

AHP DENGAN MATRIKS PREFERENSI DALAM ALJABAR MAX-PLUS

(AHP with Preference Matrices in Max-Plus Algebra)

I Gst Ngr Rai Usadha

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
e-mail: rusadha@gmail.com, usadha@matematika.its.ac.id,

Abstract. Analytical Hierarchy Process (AHP) is a decision-making method to determine the best alternative from a number of alternatives based on certain criteria. One of the fundamental problems in AHP is how to obtain a preference matrix for a number of alternatives. In this paper, a preference matrix is formed so that it meets certain conditions in Tropical Algebra. Furthermore, the maxplus operation is applied to obtain the eigenvectors of the preference matrix that describes the steady state condition. A case study was conducted on determining the priority of road maintenance in Bangkalan Regency. The calculation results show that there is a conformity with the results of previous studies.

Keywords: Analytical Hierarchy Process, preference matrix, eigenvectors, steady state.

1. Pendahuluan

Pada pengambilan keputusan yang melibatkan banyak kriteria dan sub kriteria, maka perlu digunakan suatu metode tertentu. Misalnya keputusan dalam penentuan prioritas dalam pemeliharaan jalan raya, di dalamnya terdapat banyak kriteria dan sub-kriteria yang perlu dipertimbangkan. Kriteria dan sub-kriteria tersebut perlu diketahui kontribusinya terhadap pemilihan ruas jalan agar strategi yang akan dilakukan tepat sasaran dan pengambilan keputusan menjadi optimal. Sistem Pendukung Keputusan (SPK) dapat memaparkan alternatif pilihan kepada pengambil keputusan [4]. *Analytical Hierarchy Process* (AHP) yang dikembangkan oleh Thomas L [2] berguna untuk membantu pengambilan keputusan. Untuk mendapat keputusan terbaik dengan membandingkan faktor-faktor yang berupa kriteria dan sub-kriteria. AHP memungkinkan pengambil keputusan untuk menghadapi faktor yang nyata dan faktor yang tidak nyata.

Kelebihan AHP dibandingkan dengan yang lainnya karena adanya struktur yang berhirarki, sebagai konsekuensi dari kriteria yang dipilih, sampai kepada sub-sub kriteria yang paling mendetail.

Pada penelitian sebelumnya, Oktavia dan Usadha, [3], telah melakukan penelitian terkait dengan pemilihan prioritas pemilihan ruas jalan yang akan diperbaiki di Kabupaten Bangkalan. Dalam penelitian tersebut digunakan metode Fuzzy Analytical Network Proses (Fuzzy ANP).

Sedangkan dalam artikel ini dibahas tentang metode lainnya dalam pengambilan keputusan dengan banyak kriteria dan sub-kriteria yaitu AHP dengan Matriks Preferensi dalam Aljabar Maxplus sebagai perbandingan dengan metode yang telah digunakan pada [1]

2. Tinjauan Pustaka

Secara formal, AHP dinyatakan dengan matriks dan operasi matriks digunakan untuk mencari dan mengevaluasi alternatif yang terbaik. Misalkan $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ adalah himpunan Kriteria/sub-kriteria. Penilaian terukur pada pasangan kriteria (A_i, A_j) diwakili oleh matriks $A_{n \times n} = [a_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n$.

Elemen a_{ij} didefinisikan sebagai berikut: jika $a_{ij} = a$, maka $a_{ji} = \frac{1}{a}$; $a \neq 0$ untuk semua i, j . Jika A_i dianggap memiliki intensitas relatif yang sama dengan dirinya sendiri, maka $a_{ii} = 1$ untuk semua i . Dengan demikian diperoleh matriks persegi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \frac{1}{a_{12}} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \frac{1}{a_{3n}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Pendekatan standar untuk menemukan vektor kepentingan relatif pada pemilihan kriteria adalah dengan menggunakan vektoreigen dari matriks preferensi tersebut [2]. Pada penelitian ini, nilai eigen dan vektoreigen berdasarkan pada operasi matriks pada Aljabar Tropical (Aljabar Maxplus.atau Aljabar maxprod)

Aljabar Tropical merupakan salah satu bidang dalam Matematika yang telah berkembang selama satu dekade terakhir. Aljabar Tropical dipelopori oleh ahli matematika dan komputer Imre Simon seorang peneliti dari Brazil pada tahun 1980-an. Aljabar Tropical adalah semiring idempoten.

