Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya

Desy Tri Puspasari, Dafik
CGANT-University of Jember
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
e-mail: desytripuspasari@gmail.com, d.dafik@gmail.com

Abstrak

Misal diketahui graf sederhana $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Aplikasi menarik dari suatu graf, salah satunya adalah pewarnaan graf (*graph colouring*). Terdapat tiga macam perwarnaan yaitu pewarnaan titik, sisi, dan wilayah. Dalam makalah ini akan dikaji pewarnaan titik. Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titik-titiknya dari suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf dinyatakan dengan bilangan kromatik. Fokus utama makalah ini adalah menentukan bilangan kromatik pada graf operasi dan skema aplikasi dari pewarnaan graf titik.

Kata Kunci : *Graf khusus, pewarnaan titik, operasi graf, aplikasi pewarnaan titik.*

Pendahuluan

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang.[9] Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.[5][8] Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex* atau *node*), bisa ditulis $V = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut, dan ditulis $E = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$.[6][2][3]

Dalam makalah ini, akan membahas salah satu aplikasi yang berkaitan dengan graf yaitu pewarnaan graf *(graph coloring)*, khususnya pewarnaan pada titik graf G sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama, sehingga akan diperoleh jumlah minimum warna dengan notasi $\varphi(G)$ dan nantinya akan dinyatakan dengan bilangan kromatik dengan notasi $\chi(C_n)$.[1][7][11] Graf yang digunakan dalam penelitian fokus pada beberapa operasi graf khusus, diantaranya yaitu: *Crown Graph* $(G \bigodot H)$ *dan Tensor Product Graph* $(G \bigotimes H)$.

Pewarnaan graf *(graph coloring)* adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik dengan batas tertentu.[4][10] Pewarnaan titik *(vertex coloring)* adalah memberi warna berbeda pada titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimal $\varphi(G)$ yang dapat digunakan untuk mewarnai titik-titik dalam suatu graph G disebut bilangan khromatik G.[7][11]

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menentukan pewarnaan titik adalah dengan menggunakan *Greedy Algorithm*.

- START
- Pilih titik tertentu (lebih baik pilih titik awal sesuai dengan notasi dari titik sebuah graf)
- Warnai titik tertentu tersebut dengan warna 1 dan dilanjutkan ke titik-titik lainnya sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.
- Warnai sisa titik-titik lainnya dengan warna 2 sedemikian hingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama.
- Lanjutkan dengan teknik yang sama dengan warna lebih besar satu tingkat di atasnya sampai semua titik terwarnai dan warnanya adalah mencapai γ dimana γ adalah warna terbesar yang minimal. Maka γ sebagai bilangan kromatik pewarnaan titik.
- STOP

Selanjutnya untuk mengetahui apakah bilangan kromatik yang didapat merupakan bilangan yang kecil maka di sesuaikan dengan menggunakan *Teorema Vizing*.

Theorem 1 (Vizing 1964). *Jika G adalah graph sederhana, maka bilangan kromatik pewarnaan titiknya $\chi(G)$ berada pada interval ini $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$*

Hasil Penelitian

Berikut ini akan disajikan teorema yang telah ditemukan terkait dengan operasi graf yaitu $G = C_n \odot C_m$ dan $G = C_n \bigotimes C_m$ beserta pembuktiannya.

Theorem 2 *Misal* $G = C_n \odot C_m$, *untuk* $n, m \geq 3$, *nilai kromatik dari graf* $G = C_n \odot C_m$ *adalah* $\chi(C_n \odot C_m) = 4$.

Bukti. Graf $G = C_n \odot C_m$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\}$ dengan order $|V| = n(1+m)$ dan size $|E| = n(1+2m)$.

Fungsi titik $C_n \bigodot C_m$ untuk n ganjil; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{genap} \\ 3, v = x_i; & i = \text{n} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j \text{ genap} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{n} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{n} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigodot C_m) = 4$, untuk n ganjil dan m ganjil.

Fungsi titik $C_n \bigodot C_m$ untuk n ganjil; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{genap} \\ 3, v = x_i; & i = \text{n} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j \text{ genap} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigodot C_m) = 3$, untuk n ganjil dan m genap.

