EKSISTENSI DEKOMPOSISI RANK PADA MATRIKS ATAS ALJABAR MAX-PLUS TERSIMETRI

(The Existence of Rank-Decomposition in Matrix over the Symmetrized Max-Plus Algebra)

Suroto[1*], Najmah Istikaanah[2], Sri Maryani[3]

[1,2,3]Jurusan Matematika Universitas Jenderal Soedirman, Jl. Dr. Soeparno Karangwangkal Purwokerto Utara, Banyumas, Jawa Tengah

e-mail: [1*] suroto@unsoed.ac.id, [2] najmah.mtk@unsoed.ac.id, [3] sri.maryani@unsoed.ac.id

[*] penulis korespondensi

Abstract. In this paper, we discuss the rank-decomposition in the symmetrized max-plus algebraic matrix. The existence of rank decomposition is shown using minor rank in the symmetrized max-plus algebra and a link among symmetrized max-plus algebra and conventional algebra. The result is a rank-decomposition in symmetrized max-plus algebraic matrix exists. Furthermore, the rank-decomposition is not unique.

Keywords: Existence, link, rank decomposition, symmetrized max-plus algebra

1. Pendahuluan

Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar yang terbentuk dari himpunan $R \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\otimes$ yang masing-masing didefinisikan sebagai maximum dan penjumlahan biasa [2]. Untuk selanjutnya, aljabar max-plus dinotasikan dengan R_{max}. Aljabar max-plus adalah semiring idempoten dengan elemen satuan $e = 0$ dan elemen nol $E = -\infty$. Dengan demikian, setiap elemen pada R_{max} tidak memiliki invers penjumlahan, kecuali elemen nol. Hal ini mengakibatkan kesulitan pada saat menyelesaikan masalah pada aljabar max-plus yang berkaitan dengan invers penjumlahan.

Proses simetrisasi pada R_{max} dengan menggunakan relasi setimbang ∇, dapat dilakukan untuk memperoleh bentuk negatif dan setimbang dari setiap elemen pada R_{max}. Hasil dari proses simetrisasi pada R_{max} dinamakan aljabar max-plus tersimetri dan dinotasikan dengan S. Bentuk negatif pada S memiliki peranan seperti invers penjumlahan, tetapi bukan merupakan bentuk invers penjumlahan. Untuk selanjutnya, himpunan bagian positif, negatif dan setimbang pada S, berturut-turut dinotasikan dengan $S^{\oplus}$, $S^{\ominus}$ dan S°, dengan $S^{\oplus} \cup S^{\ominus} \cup S^{\circ} = S$. Himpunan semua elemen bertanda pada S dinotasikan dengan $S^{\vee}$, dengan $S^{\vee} = S^{\oplus} \cup S^{\ominus}$.

Pada aljabar linier, objek pembahasan adalah himpunan bilangan riil atau kompleks yang masing-masing merupakan suatu lapangan (*field*). Determinan matriks dapat didefinisikan dengan penjumlahan hasil kali elementer bertanda [1]. Pada pembahasan matriks atas S, pendefinisian determinan matriks dilakukan mirip dengan memanfaatkan bentuk negatif yang memiliki peranan seperti invers penjumlahan. Pembahasan mengenai rank matriks atas aljabar max-plus tersimetri sudah dilakukan De Schutter [5]. Pada pembahasan tersebut rank didefinisikan sebagai rank minor yakni ukuran terbesar submatriks persegi yang determinannya tidak setimbang dengan elemen nol. Sementara pada aljabar linier, rank matriks didefinisikan melalui kebebasan linier dari baris/kolom matriks [4]. Hasil penelitian Suroto dkk. [15] menjelaskan tentang karakterisasi rank matriks atas S menggunakan kebebasan linier kolom/baris matriks. Rank matriks atas S dapat ditentukan dengan menghitung maksimal banyaknya kolom/baris yang bebas linier pada matriks, sehingga rank matriks dapat dihitung dengan cara yang mirip pada aljabar linier.

