Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs

Randhi N. Darmawan[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT- University of Jember
[2]Department of Mathematics FMIPA University of Jember
rnd.math25@gmail.com
[3]Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
d.dafik@gmail.com

Abstract

An edge-colouring of a graph G is rainbow connected if, for any two vertices of G, there are k internally vertex-disjoint paths joining them, each of which is rainbow and then a minimal numbers of color G is required to make rainbow connected. The rainbow connection numbers of a connected graph G, denoted $rc(G)$. In this paper we will discuss the rainbow connection number $rc(G)$ for some special graphs and its operations, namely prism graph $P_{m,n}$, antiprism graph AP_n, tensor product of $C_3 \bigotimes L_n$, joint graph $\bar{K}_3+C_n$.

Key Words *: edge-colouring, rainbow connection, graph operation.*

Pendahuluan

Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand, Johns, McKeon and Zhang [5]. Konsep ini termotifasi dari informasi dan komunikasi antara suatu agen pemerintah. Departemen Homeland Amerika Serikat yang dibentuk 2003 sebagai respon atas ditemukannya kelemahan transfer informasi setelah serangan teroris 11 September 2001. Suatu informasi membutuhkan perlindungan dikarenakan terhubung langsung ke security negara, sehingga diharuskan juga terdapat prosedur yang memberikan ijin untuk mengakses antara agen-agen pemerintahan. Setiap jalur transfer informasi diperlukan suatu *password* dan $firewall$ angka yang cukup besar untuk melindungi informasi dari serangan pengganggu. Sehinggu muncul pertanyaan, berapa angka minimal *passowrd* dan $firewall$ yang dibutuhkan setiap dua orang agen saat melakukan jalur transfer informasi, disamping itu juga tidak terjadi pengulangan *password* dari masing-masing agen. Lebih detail lihat [2].

Situasi tersebut dapat dimodelkan dengan teori graf. Misalkan G adalah graf terhubung *nontrivial* dengan $edge-coloring\ c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ lihat [1],[7],[8], dimana sisi-sisi yang bertetangga mungkin mempunyai warna yang sama. Suatu jalur disebut *rainbow* jika tidak terdapat dua sisi pada G yang diwarnai sama. Sebuah $edge - coloring$ graf G adalah *rainbow connected* jika sebarang dua titik yang terhubung dihubungkan oleh jalur *rainbow*. Jelas bahwa jika graf G adalah *rainbow connected* maka pasti terhubung. Sehingga *rainbow connection number* dari graf terhubung G, dinotasikan $rc(G)$, sebagai perwanaan minimum yang dibutuhkan untuk membuat graf G *rainbow connected*. Lebih detail lihat [3],[4].

Penelitian terkait rainbow connection berkembang cukup pesat, lihat [9], [10],[11],[12]. Pada artikel ini akan dipelajari tentang *rainbow connection number* pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantara lain graf prisma $P_{n,m}$, graf antiprisma AP_n, graf joint product $\bar{K}_3+C_n$, dan graf tensor product $C_3 \otimes L_n$. Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan Syafrizal [6] menghasilkan teorema berikut.

Theorem 1 *[6] Untuk setiap bilanagn bulat n, rainbow connection number dari graf G adalah $rc(G) = 4$ dimana $G \cong G_n$ dengan $n \geq 4$, atau $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$.*

Bukti. Kita perhatikan kedua kondisi.
Kondisi 1. Untuk $G \cong G_n$ dengan $n \geq 4$. Misalkan W_n adalah graf yang terdiri atas cycle C_n dengan sebuah titik tambahan yang adjacent ke seluruh titik pada C_n. Sebuah gear graph G_n adalah wheel graph dengan sebuah titik tambahan diantara setiap pasangan titik yang adjacent pada titik cycle C_n terluar, sehingga G_n memiliki $|V| = 2n + 1$ dan $|E| = 3n$. Maka jelas G_n memiliki diameter $k(G_n) = 4$, sehingga $rc(G) \geq k(G_n) = 4$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \leq 4$. Berdasarkan $V(G_n) = V(C_{2n}) \cup \{v\}$ dimana $V(C_{2n} = \{v_1, v_2, ...v_3\}$ adalah himpunan titik di C_{2n}. Kemudian akan didefinisikan pewarnaan sisi pada G_n dengan $c : E(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ sesuai fungsi berikut:

