APROKSIMASI PADA GRUP

(*Approximation in a Group*)

Dian Winda Setyawati[1*], Subiono[2]

[1,2] Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
e-mail: dian_ws_math@matematika.its.ac.id, subiono2008@matematika.its.ac.id
*) Penulis Korespondensi

Abstract. A non-empty set G with binary operations on a set G is called a group if the set G satisfies the associative property, the existence of an identity, and the existence of an inverse for each element of the set G. A normal subgroup N in group G can partition group G into equivalence classes so that a lower approximation and an upper approximation can be formed from the non-empty set $A \subseteq G$ corresponding to the normal subgroup N. Let A be a non-empty subset of G, the lower approximation of A corresponding to the normal subgroup N is defined as the set of elements in G where the equivalence class of the element is a subset of A while the upper approximation of A corresponding to the normal subgroup N is defined as the set of elements in G where the equivalence class of the element intersects the set A. In this paper, we will give more general properties regarding the relationship between the upper approximation and the lower approximation by involving two different normal subgroups of group G and two different sets that are subsets of group G. Furthermore, we will show the corollary of these properties if we use one normal subgroup and one subset of group G.

Keywords: equivalence classes, lower approximation, upper approximation

1. Pendahuluan

Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner pada himpunan G disebut grup jika himpunan G memenuhi sifat assosiatif, eksistensi identitas dan eksistensi invers untuk setiap elemen dari himpunan G. Suatu subgrup normal N pada grup G dapat mempartisi grup G membentuk kelas-kelas ekivalensi sehingga dapat dibentuk aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong $A \subseteq G$ yang berkaitan dengan subgrup normal N. Penelitian terkait dengan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong berkembang dengan pesat [1 – 7]. Relasi ekivalensi pada grup adalah subgrup normal [1, 3, 4 – 6], sedangkan relasi ekivalensi pada ring adalah ideal [2, 7] untuk membentuk aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong.

Pada paper ini akan memberikan sifat yang lebih umum dari sifat yang tercantum pada paper [5] terkait aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan tak kosong pada grup yaitu dengan menggunakan 2 subgrup normal yang berbeda dan dua himpunan yang berbeda di grup G. Selanjutnya akan diberikan akibat dari sifat tersebut seperti sifat yang terdapat pada paper [5]. Sifat yang diperoleh ini berguna untuk memahami sifat-sifat yang melibatkan beberapa relasi ekivalensi seperti pada paper [1].

2. Metodologi

Dalam melakukan penelitian digunakan metode kajian pustaka. Kajian pustaka pada beberapa paper dilakukan untuk mempelajari sifat-sifat aproksimasi pada grup. Selanjutnya, pada penelitian ini akan dibentuk proposisi baru. Berikut ini akan diberikan beberapa definisi dan proposisi yang dijadikan sebagai rujukan dalam penelitian ini.

Definisi 1 [2]

Pasangan (U, θ) dimana U himpunan tak kosong dan θ relasi ekivalensi pada U disebut ruang aproksimasi.

Definisi 2 [2]

Diberikan G grup dan N subgrup normal dari G. Maka akan terbentuk ruang Aproksimasi (G, N). Pada ruang Aproksimasi (G, N), $A \subseteq G$, himpunan

$$\underline{Apr_N}(A) = \{\, x * N \subseteq A\}$$

dan

$$\underline{Apr_N}\,(A) = \{\, x * N \cap A \;\neq \emptyset\}$$

disebut aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan A yang bersesuaian dengan subgrup normal N dari grup G.

Contoh 1

Diberikan grup Z_{15} dan $N = \langle 5 \rangle = \{0, 5, 10\}$ subgrup normal dari grup Z_{15} maka terbentuk kelas - kelas ekivalensi sebagai berikut: $N = \langle 5 \rangle = \{0, 5, 10\}, 1 + N = \{1, 6, 11\}, 2 + N = \{2,7,12\}, 3 + N = \{3,8,13\}$ dan $4 + N = \{4,9,14\}$.

a. Misal $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 11, 12\}$ maka $\underline{Apr_N}(A) = \{1, 6, 11\} \cup \{2,7,12\} =$ {1, 2, 6, 7, 11, 12} dan $\underline{Apr_N}\,(A) = \{1, 6, 11\} \cup \{2, 7,12\} \cup \{3, 8, 13\} \cup \{4, 9, 14\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,11, 12, 13, 14\} = Z_{15} - \{0, 5, 10\}$.

b. Misal $B = \{1, 6, 7, 8, 10, 11\}$ maka $\underline{Apr_N}(B) = \{1, 6, 11\}$ dan $\underline{Apr_N}\,(B) = \{1, 6, 11\} \cup \{0, 5, 10\} \cup \{2,7,12\} \cup \{3,8, 13\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13\} = Z_{15} - \{4,9, 14\}$.

