

# KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF RANTAI SEGITIGA (*Reflexive Edge Strenght on Triangular Chain Graph*)

Wulan Indah Saputri<sup>1)</sup>, Diari Indiarti<sup>2)</sup>

<sup>1,2)</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas  
Sebelas Maret, Jl. Ir. Sutami No. 36 Ketingan Kec. Jebres, Surakarta  
e-mail: iaindahwulan2@student.uns.ac.id

**Abstract.** Given a simple connected graph  $G$  with set of vertices is  $V(G)$  and set of edge is  $E(G)$ . A graph  $G$  is called to have an edge irregular reflexive  $k$ -labeling if each vertices can be labeled with an even positive integer  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  and each edge can be labeled with a positive integer  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  such that each edge has a different weight. The weight of an edge  $uv$  on a graph  $G$  is the sum of the vertex label  $u$ , vertex label  $v$ , and  $uv$  edge label. The reflexive edge strenght of a graph  $G$  denoted by  $res(G)$  is the minimum  $k$  of the largest label in graph  $G$  with  $k = \max \{2k_v, k_e\}$ . In this paper, we determine the reflexive edge strenght of the triangular chain graph  $mC_3$ -path for  $m \geq 2$ . The reflexive edge strenght of the triangular chain graph  $mC_3$ -path is 3 for  $m = 2$ ,  $m$  for  $m$  is even and  $m \neq 2$ , and  $m + 1$  for  $m$  is odd.

**Keywords:** Edge irregular reflexive labeling, reflexive edge strenght, and triangular chain graph

## 1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang ahli matematika dari Swiss pada tahun 1736. Menurut Wilson [15], suatu graf  $G$  adalah himpunan tak kosong berhingga  $V(G)$  yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan himpunan berhingga  $E(G)$  yang anggotanya merupakan pasangan tak berurutan (belum tentu berbeda) dari anggota-anggota  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*). Salah satu pembahasan yang ada di dalam teori graf yaitu pelabelan. Menurut Wallis [14], pelabelan suatu graf merupakan pemetaan yang membawa elemen-elemen graf sebagai *domain* ke bilangan bulat positif atau non negatif sebagai *kodomain*. Pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik (himpunan titik sebagai *domain*), pelabelan sisi (himpunan sisi sebagai *domain*), dan pelabelan total (himpunan titik dan sisi sebagai *domain*). Namun, seiring berjalannya waktu terdapat perkembangan pada jenis pelabelan graf, salah satunya yaitu pelabelan total tak teratur. Menurut Bača dkk. [4], pelabelan total tak teratur terbagi menjadi pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik. Pada tahun 2017, Ryan dkk. (dalam Bača, [3]) memperkenalkan sebuah konsep baru dari pelabelan total tak teratur yaitu pelabelan refleksif tak teratur titik (*vertex irregular reflexive labeling*) dan pelabelan refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive labeling*) pada suatu graf.

Pada pelabelan refleksif tak teratur sisi, terdapat beberapa graf yang telah diteliti diantaranya yaitu graf prisma  $D_n$  dan graf roda  $W_n$  [13], graf *generalized friendship*  $f_{n,m}$  [3], graf sapu  $Br_{n,m}$  [1], graf bintang  $K_{1,n}$  dengan  $n \geq 4$  [8], graf *fan*  $F_n$ , graf *baskets*  $B_n$ , graf lintasan  $P_n$ , graf *cycle*  $C_n$  [2], pada tahun 2020 Indriati dkk meneliti graf lintasan 1 korona graf lengkap  $K_1$  dan graf lintasan korona graf lintasan  $P_2$  ( $P_n \odot K_1$  dan  $P_n \odot P_2$ ) [9], graf *tadpole*  $T_{n,m}$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n = 1,2$  diteliti oleh Budi dkk pada tahun 2021 [6], pada tahun 2021 graf *banana tree*  $B_{n,m}$  dengan  $m = 2,3$  diteliti oleh Novelia dan Indriati [10], Rahmawati dan Indriati meneliti graf *umbrella*  $U_{n,m}$  dengan  $m = 3,4$  pada tahun 2021 [11], serta Setiawan dan Indriati pada tahun 2021 meneliti graf *sun* ( $C_n \odot N_1$ ) dan graf *cycle* korona graf *null*  $N_2$  ( $C_n \odot N_2$ ) [12]. Pada penelitian ini, akan ditentukan *res* dari graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan dengan  $m \geq 2$ .

