Analisa Himpunan Dominasi pada Graf-Graf Khusus

Ridho Alfarisi, Dafik, Arif Fatahillah
CGANT- University of Jember
Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
alfarisi38, d.dafik, fatahillah767@gmail.com

Abstract

The advance of science and technology increases proportionally to the development of era. Today era tends to the raise to the advance of ICT. One research interest which supports the ICT development is a graph theory. A dominating set theory is one of a graph theory which has a wide range of applications mainly in communication network and space syntax theory. A set D of vertices of a simple graph G, that is a graph without loops and multiple edges, is called a dominating set if every vertex $u \in V(G) - D$ is adjacent to some vertex $v \in D$. The domination number of a graph G, denoted by $\gamma_k G$; $k \in \{1, 2\}$, is the order of a smallest dominating set of G. This research aims to find the domination number of some families of special graphs, disc brake graph $Db_{n,m}$, lampion graph $\pounds_{n,m}$, prism graph $D_{n,m}$, and staked ladder graph $Dt_{n,m}$.

Key Words : *Dominating set, dominating number, special graph.*

Pendahuluan

Pada zaman modern, kajian mengenai penerapan teori graf terus berkembang lebih kiatannya dengan perkembangan IPTEK terutama dalam analisis morfologi jalan. Morfologi jalan sangat erat kaitannya dengan mobilitas masyarakat sehingga perlu ada kajian yang mendalam. Dengan landasan itu bidang di teori graf yang akan mengkaji morfologi jalan adalah teori *dominating set.* Salah satu penerapan teori *dominating set* dalam morfologi jalan adalah penempatan pos jaga dan pengantaran bus anak sekolah. Fokus penelitian ini pada graf tak berarah (lihat [1],[2],[10]). Definisi *dominating set* menurut Haynes [3] diberikan sebuah graf tidak berarah $G = (V, E)$, dominating set merupakan subset $S \subseteq V$ dari titik di G sedemikian sehingga untuk semua titik $v \in V$, salah satu dari $v \in S$ atau sebuah tetangga u dari v ada di S. *Dominating number* dinotasikan $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimum dari sebuah *dominating set* yang merupakan pengembangan dari peneltian-penelitian sebelumnya. Nilai dari *Dominating number* selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$.(lihat [4],[5],[6],[7],[8],[9])

Teorema Batas Atas dan Batas Bawah

Beberapa teorema mengenai batas atas dan batas bawah dari dominating set yang akan digunakan dalam penelitian sebagai berikut.

Theorem 1 *[3] Untuk sebarang graf G,*

$$\lceil \frac{p}{1+\triangle(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \triangle(G)$$

Bukti. Misalkan S adalah sebua $\gamma - set$ dari G. Pertama, kita andaikan batas bawah. Setiap titik dapat sebagai dominating set dan $\Delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan degree maksimum $\Delta(G)$. Maka v sebagai dominating set $N[v]$ dan titik di $V - N[v]$ merupakan dominating set mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ meruapakan dominating set dengan kardinalitas $n - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$. □

Hasil dan Pembahasan

Di bagian ini akan di bahas mengenai pengembangan dominating number pada graf khusus meliputi graf cakram $Db_{m,n}$, graf lampion $£_{n,m}$, graf prisma $D_{n,m}$, graf tingkat tangga prisma $Dt_{n,m}$. Fokus penelitian dominating set yang berjarak satu dinotasikan $\gamma(G)$.

◇ **Teorema 0.1** *Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dominating number berjarak satu dari graf rem cakram $Db_{m,n}$ adalah $\gamma(Db_{m,n}) = \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$.*

Bukti. Graf rem cakram adalah graf dengan $V(Db_{m,n}) = \{x_{j,i}; 1 \leq i \leq n\ , 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{l,k}; 1 \leq k \leq 2n\ , 1 \leq l \leq m-1\}$ dan $E(Db_{m,n}) = \{x_{j,i}x_{j,i+1}; 1 \leq i \leq n\ , 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{j,n}x_{j,1}\} \cup \{y_{l,k}y_{l,k+1}; k\ ganjil; 1 \leq l \leq m-1\} \cup \{x_{j,i}y_{j,2i-2}; 2 \leq i \leq n\ , 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,1}y_{j,2n}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,i}y_{j,2i-1}; 2 \leq i \leq n 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,1}y_{j,1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,i}y_{j,2i-2}; 2 \leq i \leq n\ , 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,1}y_{j-1,2n}; 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,i}y_{j,2i-1}; 2 \leq i \leq n 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,1}y_{j-1,1}; 2 \leq j \leq m-1\}$, serta $p = |V| = 3nm - 2n$ dan $q = |E| = 6nm - 5n$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\triangle Db_{m,n}} \rceil \leq \gamma(Db_{m,n}) \leq p - \triangle Db_{m,n}$ sehingga batas atas dari graf $Db_{n,m}$ adalah $\lceil \frac{3nm-2n}{1+\triangle Db_{m,n}} \rceil \leq \gamma(Db_{m,n}) \leq 3nm - 2n - \triangle Db_{m,n}$. Untuk graf $Db_{m,n}$ memiliki $\triangle Db_{m,n} = 4$, maka $\lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil \leq \gamma(Db_{m,n}) \leq 3nm - 2n - 4$. Namun demikian terbukti bahwa $\gamma(Db_{m,n}) \leq \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$. Pilih titik-titik sebagai *dominating set* $S = \{x_{j,2k-1}$, jika j ganjil dan $1 \leq k \leq n$, n genap$\} \cup \{x_{j,2k}$, jika j genap dan $1 \leq l \leq n$, n genap$\} \cup \{x_{2,2}$, n ganjil$\} \cup \{x_{j,3k-2}$, jika j ganjil dan $1 \leq k \leq n$, n ganjil$\} \cup \{x_{j,2k+1}$, jika j genap, $1 \leq k \leq n$, n ganjil$\}$. Kardinalitas dari himpunan dominasi titik adalah $\lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$ maka $\gamma(Db_{m,n}) \leq \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$. Jadi, $\gamma(Db_{m,n}) = \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. □