Dua aljabar tropical yang paling sering digunakan adalah aljabar maxplus (R^*, \oplus, \otimes) , dengan $R^* = R \cup \{-\infty\}$ dan aljabar maxprod (R, \oplus, \odot) . Operasi-operasi biner tersebut didefinisikan sebagai berikut : \oplus =maksimum dan \odot = produk/penggandaan pada Aljabar maxprod. Sedangkan \oplus = maksimum dan \otimes = penjumlahan pada Aljabar maxplus. Jadi $x \oplus y = \max\{x, y\}$, $x \otimes y = x + y$, dan $x \odot y = x \cdot y$.

Aljabar maxplus telah banyak digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrean dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan penjadwalan.

3. Metodologi

Beberapa tahapan yang dilakukan dalam pelaksanaan penelitian ini:

1. Pengumpulan data.

Data yang digunakan yaitu data primer berupa hasil pengisian kuesioner para ahli dan data sekunder dari DPU Bina Marga Bangkalan berupa alternatif link jalan yang digunakan sebagai objek penelitian dalam prioritas pemeliharaan jalan. Tahap ini sudah dilaksanakan pada penelitian terdahulu, sehingga pada penelitian kali ini bisa dilanjutkan ke tahap berikutnya.

2. Pengolahan data dengan Aljabar Maxplus

Pada tahap ini hasil rekap dari form penilaian berupa matriks perbandingan berpasangan. Data penilaian tersebut disajikan sebagai matriks preferensi seperti pada matriks (1) yang selanjutnya diolah menggunakan metode pada Aljabar maxplus untuk menentukan nilai eigennya yang mempresentasikan bobot kriteria, bobot subkriteria, atau bobot alternatif terhadap masing-masing subkriteria. Bahwa vektoreigen dapat dipergunakan sebagai bobot dalam pemilihan alternatif dapat ditemukan pada [2]. Subiono [3] telah menunjukkan bahwa Aljabar Maxplus isomorfik dengan Aljabar maxprod. Sehingga bekerja dalam Aljabar Maxplus dan Aljabar Maxprod memberikan solusi yang sama.

4. Hasil dan Pembahasan

Dalam tahap ini dilakukan Analisa dari hasil pengolahan data untuk mendapatkan solusi berupa keputusan Alternatif mana ya terpilih. Oleh karena matriks preferensi seperti pada (1), memenuhi operasi matriks pada aljabar maxprod, (R, \oplus, \odot) , maka vektoreigennya dicari dengan operasi matriks dalam operasi biner \odot dan \oplus . Tetapi, dalam rangka memanfaatkan toolbox maxplus yang telah dikembangkan oleh Subiono dkk [Subiono et.al, 2013], maka dilakukan transformasi dari (R, \oplus, \odot) ke (R^*, \oplus, \otimes) . Dalam hal ini dipilih isomorphism $y = g(x) = \log \log (x)$. Selanjutnya vektoreigen pada (R^*, \oplus, \otimes) dengan isomorphism $y = f(x) = \exp (x)$, ditransformasikan kembali ke (R, \oplus, \odot) .

4.1 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari Dinas Pekerjaan Umum (DPU) Bina Marga Bangkalan. Data link jalan berasal dari data survey rutin dengan tahun anggaran 2014- 2015. Daftar link jalan yang digunakan terdapat pada Tabel 1 dan selanjutnya keempat link jalan disebut dengan alternatif. Kriteria dan subkriteria penilaian yang digunakan oleh pihak DPU untuk melakukan prioritas pemeliharaan jalan disajikan dalam Tabel 2.

