatik*

$$\chi(P_3 \odot C_n) = 3$$

Bukti. Graf $P_3 \odot C_n$ adalah graf yang memiliki himpunan titik V= $\{x_j; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi E= $\{x_jx_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\}$ $\cup\{x_nx_1\} \cup \{y_{i,j}y_{i+1,j}; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_jy_{i,j}; 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq n\}$ serta $|V|$= p= $4n$ dan $|E|$=q= $6n$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $P_3 \odot C_n$ adalah

Untuk m genap

$$f(x_j) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq j \leq n,\ j\ ganjil \\ 2,\ 1 \leq j \leq n,\ j\ genap \end{cases}$$

di j ganjil

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 2,\ 1 \leq i \leq 3,\ i\ ganjil \\ 3,\ 1 \leq i \leq 3,\ i\ genap \end{cases}$$

di j genap

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq i \leq 3,\ i\ ganjil \\ 3,\ 1 \leq i \leq 3,\ i\ genap \end{cases}$$

Untuk n ganjil

$$f(x_j) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq j \leq n-2, \ j \ ganjil \\ 2, \ 1 \leq j \leq n-1, \ j \ genap \\ 3, \ j = n \end{cases}$$

di j ganjil

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 2, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ ganjil \\ 3, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ genap \end{cases}$$

di j genap

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ ganjil \\ 3, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ genap \end{cases}$$

di $j = n$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ ganjil \\ 2, \ 1 \leq i \leq 3, \ i \ genap \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf ($P_3 \odot C_n$) mempunyai bilangan kromatik χ ($P_3 \odot C_n$)= 3 untuk n genap dan untuk n ganjil tetapi mempunyai fungsi pewarnaan titik yang berbeda. □

◇ **Teorema 0.3** *Misal G = $P_n[C_3]$, untuk $n \geq 2$, memiliki bilangan kromatik*

$$\chi(P_n[C_3]) = 6$$

Bukti. Graf $P_n[C_3]$ adalah graf yang memiliki himpunan titik V= $\{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3\}$ dan E= $\{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\}$ $\cup\{x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1\}$ $\cup\{x_{i,1}x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n-1\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j-1}; 1 \leq i \leq n-1 \ 2 \leq i \leq 3\}$ $\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; \ 1 \leq j \leq 2\}$. serta $|V|$= p= $3n$ dan $|E|$=q= $12n-1$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $P_n[C_3]$ adalah

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ ganjil; \ j = \ 1 \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ ganjil; \ j = \ 2 \\ 5, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ ganjil; \ j = \ 3 \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ genap; \ j = \ 1 \\ 4, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ genap; \ j = \ 1 \\ 6, \ 1 \leq i \leq n, \ i \ genap; \ j = \ 3 \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf ($P_n[C_3]$) mempunyai bilangan kromatik χ ($P_n[C_3]$)= 6. □

◇ **Teorema 0.4** *Misal* G = $(amal((P_2\Box C_5)$+ $P_2, v = 1, n))$, *untuk* $n \geq 2$, *memiliki bilangan kromatik*

$$\chi(amal((P_2\Box C_5) + P_2, v = 1, n)) = 6$$

Bukti. Graf $amal((P_2\Box C_5)$+ $P_2, v = 1, n)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik V= $\{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_i, z_i; 1 \leq i \leq 4n\}$ $\cup\{w_i; 1 \leq i \leq 2n\}$dan himpunan sisi E= $\{Ay_{4i-3}, Ay_{4i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i}z_{4i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i}z_{4i-3}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-3}z_{4i-3}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_iy_{4i-2}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_iy_{4i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-1}z_{4i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-1}z_{4i-2}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-2}z_{4i-2}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-2}y_{4i-2}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-1}y_{4i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-1}z_{4i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-1}y_{4i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i}z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-3}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-3}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-3}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-3}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_iw_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_iw_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{3i}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{3i}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{x_{3i}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{3i}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-2}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{z_{4i-2}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-2}w_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{y_{4i-2}w_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$serta $|V|$= p= $11n + 1$ dan $|E|$=q= $35n$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $amal((P_2\Box C_5)$+ $P_2, v = 1, n)$ adalah

$$f(A) = 1$$

$$f(x_i) = 4$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 1, \ i \equiv 3(mod\ 4) \\ 4, \ i \equiv 4(mod\ 4) \\ 5, \ i \equiv 2(mod\ 4) \\ 6, \ i \equiv 1(mod\ 4) \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} 1, \ 1 \leq i \leq n, i\ genap \\ 4, \ 1 \leq i \leq n, i\ ganjil \end{cases}$$

$$f(w_i) = \begin{cases} 2, \ 1 \leq i \leq n, i\ ganjil \\ 3, \ 1 \leq i \leq n, i\ genap \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $amal((P_2\Box C_5)$+ $P_2, v = 1, n)$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(amal((P_2\Box C_5)$+ $P_2, v = 1, n))$= 6 untuk semua n. □

Kesimpulan

Pada penelitian ini difokuskan pada bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada hasil operasi graf lintasan ($path$) dengan graf sikel ($cycle$). Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

$$\chi(P_2 \otimes C_n) = 2$$

$$\chi(shack(P_2 \otimes C_5, n)) = 2$$

$$\chi(P_3 \odot C_n) = 3$$

$$\chi(P_n[C_3]) = 6$$

$$\chi(amal((P_2 \square C_5) + P_2, v = 1, n)) = 6, n \geq 2$$

References

[1] Ardiyansah. R, *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf* , ITS, **2** (No 1) (2013).

[2] Dafik, *Antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Disconnected Graphs*, Universitas Jember, (2013).

[3] Dafik, *Structural Properties and Labeling of Graphs*, University of Ballarat, (2007).

[4] Endrayana. S, *Pelabelan Product Cordial pada Tensor Product Path dan Sikel*, Universitas Diponegoro, (2013).

[5] Joseph A. Gallian, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, University of Minnesota, (1997).

[6] Kaiser. T, *Strong Parity Vertex Coloring of Plane Graphs*, University of Primorska **16** (No 1) (2014), 143158.

[7] Kavitha dan Govindarajan, *A Study on Achromatic Coloring Graphs and its Applications*, Dravidian University, ISSN: 2319-7064, (2013), 105-108.

[8] Lu. H, *Vertex-Coloring Edge-Weighting of Bipartite Graphs with Two Edge Weights*, Xian Jiaotong University, (2013).

[9] Martin Baca, Stanislaf Jendrol, Mirka Miller, and Joseph Ryan, *On Irregular Total Labelings, Discrete Mathematics*, 307:13781388, (2007).

[10] Micha l Karonski, Tomasz Luczak, and Andrew Thomason, *Edge Weights and Vertex Colours*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **91** (2004), 151157.

[11] Ringel, G, *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom: Academic Press Limited, (1994).

[12] Sesa. J, *Penentuan Bilangan Kromatik Fraksional pada Operasi Amalgamasi Graf Lintasan dan Graf Siklus*, Universitas Hasanudin, (2014).

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Hedetniemi%27s_conjecture. [9 Januari 2015]