Pembahasan mengenai korespondensi antara aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar linier sudah dilakukan De Schutter dan De Moor [6]. Korespondensi dilakukan dengan mendefinisikan fungsi yang memetakan elemen pada S ke suatu bentuk eksponensial, dan sebaliknya. Dengan menggunakan korespondensi tersebut, masalah pada aljabar max-plus tersimetri dapat dibawa dan diselesaikan pada konteks aljabar linier, kemudian hasil penyelesaiannya dibawa dan disajikan kembali pada aljabar max-plus tersimetri.

Beberapa penelitian yang berkaitan dengan dekomposisi matriks atas aljabar max-plus tersimetri antara lain dekomposisi QR dan dekomposisi nilai singular atas S [6], dekomposisi LU atas S [10], dekomposisi Cholesky atas S [16] dan dekomposisi nilai eigen atas S [11]. Pada pembahasan [10,16], hasil dekomposisi dapat dimanfaatkan untuk menghitung solusi sistem kesetimbangan linier atas S, seperti halnya dekomposisi LU pada aljabar linier dapat dimanfaatkan pada solusi sistem persamaan linier [7]. Pembahasan mengenai pendefinisian invers Moore-Penrose pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri sudah dilakukan Suroto [12] dan Suroto dkk. [14]. Pembahasan mengenai dekomposisi rank pada matriks atas S belum dilakukan.

Pada pembahasan aljabar linier, dekomposisi rank dari matriks A berordo $m \times n$ dan rank r berbentuk $A = CF$ dengan C berordo $m \times r$ dan F berordo $r \times n$ [9]. Hasil dekomposisi rank ini dapat digunakan untuk membentuk invers Moore-Penrose dari suatu matriks [8, 3]. Pada pembahasan sistem persamaan linear, invers Moore-Penrose memiliki peranan yang cukup penting pada saat menentukan pendekatan solusi sistem persamaan linier dengan matriks koefisiennya berukuran sembarang.

Pada artikel ini dibahas mengenai eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Apabila diperoleh hasil dekomposisi rank ini, maka potensi pengembangan dapat dilakukan pada konstruksi invers Moore-Penrose dari matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Lebih lanjut, potensi pengembangan juga dapat dilakukan pada masalah solusi sistem kesetimbangan linier.

2. Metodologi

Penelitian ini merupakan penelitian literatur yang sifatnya mengkaji dan mengembangkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, yakni rank minor dari suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri [5] dan karakterisasi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan kebebasan linier [15]. Dengan demikian, pembahasan rank matriks atas aljabar max-plus tersimetri dapat ditentukan seperti pada aljabar linier. Selain itu, juga terdapat korespendensi dari aljabar max-plus tersimetri dengan aljabar linier [6], sehingga memungkinkan pembahasan dekomposisi rank dilakukan pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Melakukan studi pustaka (*literature review*) mengenai aljabar max-plus tersimetri dan dekomposisi rank pada aljabar linier.
2. Mendefinisikan dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri menggunakan relasi setimbang pada [2].
3. Menunjukkan eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dengan memanfaatkan korespondensi aljabar max-plus tersimetri dan aljabar linier pada [6]
4. Menunjukkan bentuk dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri tidak tunggal.

3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini merupakan pembahasan utama pada penelitian ini. Pada bagian ini disajikan pembahasan mengenai eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri dan ketidaktunggalan hasil dekomposisi rank tersebut. Pada awal pembahasan ini, terlebih dahulu didefinisikan dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Definisi 1. *Diberikan matriks $A \in S^{m\times n}$ dengan rank minor r. Dekomposisi rank dari matriks A adalah faktorisasi A dalam bentuk $A \nabla C \otimes F$ dengan $C \in S^{m\times r}$, $F \in S^{r\times n}$, rank minor dari C dan F masing-masing adalah r.*

Matriks C dan F pada Definisi 1 masing-masing merupakan matriks rank kolom penuh dan matriks rank baris penuh. Dengan kata lain, rank minor dari matriks C dan F masing-masing adalah r. Diberikan matriks $A = [1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ]$ dengan rank minor 2. Bentuk faktorisasi $A \nabla C \otimes F$ dengan

$$C = [1\ 2\ \ominus 2\ 0\ ], F = [0\ E\ \ominus (-3)\ E\ 0\ \ominus (-1)\ ]$$

adalah dekomposisi rank dari matriks A. Diperhatikan bahwa rank minor dari C dan F masing-masing adalah 2. Bentuk faktorisasi $A \nabla C \otimes F$ dengan

$$C = [1^{\bullet}\ 2^{\bullet}\ \ominus 2^{\bullet}\ 0^{\bullet}\ ], F = [0^{\bullet}\ E\ \ominus (-3)^{\bullet}\ E\ 0^{\bullet}\ \ominus (-1)^{\bullet}\ ]$$

bukan merupakan dekomposisi rank dari A, karena rank minor dari C dan F tidak sama dengan 2.