Tabel 1. Data alternatif link jalan

| No. | Nama Jalan |
|-----|------------|
| 1. | Link 222 |
| 2. | Link 223 |
| 3. | Link 224 |
| 4. | Link 228 |

Sumber: DPU Bina Marga Bangkalan

Tabel 2. Kriteria dan subkriteria dalam proses prioritas pemeliharaan jalan.

| No. | Kriteria | Subkriteria |
|-----|--------------------|--|
| 1 | Kondisi Jalan | Jalan Lubang |
| | | Jalan Retak |
| | | Jalan Ambles |
| | | Jalan Gelombang |
| | | Jalan Jembul |
| 2 | Volume Lalu Lintas | Bahu jalan |
| | | Truk ringan |
| | | Truk sedang dan berat |
| | | Mobil |
| | | Bus |
| 3 | Ekonomi | Sepeda motor |
| | | Perkiraan biaya kegiatan Manfaat penanganan jalan |
| 4 | Tata Guna Lahan | Bidang pertanian |
| | | Bidang pendidikan |
| | | Bidang sosial-budaya |
| | | Bidang perdagangan-jasa |

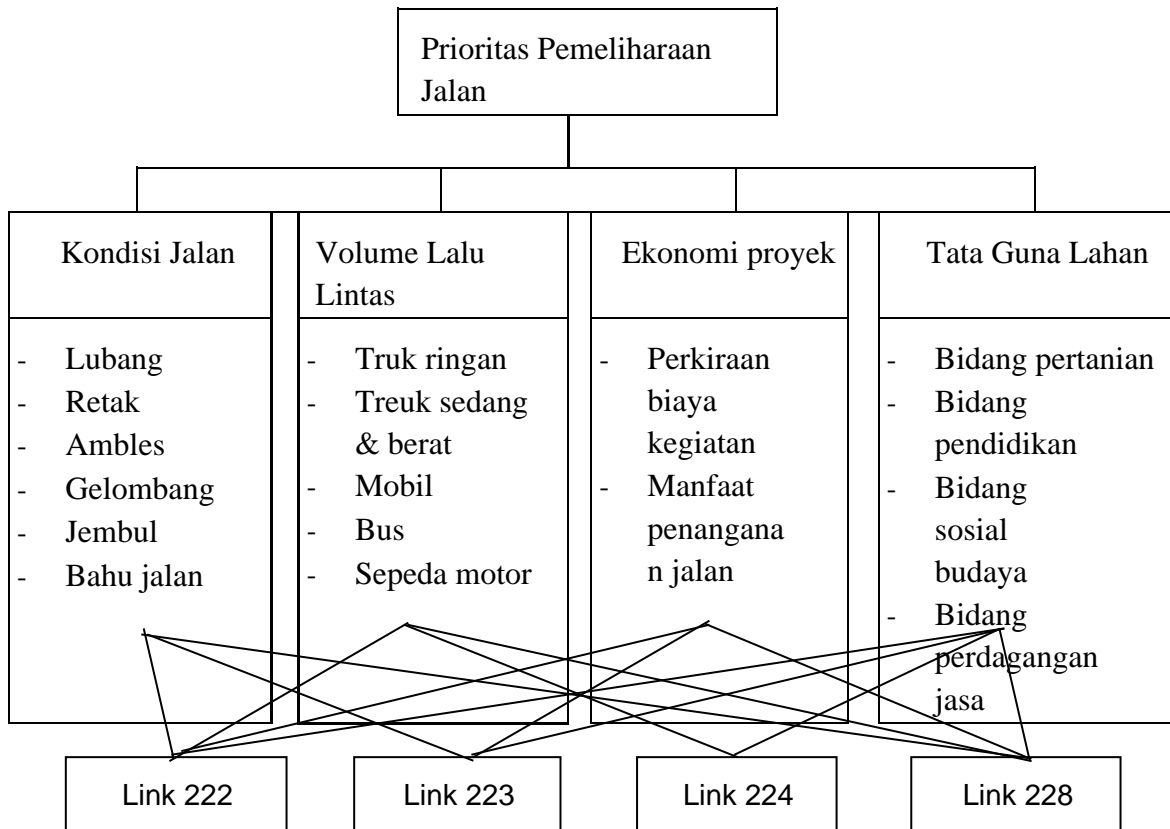
Sumber: DPU Bina Marga Bangkalan

4.2 Penyusunan Struktur Jaringan

Analytical Hierarchy Process (AHP) dapat memecahkan permasalahan yang kompleks menjadi unsur-unsur yang lebih mudah diselesaikan melalui penyusunan struktur jaringan. Gambar 1 menunjukkan struktur hirarki antara tujuan, kriteria, subkriteria dan alternatif. Tujuan yang ingin dicapai adalah mendapatkan prioritas pemeliharaan jalan dari empat alternatif, yaitu Link 222, Link 223, Link 224 dan Link 228.

Dalam penentuan prioritas pemeliharaan jalan ditentukan berdasarkan pemenuhan masing-masing alternatif terhadap kriteria dan subkriteria yang telah ditentukan, yaitu kondisi jalan (jalan lubang, jalan retak, jalan ambles, jalan gelombang, jalan jembul,