Fungsi titik $C_n \bigodot C_m$ untuk n genap; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j \text{ genap} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigodot C_m) = 3$, untuk n genap dan m ganjil.

Fungsi titik $C_n \bigodot C_m$ untuk n genap; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j \text{ genap} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{m} \\ 4, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{m} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigodot C_m) = 4$, untuk n genap dan m ganjil.

Dari pembuktian di atas terbukti bahwa nilai maksimal bilangan kromatik dari $G = C_n \odot C_m$ adalah $\chi(C_n \odot C_m) = 4$.

Theorem 3 *Misal $G = C_n \bigotimes C_m$, untuk $n, m \geq 3$, nilai kromatik dari graf $G = C_n \bigotimes C_m$ adalah $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$.*

Bukti. Graf $G = C_n \bigotimes C_m$ memiliki himpunan titik $V = \{x_i, x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$
$\cup \{x_{ij} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$ dengan order $|V| = n + m$ dan size $|E| = n + 2m$.

Fungsi titik $C_n \bigotimes C_m$ untuk n ganjil; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{m} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{m} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{m} \\ 3, v = x_i; & i = \text{n} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{genap} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$, untuk n ganjil dan m ganjil.

Fungsi titik $C_n \bigotimes C_m$ untuk n ganjil; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{genap} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{n}, j = \text{genap} \\ 3, v = x_i; & i = \text{n} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$, untuk n ganjil dan m genap.

Fungsi titik $C_n \bigotimes C_m$ untuk n genap; m ganjil

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{genap} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{genap} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{m} \\ 3, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{m} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$, untuk n genap dan m ganjil.

Fungsi titik $C_n \bigotimes C_m$ untuk n genap; m genap

$$f(v) = \begin{cases} 1, v = x_i; & i = \text{ganjil} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j = \text{genap} \\ 1, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{ganjil} \\ 2, v = x_i; & i = \text{genap} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{ganjil}, j \text{ ganjil} \\ 2, v = x_{i,j}; & i = \text{genap}, j = \text{genap} \end{cases}$$

jadi diperoleh bilangan kromatiknya yaitu $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 2$, untuk n genap dan m genap.

Dari pembuktian di atas terbukti bahwa nilai maksimal bilangan kromatik dari $G = C_n \bigotimes C_m$ adalah $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$.

Skema Aplikasi Pewarnaan Titik

Teori graf dapat diterapkan di berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya aplikasi pewarnaan graf dalam pengaturan warna lampu lalu lintas di perempatan jalan sehingga mencegah terjadinya tabrakan di perempatan jalan tersebut.[4]