Teorema berikut menjelaskan eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Teorema 1. *Jika $A \in S^{m\times n}$ dengan rank minor r, maka terdapat matriks $C \in (S^{\vee})^{m\times r}$ dan $F \in (S^{\vee})^{r\times n}$ sedemikian hingga $A\ \nabla\ C \otimes F$*

Bukti. Pada pembuktian ini hanya akan dibuktikan untuk matriks bertanda. Apabila $A \in S^{m\times n}$ memiliki entri yang tidak bertanda, maka didefinisikan matriks $\hat{A} \in (S^{\vee})^{m\times n}$ sedemikian hingga

$$\hat{a}_{ij} = \{a_{ij}\ ,\quad a_{ij}\ bertanda\ \ |a_{ij}|_{\oplus}\ , a_{ij}\ lainnya$$

untuk setiap i, j. Untuk setiap $a, b \in S$, apabila $a\nabla b$ maka juga berlaku $a^{\bullet}\nabla b$, sehingga untuk menunjukkan $A\ \nabla\ C \otimes F$ maka cukup ditunjukkan $\hat{A}\ \nabla\ C \otimes F$.

Dikonstruksikan bentuk $\tilde{A}(s) = F(A, N, \cdot)$ dengan $N \in R_0^{m\times n}$, $n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j. Dengan demikian diperoleh entri-entri $\tilde{a}_{ij}(s) = \gamma_{ij}e^{c_{ij}s}$ dengan $s \in R_0^{+}$, $\gamma_{ij} \in \{-1,1\}$ dan $c_{ij} = |c_{ij}|_{\oplus} \in R_{max}$ untuk setiap i, j. Berdasarkan [6], bentuk $\tilde{a}_{ij}(s) = \gamma_{ij}e^{c_{ij}s}$ merupakan elemen pada himpunan S_e , sehingga matriks $\tilde{A}(s)$ merupakan matriks dengan entri-entrinya pada S_e. Lebih lanjut, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bisa dilakukan pada S_e. Dengan demikian operasi baris elementer pada matriks $\tilde{A}(s)$ juga bisa dilakukan. Langkah awal adalah melakukan operasi baris elementer pada $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk eselon baris tereduksi.

Misal $\tilde{P}(s) \in {S_e}^{n\times n}$ adalah matriks permutasi sedemikian hingga $\tilde{A}(s)\tilde{P}(s)$ dapat dipartisi dalam bentuk $\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = \left[\tilde{C}(s)\ \tilde{D}(s)\ \right]$ dengan $\tilde{C}(s)$ merupakan matriks yang kolomnya merupakan r buah kolom pivot dari $\tilde{A}(s)$. Selanjutnya kolom-kolom dari matriks $\tilde{D}(s)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\tilde{d}_i(s) = \tilde{k}_1(s)\tilde{c}_1(s) + \tilde{k}_2(s)\tilde{c}_2(s) + \cdots + \tilde{k}_r(s)\tilde{c}_r(s)$$

untuk $i = 1,2, \dots, n - r$. Dari sini diperoleh bentuk $\tilde{D}(s) = \tilde{C}(s)\tilde{G}(s)$ dengan $\tilde{G}(s)$ merupakan matriks yang bersesuaian dengan koefisien-koefisien pada persamaan $\tilde{d}_i(s)$. Selanjutnya juga diperoleh bentuk

$$\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = \left[\tilde{C}(s)\ \tilde{D}(s)\ \right] = \left[\tilde{C}(s)\ \tilde{C}(s)\tilde{G}(s)\ \right] = \tilde{C}(s)\left[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ \right].$$