bahu jalan), volume lalu lintas (truk ringan, truk sedang dan berat, mobil, bus, sepeda motor), ekonomi (perkiraan biaya kegiatan, manfaat penanganan jalan) dan tata guna lahan (bidang pertanian, bidang pendidikan, bidang sosial-budaya, bidang perdagangan-jasa). Garis-garis penghubung antar elemen menunjukkan adanya hubungan antar elemen.



Gambar 1. Struktur Hirarki hubungan tujuan, alternatif, kriteria, subkriteria

4.3 Penilaian untuk Kriteria dan Subkriteria

Tingkat Kepentingan antar Subkriteria dalam Kriteria Kondisi Jalan.

Misalnya, dalam mengontrol kondisi jalan bagaimana tingkat kepentingan perbaikan lubang dibandingkan dengan perbaikan retak?

Dari data survei dengan tiga responden, diperoleh perhitungan-perhitungan sebagai berikut: Untuk responden 1,

Tabel 3. Penilaian antar Subkriteria dalam Kriteria Kondisi Jalan

| Responden 1 | Lubang | Retak | Ambles | Bergelombang | Jembul | Bahu jalan |
|--------------|--------|-------|--------|--------------|--------|------------|
| Lubang | | 5 | 1 | 5 | 5 | 7 |
| Retak | | | 1 | 3 | 3 | 5 |
| Ambles | | | | 1 | 5 | 7 |
| Bergelombang | | | | | 1 | 5 |
| Jembul | | | | | | 5 |
| Bahu jalan | | | | | | |

Keterangan: [5]

- 1 : Sama-sama penting
- 2 : Sedikit lebih penting
- 5 : lebih penting
- 7 : Sangat lebih penting
- 9 : Mutlak lebih penting

Dari Tabel 3 hasil penilaian responden 1, terbentuk matriks preferensi A_1 sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 5 & 5 & 7 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 5 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 5 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Setelah ditransformasikan ke (R^*, \oplus, \otimes) , dengan fungsi transformasi $g(x) = \log \log(x)$, maka matriks preferensi menjadi $B = \log \log(A_1)$, yaitu