Berikut akan diberikan sifat-sifat yang berlaku pada aproksimasi bawah/atas dari suatu himpunan pada grup.

Proposisi 1 [2]

Untuk setiap ruang aproksimasi (G, N) dan setiap himpunan bagian $A, B \subseteq G$ berlaku

1. If $A \subseteq B$, then $\underline{Apr_N}(A) \subseteq \underline{Apr_N}(B)$ and $\underline{Apr_N}\,(A) \subseteq \underline{Apr_N}\,(B)$,
2. $\underline{Apr_N}(A \cap B) = \underline{Apr_N}(A) \cap \underline{Apr_N}(B)$,
3. $\underline{Apr_N}\,(A \cap B) \subseteq \underline{Apr_N}\,(A) \cap \underline{Apr_N}\,(A)$,
4. $\underline{Apr_N}(A \cup B) \supseteq \underline{Apr_N}(A) \cup \underline{Apr_N}(B)$,
5. $\underline{Apr_N}\,(A \cup B) = \underline{Apr_N}\,(A) \cup \underline{Apr_N}\,(B)$,

Proposisi 2 [2] Diberikan N, H adalah dua subgrup normal dari grup G sedemikian hingga $N \subseteq H$ dan A himpunan bagian dari G. Maka

1. $\underline{Apr_H}(A) \subseteq \underline{Apr_N}(A)$,
2. $\underline{Apr_N}\,(A) \subseteq \underline{Apr_H}\,(A)$.

Proposisi 3 [5] Diberikan N subgrup normal dari grup G dan A subgrup dari G.

1. Jika $N \nsubseteq A$ maka $\underline{Apr_N}(A) = \emptyset$,
2. Jika $N \subseteq A$ maka $\underline{Apr_N}(A) = A$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bab pembahasan ini akan memberikan sifat yang lebih umum dari sifat yang tercantum pada paper [5] yaitu dengan menggunakan 2 subgrup normal yang berbeda dan dua himpunan yang berbeda di grup G. Selanjutnya akan diberikan akibat dari sifat tersebut seperti sifat yang terdapat pada paper [5]. Sifat yang diperoleh ini berguna untuk memahami sifat-sifat yang melibatkan beberapa relasi ekivalensi seperti pada paper [1].

Proposisi 4

Diberikan H dan N masing – masing subgrup normal dari grup G. Jika $A, B \subseteq G$ dan $A, B \neq \emptyset$ maka $\underline{Apr_H}(A)\, \underline{Apr_N}(B) = \underline{Apr_{HN}}(AB)$.

Bukti:

Ambil sebarang $z \in \underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_N(B)$ maka terdapat $x \in \underline{Apr}_H(A)$ dan $y \in \underline{Apr}_N(B)$ sehingga $z = xy$ akibatnya $xH \cap A \neq \emptyset$ dan $yN \cap B \neq \emptyset$. Karena $xH \cap A \neq \emptyset$ dan $yN \cap B \neq \emptyset$ maka terdapat $a \in xH \cap A$ dan $b \in yN \cap B$ akibatnya $ab \in xHyN = xyHN$ dan $ab \in AB$ sehingga $xyHN \cap AB \neq \emptyset$. Dengan kata lain $z = xy \in \underline{Apr}_{HN}(AB)$. Sebaliknya, ambil sebarang $u \in \underline{Apr}_{HN}(AB)$ maka $uHN \cap AB \neq \emptyset$ akibatnya terdapat $t \in uHN \cap AB$ sehingga $u \in tHN = abHN = aHbN$ untuk suatu $a \in A$ dan $b \in B$. Karena $u \in aHbN$ maka terdapat $k \in aH$ dan $l \in bN$ sehingga $u = kl$ akibatnya $a \in kH$ dan $b \in lN$. Karena $a \in kH,\ b \in lN, a \in A$ dan $b \in B$ maka $kH \cap A \neq \emptyset$ dan $lN \cap B \neq \emptyset$ sehingga $k \in \underline{Apr}_H(A)$ dan $l \in \underline{Apr}_N(B)$ akibatnya $u = kl \in \underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_N(B)$.

Dari proposisi 4 diperoleh 2 akibat berikut.

Akibat 5

Diberikan H subgrup normal dari grup G. Jika $A, B \subseteq G$ dan $A, B \neq \emptyset$ maka $\underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_H(B) = \underline{Apr}_H(AB)$.

Akibat 6

Diberikan H dan N masing – masing subgrup normal dari grup G. Jika A subgrup dari grup G dan $A \neq \emptyset$ maka $\underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_N(A) = \underline{Apr}_{HN}(A)$.

Sifat pada Akibat 5 dan Akibat 6 sama dengan sifat pada Theorema 2.3 dan Proposisi 3.2 pada paper [5]

Proposisi 7

Diberikan H dan N masing – masing subgrup normal dari grup G. Jika $A, B \subseteq G$ dan $A, B \neq \emptyset$ maka $\underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_N(B) \subseteq \underline{Apr}_{HN}(AB)$.