Dengan menggunakan matriks elementer $\tilde{E}(s)$, dilakukan proses merubah $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk matriks eselon tereduksi $\tilde{B}(s)$. Diperoleh

$$\tilde{E}(s)\left(\tilde{A}(s)\tilde{P}(s)\right) = \tilde{B}(s)\tilde{P}(s) = \tilde{E}(s)\left[\tilde{C}(s)\ \tilde{D}(s)\ \right] = \tilde{E}(s)\tilde{C}(s)\left[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ \right]$$

dengan $\tilde{E}(s)\tilde{C}(s)$ berbentuk $[\tilde{I}_r(s)\ 0\ ]$. Dengan demikian,

$$\tilde{B}(s)\tilde{P}(s) = \left[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ 0\ 0\ \right]$$

dengan $[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ ]$ tak lain adalah baris yang tak nol dari bentuk eselon baris tereduksi. Dengan memisalkan $[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ ] = \tilde{F}(s)\tilde{P}(s)$ maka diperoleh bentuk

$$\tilde{A}(s)\tilde{P}(s) = \tilde{C}(s)\left[\tilde{I}_r(s)\ \tilde{G}(s)\ \right] = \tilde{C}(s)\tilde{F}(s)\tilde{P}(s).$$

Karena $\tilde{P}(s)$ adalah matriks permutasi maka diperoleh bentuk ekuivalen asimtotis $\tilde{A}(s) \sim \tilde{C}(s)\tilde{F}(s)$ untuk $s \to \infty$, yang merupakan bentuk dekomposisi rank dari matriks $\tilde{A}(s)$. Dengan menerapkan fungsi reverse R pada [6], dan misalkan

$$A \stackrel{\text{def}}{=} R\left(\tilde{A}(s)\right), C \stackrel{\text{def}}{=} R\left(\tilde{C}(s)\right), F \stackrel{\text{def}}{=} R\left(\tilde{F}(s)\right)$$

maka diperoleh $A\ \nabla\ C\ \otimes F$, dengan $C \in (S^{\vee})^{m\times r}$ dan $F \in (S^{\vee})^{r\times n}$.■

Contoh berikut menjelaskan eksistensi dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Contoh 1. Diberikan matriks $A = [1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ]$ dengan rank minor 2. Matriks bertanda dari matriks A adalah $\hat{A} = [1\ 2\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ]$. Untuk menentukan dekomposisi rank dari A maka cukup dilakukan dengan menentukan dekomposisi rank dari matriks $\hat{A}$. Konstruksikan bentuk $\tilde{A}(s) = F(A, N, \cdot)$ dengan $N \in R_0^{m\times n}$, $n_{ij} = 1$ untuk setiap i, j. Dengan demikian diperoleh

$$\tilde{A}(s) = [e^s\ e^{2s}\ -e^s\ -e^{2s}\ 1\ 0\ ]$$

untuk $s \in R_0^+$. Proses operasi baris elementer diterapkan pada $\tilde{A}(s)$ sampai diperoleh bentuk eselon baris tereduksi, yakni

$$\left[1\ 0\ \left(\frac{-1}{e^{3s}+1}\right)\ 0\ 1\ \left(\frac{-e^{2s}}{e^{3s}+1}\right)\right]$$

untuk $s \in R_0^+$. Dengan demikian diperoleh

$$\tilde{C}(s) = [e^s\ e^{2s}\ -e^{2s}\ 1\ ]\ , \tilde{F}(s) = \left[1\ 0\ \left(\frac{-1}{e^{3s}+1}\right)\ 0\ 1\ \left(\frac{-e^{2s}}{e^{3s}+1}\right)\right] \sim [1\ 0\ -e^{-3s}\ 0\ 1\ -e^{-s}\ ]$$

dengan

$$\tilde{C}(s)\tilde{F}(s) = \left[e^s\ e^{2s}\ \frac{-e^s - e^{4s}}{e^{3s}+1}\ -e^{2s}\ 1\ 0\right] \sim [e^s\ e^{2s}\ -e^s\ -e^{2s}\ 1\ 0\ ] = \tilde{A}(s)$$