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1.6094379 & 0 & 1.6094379 & 1.6094379 & 1.9459101 & - \\ 1.6094379 & 0 & 0 & 1.0986123 & 1.0986123 & 1.6094379 & 0 \\ 1.6094379 & -1.0986123 & -1.0986123 & 0 & 0 & 1.0986123 & -1.6094379 \\ 1.6094379 & 0 & 1.6094379 & -1.9459101 & -1.6094379 & -1.9459101 & -1.9459101 \\ - & 1.6094379 & 1.9459101 & - & - & 1.6094379 & 1.9459101 \\ - & 0 & - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Dengan bantuan *toolbox maxplus Scilab* diperoleh vektor eigen :
 $v_1 = [13.8038 \quad 12.787257 \quad 13.298082 \quad 11.770713 \quad 12.281539 \quad 11.264995]$.
 Dengan transformasi $f(x) = \exp(x)$ kembali ke (R, \oplus, \odot) , diperoleh vektor eigen untuk responden 1 adalah
 $V_1 = \exp(v_1)$
 $= [988357.72 \quad 357630.84 \quad 596051.39 \quad 129406.4 \quad 215677.34 \quad 78041.447]$
Untuk Responden 2,

Dengan prosedur yang sama seperti pada data responden 1, dari Tabel 4. diperoleh matriks preferensi:
 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 & 5 & 5 & 5 & \frac{1}{9} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ \frac{1}{5} & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 1 & 5 & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
 dengan vektor eigen, $V_2 = [7581.9055 \quad 1752.3332 \quad 3645. \quad 1752.3332 \quad 1752.3332 \quad 729]$
 Demikian pula untuk responden 3,

Tabel 4. Penilaian antar Subkriteria dalam Kriteria Kondisi Jalan

| Responden 2 | Lubang | Retak | Ambles | Bergelombang | Jembul | Bahu jalan |
|--------------|--------|-------|--------|--------------|--------|------------|
| Lubang | | 9 | 1 | 5 | 5 | 5 |
| Retak | | | 1 | 1 | 1 | 5 |
| Ambles | | | | 1 | 1 | 5 |
| Bergelombang | | | | | 1 | 5 |
| Jembul | | | | | | 5 |
| Bahu jalan | | | | | | |

Tabel 5. Penilaian antar Subkriteria dalam Kriteria Kondisi Jalan

| Responden 3 | Lubang | Retak | Ambles | Bergelombang | Jembul | Bahu jalan |
|--------------|--------|-------|--------|--------------|--------|------------|
| Lubang | | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| Retak | | | | 1 | 1 | 3 |
| Ambles | | | | 1 | 5 | 7 |
| Bergelombang | | | | | 1 | 7 |
| Jembul | | | | | | 5 |
| Bahu jalan | | | | | | |

Dari Tabel 5. Diperoleh matriks preferensi:

$$A_3 = \left[\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 7 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} & 1 & 1 & 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} & 1 & 1 & 5 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{matrix} \right],$$

dengan vektor eigen,

$$V_3 = [323374.14 \quad 205197.48 \quad 390625. \quad 107791.38 \quad 148722.96 \quad 56623.411].$$

Dengan demikian diperoleh vektoreigen final sebagai rata-rata dari V_1, V_2, V_3 , yaitu sebagai bobot dalam penentuan sub-kriteria yang paling dominan pada kriteria kondisi jalan,

$$V_{KondisiJalan}$$

$$= [439771.26 \quad 188193.55 \quad 330107.13 \quad 79650.038 \quad 122050.88 \quad 45131.286].$$

Hal ini berarti bahwa jalan berlubang merupakan faktor yang paling dominan pada kondisi jalan. Oleh karena yang terpilih adalah sub-kriteria jalan berlubang, maka proses berikutnya adalah menentukan tingkat kepentingan Alternatif (link jalan) dalam pemenuhan subkriteria Lubang.

4.4 Penilaian untuk Alternatif

Tingkat Kepentingan Alternatif dalam Pemenuhan Subkriteria Lubang.

Misalkan, seberapa pentingkah pemeliharaan jalan untuk link 222 dibandingkan link 223 dalam hal jalan berlubang?