## 2. Metodologi

### 2.1 Metode Penelitian

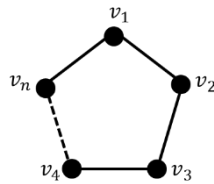
Metode penelitian yang digunakan untuk menentukan *res* pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan yaitu kajian pustaka dengan menggunakan referensi berupa buku-buku, artikel, dan jurnal-jurnal terkait. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. menentukan batas bawah *res* pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan berdasarkan Lema 2.6,
2. melakukan pelabelan terhadap graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan sesuai dengan batas bawah *res* sedemikian sehingga setiap sisinya mempunyai bobot yang berbeda,
3. menghitung bobot setiap sisi pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan menggunakan persamaan (1),
4. menentukan pola umum pelabelan refleksif tak teratur sisi pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan,
5. menentukan rumus umum *res*, label titik, label sisi, dan bobot sisi dari pelabelan refleksif tak teratur sisi pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan,
6. membangun teorema beserta pembuktian berdasarkan hasil yang diperoleh,
7. membuat kesimpulan.

### 2.2 Landasan Teori

Berikut diberikan definisi graf siklus menurut Chartrand [7], graf rantai menurut Barrientos [5], graf rantai segitiga, serta definisi pelabelan  $k$ -refleksif tak teratur sisi, *kekuatan sisi refleksif*, dan *lema pendukung* menurut Ryan et al. (dalam Bača, [2]).

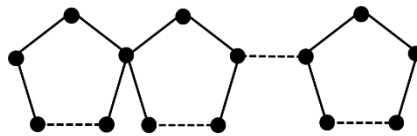
**Definisi 2.1.** Graf siklus (*cycle*) adalah graf terhubung sederhana yang memiliki  $n$  titik dan  $n$  sisi sedemikian sehingga setiap titiknya berderajat dua, dinotasikan dengan  $C_n$ . Gambar graf siklus ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf siklus  $C_n$

**Definisi 2.2.** Graf rantai adalah graf yang terdiri dari blok-blok  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$  dengan  $m \geq 2$ . Untuk setiap  $i, 1 \leq i \leq m - 1, B_i$  dan  $B_{i+1}$  berisikan tepat pada satu titik potong sehingga blok *cut-vertex* grafnya merupakan graf lintasan.

Graf rantai dengan  $m$  blok dinotasikan dengan  $C[B_1, B_2, B_3, \dots, B_m]$ . Jika setiap  $B_i$  merupakan graf  $H$ , maka  $C[B_1, B_2, B_3, \dots, B_m]$  dinotasikan dengan  $mH$ -lintasan. Gambar graf rantai dengan setiap  $B_i$  merupakan graf siklus  $C_n$  ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf rantai  $mC_n$ -lintasan

**Definisi 2.3.** Graf rantai segitiga adalah graf rantai yang terdiri dari  $m$  blok graf *cycle*  $C_3$ , dinotasikan dengan  $mC_3$ -lintasan untuk  $m \geq 2$ .

**Definisi 2.4.** Suatu graf  $G$  disebut mempunyai pelabelan  $k$ -refleksif tak teratur sisi jika setiap titiknya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif genap  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  dan setiap sisinya dapat diberi label dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  sedemikian sehingga setiap sisinya mempunyai bobot yang berbeda. Bobot dari suatu sisi  $uv$  pada graf  $G$  terhadap pelabelan  $f$  merupakan jumlahan dari label titik  $u$ , label titik  $v$ , dan label sisi  $uv$  yang dinotasikan dengan

$$wt_f = f(u) + f(uv) + f(v) \tag{1}$$

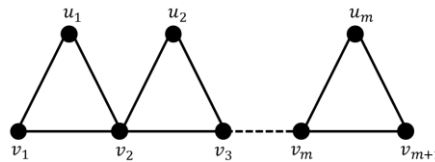
**Definisi 2.5.** Kekuatan sisi refleksif (*reflexive edge strenght*) dari suatu graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $res(G)$  adalah nilai minimum  $k$  dari label terbesar pada graf  $G$ , dengan  $k = \max\{2k_v, k_e\}$ .