untuk $s \to \infty$. Dengan menerapkan fungsi reverse diperoleh

$$C = R\left(\tilde{C}(s)\right) = [1\ 2\ \ominus 2\ 0\ ], F = R\left(\tilde{F}(s)\right) = [0\ E\ \ominus(-3)\ E\ 0\ \ominus(-1)\ ]$$

dengan $C \otimes F = [1\ 2\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ (-1)^{\bullet}\ ] \nabla [1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ] = A$. Rank minor dari matriks C dan F masing-masing adalah 2. Jadi matriks C dan F masing-masing merupakan matriks rank kolom penuh dan matriks rank baris penuh. Dengan demikian bentuk faktorisasi $A \nabla C \otimes F$ merupakan dekomposisi rank dari matriks A. ■

Pada Teorema 1 diperoleh bahwa matriks C dan F masing-masing adalah matriks bertanda. Apabila terdapat matriks C' dengan $C' \nabla C$ dan C' adalah matriks rank kolom penuh, dan matriks F' dengan $F' \nabla F$ dan F' adalah matriks rank baris penuh, maka berturut-turut dapat digunakan untuk mensubstitusi lemah matriks C dan F pada bentuk dekomposisi matriks A. Dengan demikian, dari Teorema 1 diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 1. *Misalkan $A \nabla C \otimes F$ adalah bentuk dekomposisi rank dari matriks A (pada* Teorema 1). *Apabila terdapat matriks C' dan F' dengan rank minor r, $C' \nabla C$ dan $F' \nabla F$ maka bentuk faktorisasi $A \nabla C' \otimes F'$ juga merupakan dekomposisi rank dari A.*

Bukti. Misal matriks C' dan F' dengan rank minor r, $C' \nabla C$ dan $F' \nabla F$. Karena $C' \nabla C$ dan $F' \nabla F$ maka berlaku $c'_{ij} \nabla c_{ij}$ dan $f'_{ij} \nabla f_{ij}$. Karena C dan F masing-masing merupakan matriks bertanda maka setiap entrinya merupakan elemen bertanda. Berdasarkan sifat substitusi lemah pada S, setiap entri c_{ij} dapat disubstitusi lemah dengan c'_{ij} dan setiap entri f_{ij} dapat disubstitusi lemah dengan f'_{ij}. Dengan demikian, bentuk faktorisasi $A \nabla C' \otimes F'$ juga merupakan dekomposisi rank dari A. ■

Contoh berikut menjelaskan ketidaktunggalan bentuk dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Contoh 2. Diperhatikan kembali dekomposisi rank pada Contoh 1. Apabila diambil matriks $C' \nabla C$ dan $F' \nabla F$ dengan

$$C' = [1^{\bullet}\ 2\ \ominus 2\ 0\ ],\ F' = [0\ E\ \ominus (-3)\ E\ 0^{\bullet}\ \ominus (-1)\ ]$$

maka diperoleh

$$C' \otimes F' = [1^{\bullet}\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0^{\bullet}\ (-1)^{\bullet}\ ] \nabla [1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ] = A.$$

Diperhatikan bahwa rank minor C' dan F' masing-masing adalah 2. Dengan demikian, bentuk $A \nabla C' \otimes F'$ juga merupakan dekomposisi rank dari A. ■

Akibat 2. *Jika $A \in S^{r \times r}$ dengan rank minor r, maka terdapat $C = \hat{A}$ dan $F = I_r$ sedemikian hingga $A \nabla C \otimes F$ adalah bentuk dekomposisi rank dari A.*

Bukti. Karena A adalah matriks berukuran $r \times r$ dengan rank minor r, maka berdasarkan Teorema 1, terdapat matriks $C \in (S^{\vee})^{r \times r}$ dan $F \in (S^{\vee})^{r \times r}$ sedemikian hingga $A \nabla C \otimes F$. Karena rank minor A adalah r, maka rank minor dari matriks $\hat{A}$ adalah r. Selanjutnya, rank minor dari I_r adalah r. Dengan mengambil matriks $C = \hat{A}$ dan $F = I_r$ maka diperoleh $A \nabla \hat{A} = \hat{A} \otimes I_r = C \otimes F$. Karena $\hat{A}$ adalah matriks bertanda dan $A \nabla \hat{A}$, maka $\hat{A}$

dapat disubstitusi lemah dengan A, sehingga diperoleh kesetimbangan $A \nabla \hat{A} \otimes I_r$. Dengan demikian terdapat matriks $C = \hat{A}$ dan $F = I_r$ sedemikian hingga $A \nabla C \otimes F$ adalah bentuk dekomposisi rank dari A.■