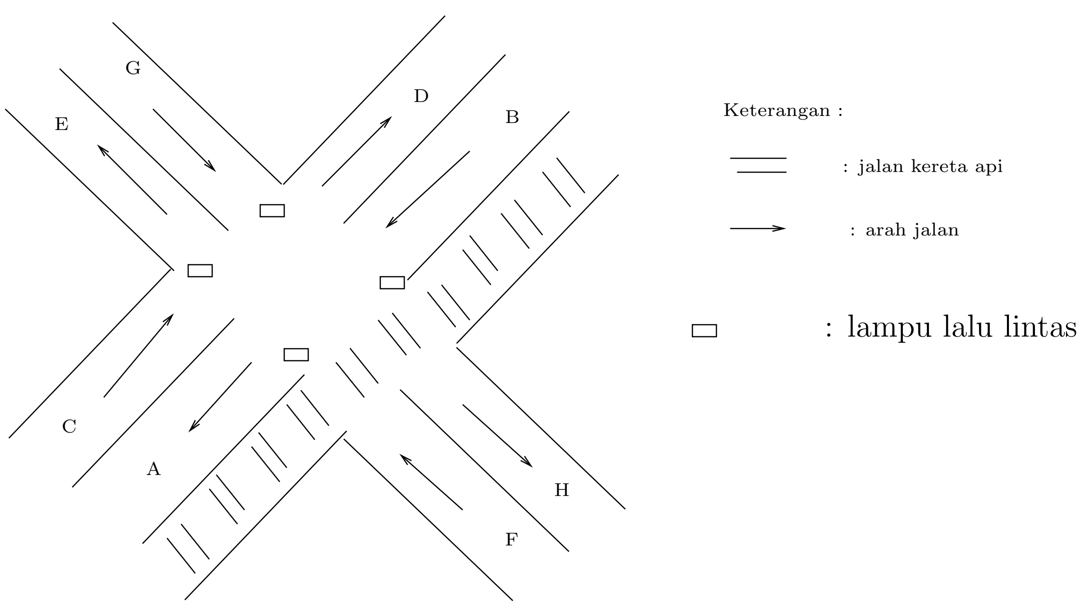

Figure 1: Skema Perempatan Jalan

Seperti gambar yang ditunjukkan di atas, sebuah perempatan jalan yang mempunyai 4 buah lampu lalu lintas. Lampu lalu lintas pada jalan C dan B menyala secara bersamaan, begitu juga dengan lampu lalu lintas pada jalan F dan G menyala bersamaan. Apabila lampu lalu lintas pada jalan C dan B menyala hijau, maka jalur yang boleh digunakan adalah dari C ke D dan B ke A. Selain itu jalur langsung belok kiri diperbolehkan. Hal yang sama juga terkait dengan lampu lalu lintas pada jalan F dan G.Dalam penelitian ini, kita harus menentukan jalur mana yang bisa berjalan dengan memberi lampu hijau di tempat tertentu dan memberi lampu merah pada jalan lain untuk berhenti agar tidak terjadi tabrakan.

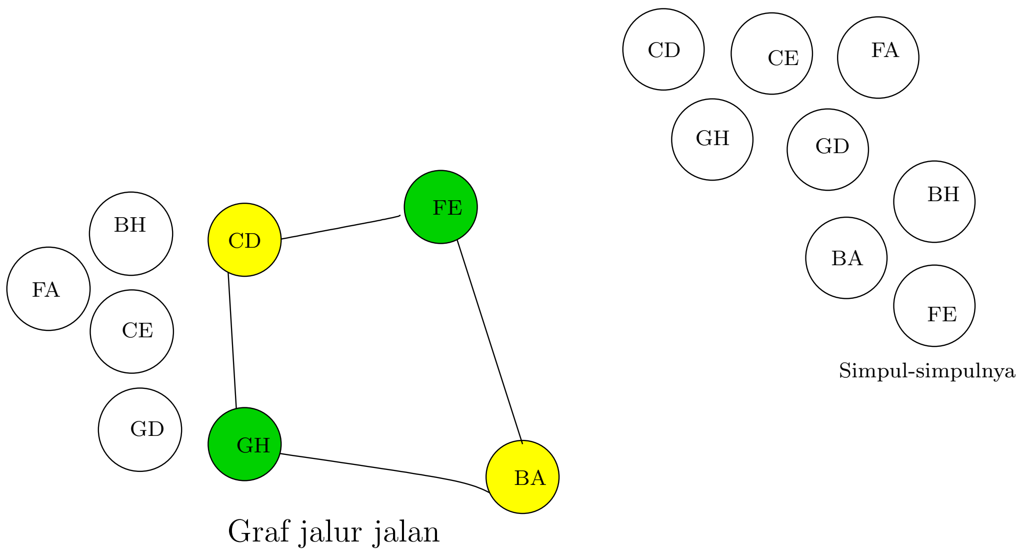

Figure 2: Skema Perempatan Jalan

Untuk menyelesaikan permasalahan dalam pengaturan lampu lintas tersebut, dapat menggunakan konsep pewarnaan titik pada teori graf. Diketahui bahwa jalur yang bisa digunakan untuk melintas adalah dari C ke D, B ke A, F ke E, H ke G, G ke D, C ke E, F ke A, dan B ke H. Setelah mengetahui jalur mana saja yang bisa dilewati, berikut langkah-langkah untuk mengatur pewarnaan lampu lalu lintas menggunakan konsep pewarnaan titik yaitu, menentukan titik atau simpul-simpul sebagai tanda jalan yang bisa dilewati, menghubungkan simpul-simpul tersebut dengan sebuah garis sebagai tanda jalan yang dilewati tidak saling bertabrakan, memberi warna pada simpul-simpul tersebut dengan aturan warna yang digunakan harus sedikit mungkin, warna yang bertetanggan tidak boleh memiliki warna yang sama, sedangkan yang tidak saling terhubung boleh diwarnai dengan warna yang sama. Langkah untuk menentukan simpul-