$$c(e) = \begin{cases} 1, e = vv_{4i-3}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 2, e = vv_{4i-1}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 3, e = v_{4i-3}v_{4i-2}; e = v_{4i}v_{4i+1} & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 4, e = v_{4i-2}v_{4i-1}; e = v_{4i-1}v_{4i} & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil. \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pada G_n diatas maka jelas didapatkan $rc(G_n) = 4$ untuk $n \geq 4$.
Kondisi 2. Untuk $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$. dengan jelas bahwa $k(B_n) = 3$. Misalkan $P = p_i, p, q, p_{i+1}$ adalah rainbow path, dengan memepertimbangkan B_n terdiri atas dua buah graf bintang S_n^1 dan S_n^2 dengan titik pusat p dan q, serta p_i dan q_i adalah daun dengan masing-masing $1 \leq i \leq n$, dan setiap titik p_i adjacent ke q_i. Maka $rc(B_n) \geq 4$ untuk $n \geq 3$. Kemudian akan didefinisikan pewarnaan sisi pada B_n dengan $c : E(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ sesuai fungsi berikut:

$$c(e) = \begin{cases} 1, e = pq, & \\ 2, e = pp_i; & \text{dengan}\, 1 \le i \le n, \\ 3, e = qq_i; & \text{dengan}\, 1 \le i \le n, \\ 4, e = p_iq_i; & \text{dengan}\, 1 \le i \le n, \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pada B_n diatas maka jelas didapatkan $rc(B_n) = 4$ untuk $n \ge 3$. □

Teorema yang Digunakan

Beberapa teorema terkait batas atas dan bawah dari rainbow connection.

Theorem 2 *[3]Andaikan G adalah graf terhubung dengan order $n \ge 3$ dan mempunyai degree sekurang-kurangnya $d(G) = 2$. Jika $G \in \{K_3, C_4, K_4 - e, C_5\}$, maka $rc(G) \le n - 3$.*

Theorem 3 *[3]Andaikan G adalah graf terhubung dengan $d(G) \ge 2$. Maka:*
(i) jika G adalah interval graph, maka $k(G) \le rc(G) \le k(G) + 1$, sedangkan yang lainnya jika G unit interval graph, maka $k(G) = rc(G)$
(ii) jika G adalah AT-free, maka $k(G) \le rc(G) \le k(G) + 3$
(iii) jika G adalah sebuah threshold graph, maka $k(G) \le rc(G) \le 3$
(iv) jika G adalah chain graph, maka $k(G) \le rc(G) \le 4$
(v) jika G adalah sebuah sircular arc graph, maka $k(G) \le rc(G) \le k(G) + 4$

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait rainbow connection untuk beberapa graf khusus dan operasinya, seperti graf prisma $P_{n,m}$, graf antiprisma AP_n, graf join $\bar{K}_3 + C_n$, dan graf tensor product of $C_3 \bigotimes L_m$.

◇ **Teorema 1** *Untuk $n \ge 3$ dan $m \ge 1$, rainbow connection number dari graf prisma $P_{n,m}$ adalah*

$$rc(P_{n,m}) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1); & \text{untuk}\, n \ge 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf prisma adalah graf yang memiliki $V(P_{n,m}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(P_{n,m}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V|{=}m.n$ dan $q = |E|{=}2m.n - n$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(P_{n,m}) \leq rc(P_{n,m}) \leq k(P_{n,m})+1$. Untuk $n = 3$ graf prisma $P_{n,m}$ memiliki batas atas dan bawah $m \leq rc(P_{3,m}) \leq m+1$, namun dengan demikian terbukti bahwa $rc(P_{3,m}) \geq m$. Warnai $P_{3,m}$ dengan fungsi $f(e) = j$, untuk $e = x_{i,j}x_{i+1,j}$ dengan $1 \leq i \leq 2$ dan $1 \leq j \leq m$, $e = x_{3,j}x_{1,j}$ dengan $1 \leq j \leq m$, $e = x_{i,j}x_{i,j+1}$ dengan $1 \leq i \leq 3$ dan $1 \leq j \leq m$, jelas bahwa $f : E(P_{3,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., m\}$ karena $rc(P_{3,m}) \geq m$ maka $rc(P_{3,m}) = m$.

Untuk $n \geq 4$, graf prisma $P_{n,m}$ memiliki diameter $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$ maka $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1) \leq rc(P_{n,m}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + m$, kemudian akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i+j-1, e = x_{i,j}x_{i+1,j}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq j \leq m \\ i+j-1, e = x_{i,j}x_{i+1,j}; & \text{dengan}\, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ j, e = x_{i,j}x_{i,j+1}; & \text{dengan}\, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + j - 1, e = x_{n,j}x_{1,j}; & \text{dengan}\, 1 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi *edge* tersebut, warna sisi terbesar muncul pada $f(e) = i + j - 1, e = x_{i,j}x_{i+1,j}; \text{dengan}\, 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq j \leq m$. Jika diambil nilai n dan m terbesar maka warna sisi terbesar dari $P_{n,m}$ adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$. Jelas bahwa $f : E(P_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)\}$ karena $rc(P_{n,m}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$. Maka, $rc(P_{n,m}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$. □

◇ **Teorema 2** *Untuk $n \geq 3$, rainbow connection number dari graf antiprisma AP_n adalah*

$$rc(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf antiprisma AP_n adalah graf yang memiliki $V(AP_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(AP_n) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ny_1\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1y_n\}$, $p = |V|{=}2n$ dan $q = |E|{=}4n$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(AP_n) \leq rc(AP_n) \leq k(AP_n) + 1$.