**Lema 2.6.** Untuk setiap graf  $G$

$$res(G) \geq \begin{cases} \lceil \frac{|E(G)|}{3} \rceil, & \text{untuk } |E(G)| \not\equiv 2,3 \pmod{6} \\ \lceil \frac{|E(G)|}{3} \rceil + 1, & \text{untuk } |E(G)| \equiv 2,3 \pmod{6} \end{cases}$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

Graf rantai segitiga memiliki himpunan titik  $V(mC_3 - \text{lintasan}) = \{u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq m + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(mC_3 - \text{lintasan}) = \{u_i v_i, v_i v_{i+1}, u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq m\}$ , sehingga memiliki  $2m + 1$  titik dan  $3m$  sisi. Gambar graf rantai segitiga ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan

**Teorema 3.** Untuk suatu graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan dengan  $m \geq 2$

$$res(mC_3 - \text{lintasan}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m = 2 \\ m, & \text{untuk } m \text{ genap, } m \neq 2 \\ m + 1, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

*Bukti.* Pertama, dibuktikan ekuivalensi batas bawah dari  $res(mC_3 - \text{lintasan})$  pada Teorema 3 dengan Lema 2.6. Graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan mempunyai  $3m$  sisi, kemudian dengan Lema 2.6 diperoleh

$$res(mC_3 - \text{lintasan}) \geq \begin{cases} \lceil \frac{3m}{3} \rceil, & \text{untuk } 3m \not\equiv 2,3 \pmod{6} \\ \lfloor \frac{3m}{3} \rfloor + 1, & \text{untuk } 3m \equiv 2,3 \pmod{6} \end{cases} \quad (2)$$

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan

$$res(mC_3 - \text{lintasan}) \geq \begin{cases} m, & \text{untuk } m \text{ genap, } m \neq 2 \\ m + 1, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases} \quad (3)$$

Berikut ini dibuktikan bahwa pernyataan (2) ekuivalen dengan pernyataan (3)

- Untuk syarat  $m$  genap,  $m \neq 2$

Untuk  $m$  bilangan genap bisa juga dituliskan sebagai  $m = 2k$ , sehingga

$$\begin{aligned} m &= 2k \\ 3m &= 6k \\ 3m &= 6k + 0 \\ 3m &= 0 \pmod{6} \\ 3m &\not\equiv 2,3 \pmod{6} \end{aligned}$$

hal tersebut berarti bahwa  $m$  bilangan genap ekuivalen dengan  $3m \not\equiv 2,3 \pmod{6}$

- Untuk syarat  $3m \equiv 2,3 \pmod{6}$

Diambil  $3m \equiv 3 \pmod{6}$ , diperoleh

$$\begin{aligned} 3m &\equiv 3 \pmod{6} \\ 3m &= 6k + 3 \\ m &= 2k + 1 \end{aligned}$$

bisa juga dituliskan sebagai  $m$  bilangan ganjil. Hal tersebut berarti bahwa  $3m \equiv$

$2,3(mod 6)$  ekuivalen dengan  $m$  bilangan ganjil.

- Untuk rumus  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil$

$$\lceil \frac{3m}{3} \rceil = \lceil m \rceil = m$$

hal tersebut berarti bahwa  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil$  ekuivalen dengan  $m$

- Untuk rumus  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil + 1$

$$\lceil \frac{3m}{3} \rceil + 1 = \lceil m \rceil + 1 = m + 1$$

hal tersebut berarti bahwa  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil + 1$  ekuivalen dengan  $m + 1$

Karena syarat  $m$  bilangan genap ekuivalen dengan syarat  $3m \not\equiv 2,3(mod 6)$ , syarat  $3m \equiv 2,3(mod 6)$  ekuivalen dengan syarat  $m$  bilangan ganjil, dan rumus  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil$  ekuivalen dengan rumus  $m$ , serta rumus  $\lceil \frac{3m}{3} \rceil + 1$  ekuivalen dengan rumus  $m + 1$ , maka terbukti bahwa pernyataan (2) ekuivalen dengan pernyataan (3).

Selanjutnya, dibuktikan batas bawah dari  $res(mC_3\text{-lintasan})$  adalah 3 untuk  $m = 2$ . Graf rantai segitiga  $2C_3\text{-lintasan}$  mempunyai 5 titik yaitu  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , dan  $v_3$ , serta mempunyai 6 sisi yaitu  $u_1v_1, u_2v_2, v_1v_2, v_2v_3, u_1v_2$ , dan  $u_2v_3$ . Berdasarkan Lema 2.6 diperoleh batas bawah dari  $res(2C_3\text{-lintasan}) = 2$ . Diasumsikan bahwa  $res(2C_3\text{-lintasan}) = 2$ , hal tersebut berarti label terbesar dari titik dan sisi adalah 2, maka kemungkinan label titik dan sisi sebagai berikut