simpul sebagai jalur yang bisa dilewati dan representasi grafnya dapat dilihat pada *Figure 2*.

Dari hasil pengelompokan di atas, di dapat 2 kondisi yang berbeda pada pewarnaan lampu lintas di perempatan jalan. Kondisi pertama didapat bahwa saat lampu lalu lintas pada jalan BE dan FA berwarna merah, maka lampu lalu lintas pada jalur FE, GH, FA, GD, CE, dan BH bewarna hijau atau dapat berjalan. Dan pada saat lampu lalu lintas pada jalur GH dan FE berwarna merah, maka lampu lalu lintas pada jalur CD, BA, FA, GD, CE, dan BH akan berwarna hijau dan dapat berjalan secara bergantian. Dengan menerapkan hasil penelitian di atas, maka lampu lalu lintas kendaraan pada perempatan jalan tersebut tidak akan bertabrakan.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Bilangan khromatik pewarnaan titik pada operasi graf khusus untuk $C_n \bigodot C_m$ adalah $\chi(C_n \bigodot C_m) = 4$.
- bilangan kromatik pada operasi graf khusus $C_n \bigotimes C_m$ adalah $\chi(C_n \bigotimes C_m) = 3$.
- Pewarnaan titik dapat digunakan dalam pengaturan lampu lalu lintas di persimpangan apapun. Dengan menentukan jalur yang bisa dilalui dengan mencari simpul-simpulnya dan menghubungkan dengan sisi, dengan syarat antara titik atau jalur yang bertabrakan dibedakan dengan sisi. Selanjutnya dilakukan pewarnaan titik dengan merepresentasikan graf jalan tersebut. Sehingga ditemukan untuk kondisi pengaturan lampu lalu lintas, dengan lampu lalu lintas berwarna merah untuk berhenti dan lampu lalu lintas berwarna hijau untuk berjalan sehingga ada pergantian lalu lintas agar tidak terjadi tabrakan.

References

[1] Ardiyansah. R, *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf* , ITS. vol 2(1), 2013

[2] Dafik, *Antimagic Labeling of the Union of Stars*, Australian Journal of Combinatorics 42, 35-44, 2008.

[3] Dafik, *Structural Properties and Labeling of Graphs*, University of Ballarat, 2007.

[4] Endrayana. S, *Pelabelan Product Cordial pada Tensor Product Path dan Sikel*, Universitas Diponegoro, 2013.

[5] Joseph A. Gallian, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, University of Minnesota, 1997.

[6] Kaiser. T, *Strong Parity Vertex Coloring of Plane Graphs*, University of Primorska. vol 16(1). 143158, 2014.

[7] Kavitha dan Govindarajan, *A Study on Achromatic Coloring Graphs and its Applications*, Dravidian University. ISSN: 2319-7064. 105-108, 2013.

[8] Lu. H, *Vertex-Coloring Edge-Weighting of Bipartite Graphs with Two Edge Weights*, Xian Jiaotong University, 2013.

[9] Martin Baca, Stanislaf Jendrol, Mirka Miller, and Joseph Ryan, *On Irregular Total Labelings, Discrete Mathematics*, 307:13781388, 2007.

[10] Micha l Karonski, Tomasz Luczak, and Andrew Thomason, *Edge Weights and Vertex Colours*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 91:151157, 2004.

[11] Sesa. J, *Penentuan Bilangan Kromatik Fraksional pada Operasi Amalgamasi Graf Lintasan dan Graf Siklus*, Universitas Hasanudin. 2014