Untuk $n = 3$ graf AP_3 mempunyai diameter 2 maka $2 \leq rc(AP_3) \leq 3$, namun demikian terbukti bahwa $rc(AP_3) \geq 2$. Warnai AP_3 dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & e = x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq 2, e = x_3x_1, e = y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq 2, e = y_3y_1 \\ 2, & e = x_iy_i, e = x_{i+1}y_i, e = x_1y_3 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(AP_3) \rightarrow \{1,2\}$ karena $rc(AP_3) \leq 2$. Maka, $rc(AP_3) = 2$.
Untuk $n \geq 4$, graf AP_n mempunyai diameter $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ maka $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq rc(AP_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, kemudian akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, e = x_i x_{i+1}, e = x_i y_i; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i - \lceil \frac{n}{2} \rceil, e = x_i x_{i+1}, e = x_i y_i; & \text{dengan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1 \\ i, e = y_i y_{i+1}, e = x_{i+1} y_i; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i - \lceil \frac{n}{2} \rceil, e = y_i y_{i+1} e = x_{i+1} y_i; & \text{dengan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1 \\ n - \lceil \frac{n}{2} \rceil, e = x_n x_1, e = y_n y_1, e = x_1 y_n \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi *edge* tersebut warna sisi terbesar muncul pada $f(e) = i, e = x_i x_{i+1}, e = x_i y_i$ dengan $1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dan $f(e) = i, e = y_i y_{i+1}, e = x_{i+1} y_i$. Jika diambil nilai n terbesar maka warna sisi terbesar dari AP_n adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jelas bahwa $f : E(AP_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ karena $rc(AP_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ maka $rc(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

◇ **Teorema 3** *Untuk $n \geq 3$, rainbow connection number dari graf join $\bar{K}_3 + C_n$ adalah*

$$rc(\bar{K}_3 C_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk } n = 3 \\ 3; & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf join $\bar{K}_3 + C_n$ adalah graf yang memiliki $V(\bar{K}_3 + C_n) = \{x_i, Y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(\bar{K}_3 + C_n) = \{x_1 y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_2 y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_3 y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_1 y_n\}$, $p = |V| = n + 3$ dan $q = |E| = 4n$. Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(\bar{K}_3 + C_n) \leq rc(\bar{K}_3 + C_n) \leq k(\bar{K}_3 + C_n) + 1$.
Untuk $n = 3$ graf $\bar{K}_3 + C_3$ memiliki diameter 2 maka $2 \leq rc(\bar{K}_3 + C_3) \leq 3$ namun demikian terbukti bahwa $rc(\bar{K}_3 + C_3) \geq 2$. Warnai $\bar{K}_3 + C_3$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & e = x_2 y_i; i = 1, 3, e = x_3 y_2, e = y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq 2, e = y_3 y_1 \\ 2, & e = x_1 y_i; 1 \leq i \leq 3, e = x_2 y_2, e = x_3 y_i; i = 1, 3 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(\bar{K}_3 + C_3) \rightarrow \{1, 2\}$ karena $rc(\bar{K}_3 + C_3) \leq 2$. Maka, $rc(\bar{K}_3 + C_3) = 2$.
Untuk $n \geq 4$ graf $\bar{K}_3 + C_n$ memiliki diameter 2 maka $2 \leq rc(\bar{K}_3 + C_n) \leq 3$ namun demikian terbukti bahwa $rc(\bar{K}_3 + C_n) \geq 2$, $\bar{K}_3 + C_n$ akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_1 y_i; e = x_2 y_i; e = x_2 y_i; e = y_1 y_n; & \text{dengan } i = ganjil \\ 2, e = x_1 y_i; e = x_2 y_i; e = x_2 y_i; e = y_1 y_n; & \text{dengan } i = genap \\ 3, e = y_i y_{i+1}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi *edge* tersebut warna sisi terbesar muncul pada $f(e) = 3, e = y_i y_{i+1}$ dengan $1 \leq i \leq n$. Jika diambil nilai n terbesar maka warna sisi terbesar dari $\bar{K}_3 + C_3$ adalah 3. Jelas bahwa $f : E(\bar{K}_3 + C_n) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ karena $rc(\bar{K}_3 + C_n) \leq 3$. Maka, $rc(\bar{K}_3 + C_3) = 3$. □