$$\begin{aligned} wt_f(u_1v_1) &= f(u_1) + f(u_1v_1) + f(v_1) = 0 + 1 + 0 = 1 \\ wt_f(v_1v_2) &= f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 0 + 2 + 0 = 2 \\ wt_f(u_1v_2) &= f(u_1) + f(u_1v_2) + f(v_2) = 0 + 2 + 0 = 2 \\ wt_f(u_2v_2) &= f(u_2) + f(u_2v_2) + f(v_2) = 2 + 2 + 0 = 4 \\ wt_f(v_2v_3) &= f(v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3) = 0 + 2 + 2 = 4 \\ wt_f(u_2v_3) &= f(u_2) + f(u_2v_3) + f(v_3) = 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Dikarenakan ada sisi yang mempunyai bobot sama, maka formula tersebut tidak dapat diterapkan. Kemudian diasumsikan bahwa  $res(2C_3\text{-lintasan}) = 3$ , hal tersebut berarti label terbesar dari titik dan sisi adalah 3, maka kemungkinan label titik dan sisi sebagai berikut

$$\begin{aligned} wt_f(u_1v_1) &= f(u_1) + f(u_1v_1) + f(v_1) = 0 + 1 + 0 = 1 \\ wt_f(v_1v_2) &= f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 0 + 2 + 0 = 2 \\ wt_f(u_1v_2) &= f(u_1) + f(u_1v_2) + f(v_2) = 0 + 3 + 0 = 3 \\ wt_f(u_2v_2) &= f(u_2) + f(u_2v_2) + f(v_2) = 2 + 2 + 0 = 4 \\ wt_f(v_2v_3) &= f(v_2) + f(v_2v_3) + f(v_3) = 0 + 3 + 2 = 5 \\ wt_f(u_2v_3) &= f(u_2) + f(u_2v_3) + f(v_3) = 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Karena tidak ada sisi yang mempunyai bobot sama, maka formula tersebut dapat diterapkan, sehingga terbukti bahwa batas bawah dari  $res(2C_3\text{-lintasan})$  adalah 3 untuk  $m = 2$ .

Yang kedua, dibuktikan batas atas dari  $res(mC_3\text{-lintasan})$  dengan mengkonstruksikan  $f$  pada pelabelan- $k$  dari graf  $mC_3\text{-lintasan}$  sebagai berikut

$$f(u_i) = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ i, & i \text{ genap}, 1 < i \leq m \\ i - 1, & i \text{ ganjil}, 1 < i \leq m \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2 \\ i, & i \text{ genap}, 2 < i \leq m \\ i - 1, & i \text{ ganjil}, 1 < i \leq m \end{cases}$$

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} i, & i \text{ ganjil}, i = 2, 1 \leq i \leq m \\ i - 2, & i \text{ genap}, 2 < i \leq m \end{cases}$$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} i + 1, & i \leq 2 \\ i - 1, & i > 2 \end{cases}$$

$$f(u_i v_{i+1}) = \begin{cases} 3, & i = 1 \\ i, & i > 1 \end{cases}$$

Dari pelabelan- $k$  tersebut terlihat bahwa label titik merupakan bilangan bulat positif genap dan label sisi merupakan bilangan bulat positif, serta label terbesar dari titik dan sisi yaitu 3 untuk  $m = 2$ ,  $m$  untuk  $m$  genap dan  $m \neq 2$ , serta  $m + 1$  untuk  $m$  ganjil. Sehingga diperoleh bobot sisi sebagai berikut

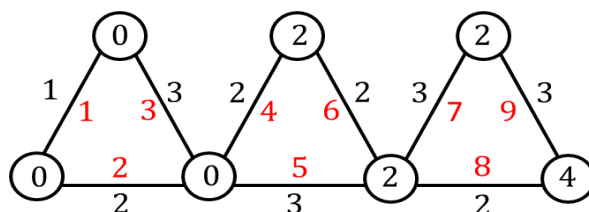
$$wt_f(u_i v_i) = 3i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m$$

$$wt_f(v_i v_{i+1}) = 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m$$

$$wt_f(u_i v_{i+1}) = 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m$$

Dari bobot sisi di atas, terlihat bahwa graf rantai segitiga  $mC_3\text{-lintasan}$  mempunyai bobot yang berbeda untuk setiap sisinya, sehingga  $f$  memenuhi elemen pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi. Dari uraian di atas diperoleh batas bawah sama dengan batas atas dari  $res(mC_3\text{-lintasan})$ , sehingga graf rantai segitiga  $mC_3\text{-lintasan}$  mempunyai kekuatan sisi refleksif sesuai dengan Teorema 3. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Gambar 4 merupakan ilustrasi dari pelabelan-4 refleksif tak teratur sisi pada graf rantai segitiga  $3C_3\text{-lintasan}$ . Pada gambar tersebut, angka berwarna hitam menunjukkan label titik dan label sisi, sedangkan angka berwarna merah menunjukkan bobot sisi.