◇ **Teorema 0.2** *Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, dominating number berjarak satu dari graf lampion $£_{n,m}$ adalah $\gamma(£_{n,m}) = n + 1$.*

Bukti. Graf lampion adalah graf dengan $V(£_{n,m}) = \{x_i, x_{i,1,j}, x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(£_{n,m}) = \{x_i x_{i,1,j}, ; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,2,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,1} x_{i,2,1}; 1 \leq i \leq n+1\}$, serta $p = |V| = 2nm + n + 1$ dan $q = |E| = 4mn + n - 1$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\triangle £_{n,m}} \rceil \leq \gamma(£_{n,m}) \leq p - \triangle £_{n,m}$ sehingga batas atas dari graf $£_{n,m}$ adalah $\lceil \frac{2nm+n+1}{1+\triangle £_{n,m}} \rceil \leq \gamma(£_{n,m}) \leq 2nm + n + 1 - \triangle £_{n,m}$. Untuk graf $£_{n,m}$ memiliki $\triangle £_{n,m} = 2m$, maka $\lceil \frac{2nm+n+1}{1+2m} \rceil \leq \gamma(£_{n,m}) \leq 2nm + n - 2m + 1$. Namun demikian terbukti bahwa $\gamma(£_{n,m}) \leq \lceil \frac{2nm+n+1}{1+2m} \rceil \leq n+1$. Pilih titik-titik sebagai *dominating set* $S = \{x_i, \text{dimana} 1 \leq i \leq n+1\}$ sehingga kardinalitas dari himpunan dominasi adalah $\gamma(£_{n,m}) = |S| = n + 1$. Maka $\gamma(£_{n,m}) \leq \lceil \frac{2nm+n+1}{1+2m} \rceil \leq n + 1$. Jadi, $\gamma(£_{n,m}) = n + 1$. □

◇ **Teorema 0.3** *Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dominating number berjarak satu dari graf prisma $D_{n,m}$ adalah $\gamma(D_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$.*

Bukti. Graf prisma adalah graf dengan $V(D_{n,m}) = \{x_{j,i}; 1 \leq i \leq n dan 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(D_{n,m}) = \{x_{j,i} x_{j,i+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{j,i} x_{j+1,i}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{j,n} x_{j,1}; 1 \leq j \leq m\}$, serta $p = |V| = nm$ dan $q = |E| = 2mn - n$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\triangle D_{n,m}} \rceil \leq \gamma(D_{n,m}) \leq p - \triangle D_{n,m}$ sehingga batas atas dari graf $D_{n,m}$ adalah $\lceil \frac{nm}{1+\triangle D_{n,m}} \rceil \leq \gamma(D_{n,m}) \leq nm - \triangle D_{n,m}$. Untuk graf $D_{n,m}$ memiliki $\triangle D_{n,m} = 3$, maka $\lceil \frac{nm}{4} \rceil \leq \gamma(D_{n,m}) \leq nm - 3$. Namun demikian terbukti bahwa $\chi_1(D_{n,m}) \leq \lceil \frac{nm}{4} \rceil$. Pilih titik-titik sebagai *dominating set* $S = \{x_{2l-1,4k-3}$, jika $1 \leq l \leq m$ dan $1 \leq k \leq n\} \cup \{x_{2l,4k-1}$, jika $1 \leq l \leq m$ dan $1 \leq k \leq n\} \cup \{x_{j,3k-2}$ jika j ganjil $1 \leq k \leq n$ n ganjil$\} \cup \{x_{j,3k}$ jika j genap $1 \leq k \leq n$ n ganjil$\}$ sehingga kardinalitas dari himpunan dominasi adalah $\lceil \frac{nm}{4} \rceil$. Maka $\gamma(D_{n,m}) \leq \lceil \frac{nm}{4} \rceil$. Jadi, $\gamma(D_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. □