Tabel 6. Penilaian antar Alternatif untuk Jalan Lubang

| Responden 1 | 222 | 223 | 224 | 228 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| 222 | | 1 | 3 | 1 |
| 223 | | | 3 | 1 |
| 224 | | | | 1 |
| 228 | | | | |

matriks preferensinya :

$$A_1 = \left[1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right],$$

dengan vektor eigen,

$$V_1 = [83561.096 \ 83561.096 \ 22026.466 \ 42901.697 \].$$

Untuk responden 2

Tabel 7. Penilaian antar Alternatif untuk Jalan Lubang

| Responden 2 | 222 | 223 | 224 | 228 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| 222 | | 1 | 3 | 1 |
| 223 | | | 3 | 1 |
| 224 | | | | 1 |
| 228 | | | | |

matriks preferensinya :

$$A_2 = \left[1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right],$$

dengan vektor eigen,

$$V_2 = [4.3267487 \ 4.3267487 \ 2.0800838 \ 3. \].$$

Selanjutnya untuk responden 3:

Tabel 8. Penilaian antar Alternatif untuk Jalan Lubang

| Responden 3 | 222 | 223 | 224 | 228 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| 222 | | 1 | 3 | 1 |
| 223 | | | 3 | 1 |
| 224 | | | | 1 |
| 228 | | | | |

matriks preferensinya:

$$A_3 = \left[1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right],$$

dengan vektoreigennya

$$V_3 = [4.3267487 \ 4.3267487 \ 2.0800838 \ 3 \].$$

Dengan demikian diperoleh rata-rata dari V_1, V_2, V_3 sebagai penentu pemilihan alternatif diantara link 222, link 223, link 224 atau link 228. Dengan

$$V_{avg} = [27856.583 \quad 27856.583 \quad 7343.5421 \quad 14302.566 \quad] .$$

Tampak bahwa alternatif link 222 mempunyai bobot tertinggi, sehingga alternatif jalan link 222 terpilih (mendapat prioritas dalam pemeliharaan). Untuk alternatif/kriteria kondisi jalan.

Demikian proses dilanjutkan sehingga semua tingkat kepentingan alternatif dalam pemenuhan subkriteria tercapai. Sebagai hasil akhir dalam artikel ini diperoleh:

$$V_{final} = [9308.495 \quad 9318.4842 \quad 2455.6102 \quad 4778.3877 \quad] .$$

Hal ini berarti link 223 mempunyai bobot tertinggi dan mendapat prioritas dalam pemeliharaan jalan dengan kriteria dan subkriteria yang ditentukan. Sesuai dengan hasil yang diperoleh pada penelitian sebelumnya.

5. Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil pengolahan data dengan metode yang diusulkan pada penelitian ini, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Ada kesesuaian hasil dengan metode yang diterapkan pada [1]
2. Vektor Eigen pada Aljabar maxplus dan maxprod dapat digunakan sebagai dasar untuk memutuskan 1 pada beberapa pilihan alternatif.
3. Secara komputasi metode dengan matriks preferensi aljabar tropical, lebih sederhana dibandingkan dengan metode Fuzzy ANP.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih yang mendalam disampaikan kepada Prof. Subiono, atas diskusi panjang berkaitan dengan penulisan artikel ini. Demikian pula atas terbitnya *Toolbox Aljabar Maxplus dan Petrinet yang powerfull*.

Daftar Pustaka

- [1] Oktavia, M. & Usadha, I, G., N., R., (2015), Penerapan Fuzzy Analytical Network Process dalam Menentukan Prioritas Pemeliharaan Jalan, *Skripsi*, Departemen Matematika-FSAD ITS, Surabaya.
- [2] Saaty, T. L., (2003), Decision making with the AHP: why is the principal eigenvector necessary, *European Journal of Operation Research*, **125(1)**, 85-91,
- [3] Subiono, (2013), *Aljabar Maxplus dan Terapannya*, Departemen Matematika FSAD ITS, Surabaya.
- [4] Subiono, Adzkiya, D., Fahim, K., (2013), *Aljabar Maxplus and Petrinet Toolbox*. <https://atoms.scilab.org/toolboxes/Maxplus/1.1.0>
- [5] Tomaskova, H. & Martin, G., (2013), Preference Matrices in Tropical Algebra, *Proceeding of the International Symposium on the Analytic Hierarchy Process 23 – 26 Juni 2013*.