Teorema berikut menjelaskan bentuk dekomposisi rank dari suatu matriks yang diperoleh dengan memanfaatkan invers setimbang pada [16] dari matriks persegi yang determinannya bukan merupakan elemen setimbang.

Teorema 2. *Diberikan matriks $A \in S^{m\times n}$ dengan rank minor r dan matriks $R \in S^{r\times r}$ dengan $det\, det\,(R) \notin S^{\bullet}$. Jika $A \nabla C \otimes F$ adalah dekomposisi rank dari A maka*

$$A \nabla C \otimes R \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F \text{ dan } A \nabla C \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \otimes R \otimes F$$

masing-masing juga merupakan dekomposisi rank dari A.

Bukti. Karena R adalah matriks berukuran $r \times r$ dengan $det\, det\,(R)$ bukan elemen setimbang, maka menurut [13], terdapat matriks bertanda $R_{\nabla}{}^{-1}$ berukuran $r \times r$ sedemikian hingga $R \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \nabla I_r$ dan $R_{\nabla}{}^{-1} \otimes R \nabla I_r$. Diperhatikan bahwa kesetimbangan $A \nabla C \otimes F$ dapat disajikan dalam bentuk $A \nabla C \otimes I_r \otimes F$. Karena I_r adalah matriks bertanda, maka dengan melakukan substitusi lemah $R \otimes R_{\nabla}{}^{-1}$ pada I_r diperoleh

$$A \nabla C \otimes R \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F.$$

Matriks $C \otimes R$ adalah matriks berordo $m \times r$ dan $R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F$ adalah matriks berukuran $r \times n$. Dengan demikian, bentuk faktorisasi $A \nabla C \otimes R \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F$ juga merupakan dekomposisi rank dari matriks A. Dengan melakukan langkah yang sama, diperoleh $A \nabla C \otimes R_{\nabla}{}^{-1} \otimes R \otimes F$ juga merupakan dekomposisi rank dari matriks A. ■

Teorema 2 menjelaskan bahwa bentuk dekomposisi rank dari suatu matriks tidak tunggal. Ketidaktunggalan tersebut diperoleh dengan memanfaatkan invers setimbang dari suatu matriks persegi yang determinannya bukan elemen setimbang. Contoh berikut menjelaskan ketidaktunggalan bentuk dekomposisi rank dari suatu matriks.

Contoh 3. Diperhatikan dekomposisi rank pada Contoh 1. Untuk matriks $R = [1\ 1\ 0\ 1\ ]$ dengan $det\, det\,(R) = 2$, bentuk invers setimbang dari R adalah

$$R_{\nabla}{}^{-1} = [-1\ \ominus (-1)\ \ominus (-2)\ -1\ ]$$

dengan

$$R \otimes R_{\nabla}{}^{-1} = [0\ 0^{\bullet}\ (-1)^{\bullet}\ 0\ ] \nabla [0\ E\ E\ 0\ ]$$
$$R_{\nabla}{}^{-1} \otimes R = [0\ 0^{\bullet}\ (-1)^{\bullet}\ 0\ ] \nabla [0\ E\ E\ 0\ ].$$

Selanjutnya diperoleh

$$(C \otimes R) \otimes \left(R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F\right) = [1^{\bullet}\ 2\ \ominus 1\ \ominus 2\ 2^{\bullet}\ 1^{\bullet}\ ]\nabla[1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ] = A$$
$$\left(C \otimes R_{\nabla}{}^{-1}\right) \otimes (R \otimes F) = [1^{\bullet}\ 2\ \ominus 1\ \ominus 2\ 2^{\bullet}\ 1^{\bullet}\ ]\nabla[1\ 2^{\bullet}\ \ominus 1\ \ominus 2\ 0\ E\ ] = A.$$