◇ **Teorema 4** *Rainbow connection number untuk graf tensor product* $C_3 \otimes L_n$ *adalah* $n + 2$

Bukti. Graf tensor product $C_3 \otimes L_n$ adalah graf yang memiliki $V(C_3 \otimes L_n) = \{x_{i,j}, y_{i,j}, z_j;$
$1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\}$, $E(C_3 \otimes L_n) = \{x_{1,j}y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{1,j}y_{1,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j+1}x_{2,j}; 1 \leq j \leq n\}$ $\cup$ $\{y_{1,j}y_{2,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{1,j+1}y_{2,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}z_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{1,j}z_j; 1 \leq j \leq n\}$, $p = |V| = 5n + 3$ dan $q = |E| = 9n + 3$.
Berdasarkan Teorema 3 dinyatakan bahwa $k(C_3 \otimes L_n) \leq rc(C_3 \otimes L_n) \leq k(C_3 \otimes L_n) + 1$, diamater dari graf $C_3 \otimes L_n = n + 2$ maka $n + 2 \leq rc(C_3 \otimes L_n) \leq n + 3$ namun demikian terbukti bahwa $rc(C_3 \otimes L_n) \geq n+2$. Graf $C_3 \otimes L_n$ akan diwarnai dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, e = x_{1,j+1}x_{2,j}; e = y_{1,j+1}y_{2,j}; e = x_{1,1}z_1; e = y_{1,1}z_1; 1 \leq j \leq n \\ j, e = x_{1,j}y_{1,j}; 1 \leq j \leq n \\ j + 1, e = x_{1,j}x_{1,j+1}; e = y_{1,j}y_{1,j+1}; e = y_{1,j}y_{2,j}; e = y_{1,j}z_j; e = y_{1,j}z_j; 1 \leq j \leq n \\ j + 2, e = x_{1,j}x_{2,j}; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(C_3 \otimes L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., n + 2\}$ karena $rc(C_3 \otimes L_n) \leq n + 2$, maka $rc(C_3 \otimes L_n) = n + 2$. □

Kesimpulan

Pada bagian ini akan diriview kembali rainbow connection number $rc(G)$ pada beberapa graf khusus dan operasinya. Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa.
Untuk graf prisma $P_{n,m}$ dengan $n \geq 3$,$m \geq 1$, didapatkan rainbow connection number adalah

$$rc(P_{n,m}) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1); & \text{untuk}\, n \geq 4. \end{cases}$$

Untuk graf antiprisma AP_n dengan $n \geq 3$, didapatkan rainbow connection number adalah

$$rc(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

Untuk graf join $\bar{K}_3 + C_n$ dengan $n \geq 3$, didapatkan rainbow connection number adalah

$$rc(\bar{K}_3 + C_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ 3; & \text{untuk}\, n \geq 4. \end{cases}$$

Untuk graf tensor product $C_3 \otimes L_n$, didapatkan rainbow connection number adalah $rc(C_3 \otimes L_n)$ adalah $n + 2$.

References

[1] Gary Chartrand and Ping Zhang. Chromatic Graph Theory. Chapman and Hall, 2008.

[2] A.B. Ericksen, A matter of security, Graduating Engineer and Computer Careers, (2007), 24-28.

[3] X.Li and Y.Sun, Rainbow connection numbers of complementary graphs, arXiv:1011.4572v3 [math.CO], 2010.

[4] X. Li and Y. Sun, Rainbow connections of graphs - a survey, arXiv:1101.5747v2 [math.CO], 2011.

[5] Gary Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, and P. Zhang, Rainbow connection in graphs, *Math. Bohem.*, 133, No. 2, (2008), 85–98.

[6] Sy, Syafrizal, and Estetikasari, Dewi, On Rainbow Connection for Some Corona Graphs, *Applied Mathematical Sciences.*, Vol. 7, No. 100, (2013), 4975–4979.

[7] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.

[8] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs. University of Ballarat, 2007.

[9] L. Sunil Chandran, Anita Das, D. Rajendraprasad, and N.M. Varma. Rainbow Connection Number and Connected Dominating Sets, arXiv:1010.2296v1, [math.CO], 2010

[10] Ingo Schiermeyer, On Minimally Rainbow k-Connected Graphs, Elsevier B.V. All rights reserved, 2011

[11] Sourav Chakraborty, Eldar Fischer, Arie Matsliah, and Raphael Yuster, Hardness and algorithms for rainbow connection. Journal of Combinatorial Optimization, pages 118, 2009.

[12] M. Basavaraju, L. Sunil Chandran, D. Rajendraprasad, and A. Ramaswamy, Rainbow Connection Number of Graph Power and Graph Products, arXiv:1104.4190v2 [math.CO], 2011