Bukti:

Ambil sebarang $z \in \underline{Apr}_H(A)\ \underline{Apr}_N(B)$ maka terdapat $x \in \underline{Apr}_H(A)$ dan $y \in \underline{Apr}_N(B)$ sehingga $z = xy$. Karena $x \in \underline{Apr}_H(A)$ dan $y \in \underline{Apr}_N(B)$ maka $xH \subseteq A$ dan $yN \subseteq B$ akibatnya $xyHN = xHyN \subseteq AB$ sehingga $z = xy \in \underline{Apr}_{HN}(AB)$.

Dari proposisi 7 diperoleh akibat berikut

Akibat 8

Diberikan H subgrup normal dari grup G. Jika $A, B \subseteq G$ dan $A, B \neq \emptyset$ maka

$\underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_H}(B) \subseteq \underline{Apr_H}(AB)$.

Sifat pada Akibat 8 sama dengan sifat pada Teorema 2.3 pada paper [5]. Pada proposisi 7 akan menjadi sama dengan apabila A, B masing-masing subgrup dari grup G seperti pada proposisi berikut ini.

Proposisi 9

Diberikan H dan N masing-masing subgrup normal dari grup G. Jika A, B masing-masing subgrup dari grup G maka $\underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(B) = \underline{Apr_{HN}}(AB)$.

Bukti:

Dari Proposisi 2 diperoleh $\underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(B) \subseteq \underline{Apr_{HN}}(AB)$. Tinggal ditunjukkan $\underline{Apr_{HN}}(AB) \subseteq \underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(B)$. Menurut proposisi 3, maka ada 2 kemungkinan yaitu

(1) Jika $HN \nsubseteq AB$ maka $\underline{Apr_{HN}}(AB) = \emptyset$ akibatnya berlaku $\underline{Apr_{HN}}(AB) \subseteq \underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(B)$.

(2) Jika $HN \subseteq AB$ maka $\underline{Apr_{HN}}(AB) = AB$. Karena $N \subseteq HN$ dan $H \subseteq HN$ maka menurut proposisi 2 diperoleh $\underline{Apr_{HN}}(AB) \subseteq \underline{Apr_H}(A) = A$ dan $\underline{Apr_{HN}}(AB) \subseteq \underline{Apr_N}(B) = B$ akibatnya $\underline{Apr_{HN}}(AB) \subseteq \underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(B)$.

Dari proposisi 9 diperoleh 2 akibat berikut:

Akibat 10

Diberikan H dan N masing-masing subgrup normal dari grup G. Jika A subgrup dari grup G maka $\underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_N}(A) = \underline{Apr_{HN}}(A)$.

Akibat 11

Diberikan H subgrup normal dari grup G. Jika A, B masing-masing subgrup dari grup G maka $\underline{Apr_H}(A)\ \underline{Apr_H}(B) = \underline{Apr_H}(AB)$.

Sifat pada Akibat 10 sama dengan sifat pada Proposisi 3.6 pada paper [5].

4. KESIMPULAN

Pada pembahasan diperoleh 3 proposisi (proposisi 4, proposisi 7, proposisi 9) memberikan sifat yang lebih umum dari sifat yang tercantum pada paper [5] yaitu dengan menggunakan 2 subgrup normal yang berbeda dan dua himpunan yang berbeda di grup G. Selanjutnya menunjukkan akibat dari sifat tersebut apabila menggunakan 1 subgrup normal dan 1 himpunan bagian dari grup G (akibat 5, akibat 6, akibat 8, akibat 10, akibat 11).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bağırmaz, N., (2019), Near approximations in groups, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, **30(4)**, 285-297, https://doi.org/10.1007/s00200-018-0373-z.

[2] Davvaz, B., (2004), Roughness in rings, *Information Sciences*, **164(1 – 4)**, 147-163, https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.10.001.

[3] Glebsky, L., (2017), Approximations of groups, characterizations of sofic groups, and equations over groups, *Journal of Algebra*, **477**, 147-162, ISSN 0021-8693, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.12.012

[4] Pavlyuk, I.I., Sudoplatov, S.V., (2020), Approximations for theories of abelian groups, *Mathematics and Statistics*, ***8*(2)**, 220-224, https://doi.org/10.13189/ms.2020.080218

[5] Wang, C., Chen, D., (2010), A short note on some properties of rough groups, *Computers & mathematics with applications*, **59(1)**, 431-436, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.024.

[6] Wang, C., Chen, D., Hu, Q., (2013), On rough approximations of groups, *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **4(5)**, 445-449, https://doi.org/10.1007/s13042-012-0108-6.

[7] Yamak, S., Kazancı, O., Davvaz, B., (2010), Generalized lower and upper approximations in a ring, *Information Sciences*, **180(9)**, 1759-1768, https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.12.026.