◇ **Teorema 0.4** *Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, dominating number berjarak satu dari graf tingkat tangga prisma $Dt_{n,m}$ adalah*

$$\gamma(Dt_{n,m}) = \begin{cases} n, & \text{jika } m = 2 \\ & \text{and } n \geq 3 \\ n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, & \text{jika } n \geq 3 \\ & \textit{dan } m \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf tingkat tangga permata adalah graf dengan $V(G) = \{x_i^j; 1 \leq i \leq ndan1 \leq j \leq m+1\} \cup \{y_i^j; 1 \leq i \leq 2ndan1 \leq j \leq m-1\}$ dan $E(G) = \{x_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j x_i^{j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i^j y_{2i-1}^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i^j y_{2i}^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_i^j x_i^{j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{2i}^j x_i^{j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{2i}^j y_{2i+1}^j; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1\}$, serta $p = |V| = n(3m+1)$ dan $q = |E| = 7nm - 2m + n - 1$. Berdasarkan Teorema 1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\triangle Dt_{n,m}} \rceil \leq \gamma(Dt_{n,m}) \leq p - \triangle Dt_{n,m}$ sehingga batas atas dari graf $Dt_{n,m}$ adalah $\lceil \frac{n(3m+1)}{1+\triangle Dt_{n,m}} \rceil \leq \gamma(Dt_{n,m}) \leq n(3m+1) - \triangle D_{n,m}$. Untuk $m = 2$ maka graf $Dt_{n,2}$ memiliki $\triangle Dt_{n,m} = 5$, maka $\lceil \frac{4n}{6} \rceil \leq \gamma(Dt_{n,m}) \leq n(3m+1) - 5$. Namun demikian terbukti bahwa $\gamma(Dt_{n,m}) \leq \lceil \frac{4n}{6} \rceil$. Pilih titik-titik sebagai *dominating set* $S = \{x_i, \text{dimana} 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $\gamma(Dt_{n,m}) = |S| = n$. Jelas bahwa $\gamma(Dt_{n,m}) \leq \lceil \frac{4n}{6} \rceil \leq n$. Jadi, $\gamma(Dt_{n,m}) = n$ untuk $n \geq 3$ dan $m = 2$ Untuk $m \geq 3$ maka graf $Dt_{n,m}$ memiliki $\triangle Dt_{n,m} = 8$, maka $\lceil \frac{n(3m+1)}{9} \rceil \leq \gamma(Dt_{n,m}) \leq n(3m+1) - 8$. Namun demikian terbukti bahwa $\gamma(Dt_{n,m}) \leq \lceil \frac{n(3m+1)}{9} \rceil$. Pilih titik-titik sebagai *dominating set* $S = \{x_i^{2j}, \text{dimana} 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ sehingga kardinalitas dari himpunan dominasi adalah $\gamma(Dt_{n,m}) = |S| = n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Maka $\gamma(Dt_{n,m}) \leq \lceil \frac{n(3m+1}{9} \rceil \leq n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Jadi, $\gamma(Dt_{n,m}) = n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 3$. □

Kesimpulan

Di bagian ini dominating set yang menjadi fokus penelitian adalah dominating set berjarak satu $\gamma(G)$ pada sebarang graf khusus dengan batas bawah dan atas yang signifikan $\lceil \frac{p}{1+\triangle(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \triangle(G)$. Sehingga dapat disimpulkan hasil penelitian diatas mengenai penegembangan teori *dominating set* pada sebarang graf khusus.

- Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dominating number berjarak satu dari graf rem cakram $Db_{n,m}$ adalah $\gamma(Db_{m,n}) = \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$.
- Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, dominating number berjarak satu dari graf lampion $\pounds_{n,m}$ adalah $\gamma(\pounds_{n,m}) = n + 1$.
- Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dominating number berjarak satu dari graf prisma $D_{n,m}$ adalah $\gamma(D_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$.
- Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, dominating number berjarak satu dari graf

tingkat tangga prisma $Dt_{n,m}$ adalah

$$\gamma(Dt_{n,m}) = \begin{cases} n, & \text{jika } m = 2 \\ & \text{and } n \geq 3 \\ n\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, & \text{jika } n \geq 3 \\ & \text{dan } m \geq 3 \end{cases}$$

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Drs. Slamin, M.Comps.Sc., Ph.D yang telah memberika masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic Graph Theory*, Chapman and Hall, (2008).

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory*, GTM 244, Springer, (2008).

[3] T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Fundamental of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc., New York, (1998).

[4] D. Eppstein, *The Travelling Salesmean Problem For Cubic Graph*, *In Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS)*, (2003), 364-372.

[5] M. Yannakakis and F. Gavril, *Edge Dominating Sets in Graphs*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol 338, No.3 (Jun 1980), pp.364-372.

[6] Henning, M. A. Trees with Large Total Domination Number. *Util. Math.* 60 (2001) 99-106.

[7] Henning, M. A and Yeo, A. Total Domination in Graphs with Given Girth. *Graphs Combin.* 24 (2008) 333-348.

[8] M.A. Henning and A. Yeo, *Girth and Total Dominating in Graphs Graphs Combin.* 28 (2012), 199-214.

[9] J.M. Tarr, *Domination in Graphs*, Graduate Theses and Dissertations, (2010).

[10] Dafik, M. Mirka, J. Ryan, and M. Baca, *On Super (a,d)-Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs*, *Discrete Mathematics*, North Holland, (2009), 4909-4915.