Gambar 4. Pelabelan-4 refleksif tak teratur sisi graf  $3C_3\text{-lintasan}$

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh kekuatan sisi refleksif pada graf rantai segitiga  $mC_3$ -lintasan dengan  $m \geq 2$  yaitu 3 untuk  $m = 2$ ,  $m$  untuk  $m$  genap dan  $m \neq 2$ , serta  $m + 1$  untuk  $m$  ganjil. Penulis berharap bagi pihak yang tertarik dengan topik pelabelan refleksif tak teratur sisi maupun kekuatan sisi refleksif pada graf dapat melakukan penelitian untuk menentukan kekuatan sisi refleksif pada graf rantai  $mC_n$ -lintasan dengan  $m \geq 2$  dan  $n > 3$ .

## Daftar Pustaka

Pustaka diurutkan secara alpabetika dan semua harus dirujuk ke dalam naskah.

- [1] Agustin, I. H., Utoyo, I., Dafik, Venkatachalam, M., (2020), Edge Irregular Reflexive Labeling of Some Tree Graphs, *In Journal of Physics: Conference Series* **1543**, 012008. doi:10.1088/1742-6596/1543/1/012008
- [2] Bača, M., Irfan, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Tanna, D., (2019), Note on Edge Irregular Reflexive Labelings of Graphs, *AKCE International Journal of Graph and Combinatorics* **16**, 145-157. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2018.01.013>
- [3] Bača, M., Irfan, M., Ryan, J., Semaničová-Feňovčíková, A., Tanna, D., (2017), On Edge Irregular Reflexive Labellings for The Generalized Friendship Graphs, *Mathematics* **5(4)**, 67. DOI:10.3390/math5040067
- [4] Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., Ryan, J., (2007), On Irregular Total Labeling, *Discrete Mathematics* **307**, 1378-1388. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.11.075>
- [5] Barrientos, C., (2002), Graceful Labeling of Chain and Corona Graphs, *Bulletin ICA* **3434**, 17-26.
- [6] Budi, N. I. S., Indriati, D., Winarno, D., (2021), Edge Irregular Reflexive Labeling on Tadpole Graphs  $T_{m,1}$  and  $T_{m,2}$ , *In AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing LLC.
- [7] Chartrand, G., Jacobson, M., Lehel, J., Oellermann, O.R., Ruiz, S., Saba, F., (1988), Irregular Network, *Congressus Numerantium* **64**, 187-192.
- [8] Frucht, R., dan F. Harary, (1970), On The Corona of Two Graphs, *Aequationes Math* **4**, 322-325. <https://doi.org/10.1007/BF01844162>
- [9] Indriati, D., Widodo, dan I. Rosyida, (2020), Edge Irregular Reflexive Labeling on Corona of Path and Other Graphs, *Journal of Physics: Conference Series* **1489**

012004. doi:10.1088/1742-6596/1489/1/012004

- [10] Novelia, J. A., dan D. Indriati, (2021), Edge Irregular Reflexive Labeling on Banana Tree Graphs  $B_{2,n}$  and  $B_{3,n}$ , *In AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing LLC. ISBN: 978-0-7354-4070-8
- [11] Rahmawati, N. A., dan D. Indriati, (2021), Edge Irregular Reflexive Labeling on Umbrella Graphs  $U_{3,n}$  and  $U_{4,n}$ , *In AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing LLC. ISBN: 978-0-7354-4070-8
- [12] Setiawan, I., dan D. Indriati, (2021), Edge Irregular Reflexive Labeling on Sun Graph and Corona of Cycle and Nul Graph with Two Vertices, *Indonesian Journal of Combinatorics* **5(1)**, 35-45. <https://dx.doi.org/10.19184/ijc.2021.5.1.5>
- [13] Tanna, D., J. Ryan, dan A. Semaničová-Feňovčíková, (2017), Edge Irregular Reflexive Labeling of Prisms and Wheels, *Australasian Journal of Combinatorics* **69(3)**, 394-401.
- [14] Wallis, W. D., (2001), *Magic Graphs*, Birkhäuser, Basel, Berlin.
- [15] Wilson, R. J., (1996), *Introduction to Graph Theory*, 4<sup>th</sup> ed., Longman, England.