Jadi bentuk $A \nabla (C \otimes R) \otimes \left(R_{\nabla}{}^{-1} \otimes F\right)$ dan $A \nabla \left(C \otimes R_{\nabla}{}^{-1}\right) \otimes (R \otimes F)$ juga merupakan bentuk dekomposisi rank dari matriks A. ■

4. Kesimpulan

Untuk matriks A adalah matriks atas aljabar max-plus tersimetri, dekomposisi rank dari A berbentuk $A \nabla C \otimes F$ dengan C dan F masing-masing adalah matriks rank kolom penuh dan matriks rank baris penuh. Eksistensi dekomposisi rank tersebut diperoleh dengan memanfaatkan korespondensi antara aljabar max-plus tersimetri dan aljabar linier. Selanjutnya, bentuk dekomposisi rank pada matriks atas aljabar max-plus tersimetri bersifat tidak tunggal. Ketidaktunggalan ini diperoleh dengan memanfaatkan invers setimbang dari suatu matriks persegi yang determinannya bukan elemen setimbang. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada penggunaan dekomposisi rank untuk membentuk invers Moore-Penrose dari suatu matriks atas aljabar max-plus tersimetri.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih pada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Jenderal Soedirman atas pendanaan penelitian melalui skim penelitian Riset Peningkatan Kompetensi Tahun 2022, dengan kontrak Nomor: T/861/UN23.18/PT.01.03/2022.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., & Rorres, C., (2014), *Elementary Linear Algebra* (11th ed.), Wiley, Canada.

[2] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J.P., (2001), *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems* (2nd ed.), Wiley.

[3] Bonilla, J. L., Vazquez, R. L., Beltran, S. V., (2018), Full-Rank Factorization and Moore-Penrose's Inverse, *MathLab Journal*, **1(2)**, 227–230.

[4] Carrel, J.B., (2005), *Fundamental of Linear Algebra*, University of British Columbia, Canada.

[5] De Schutter, B., (1996), Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems, *Dissertation*, Department of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven.

[6] De Schutter, B., & De Moor, B. (2002), The QR Decomposition and the Singular Value Decomposition in the Symmetrized Max-Plus Algebra Revisited, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **44(3)**, 417–454.

[7] Golub, G. H. & Van Loan, C. F., (2013), *Matrix Computations* (4th ed.), The John Hopkins University Press.

[8] Hartwig, R.E., (1976), Rank Factorization and Moore-Penrose Inversion, *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, **26(1)**, 49-63.

[9] Piziak, R. & Odell, P.L., (1999), Full Rank Factorization of Matrices, *Mathematics Magazine*, **72(3)**, 193-201.

[10] Suroto, Suparwanto, A., Palupi, D. J. E., (2018), The LU Decomposition in the Symmetrized Max-Plus Algebra, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, **108(2)**, 253–272.

[11] Suroto, (2021), Eigenvalue Decomposition of a Symmetric Matrix over the Symmetrized Max-Plus Algebra, *Desimal*, **4(3)**, 349–356.

[12] Suroto, (2021), Invers Moore-Penrose pada Matriks atas Aljabar Max-Plus Tersimetri, *Jurnal Teorema*, **6(2)**, 198–209.

[13] Suroto, Palupi, D.J.E., Suparwanto, A., (2021), Solution of Linear Balance Systems in the Symmetrized Max-Plus Algebra, *Science & Technology Asia* (*Under Review*)

[14] Suroto, Istikaanah, N., Renny., (2022), The Existence of the Moore-Penrose Inverse in Symmetrized Max-Plus Algebraic Matrix. *Proceedings of Soedirman International Conference on Mathematics and Applied Sciences (SICOMAS 2021)*, 59-64.

[15] Suroto, Palupi, D. J. E., Suparwanto, A., (2022), Characterization of Rank of A Matrix over the Symmetrized Max-Plus Algebra, *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (Accepted)*.

[16] Suroto, Palupi, D. J. E., Suparwanto, A., (2022), The Cholesky Decomposition of Matrices over the Symmetrized Max-Plus Algebra. *IAENG International Journal of Applied Mathematics (Accepted)*.