TEOREMA TITIK TETAP UNTUK DUA PEMETAAN DI RUANG METRIK CONE RECTANGULAR

(*Fixed Point Theorem for Two self-Mappings in Rectangular Cone Metric Spaces*)

Sunarsini[1*], Sadjidon[2], Sie Evan Setiawan[3]

[1,2,3]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data,
Institit Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
e-mail: sunarsini@matematika.its.ac.id, djidon@matematika.its.ac.id,
evansetiawan3826@gmail.com
[*]Penulis Korespondensi

Abstract. Azam introduced the concept of a rectangular cone metric space in 2009. By adding the rectangular property to the cone metric function, we get the definition of a rectangular cone metric space. The purpose of this paper is to discuss the development of a fixed point Banach contraction mapping in a rectangular cone metric space. In particular, we prove the Banach Fixed Point Theorem for two self-mappings on the space with an alternative proof. Furthermore, we provide related examples to make it easier to understand the theorem.

Keywords: Fixed point Banach, rectangular cone metric space, two-self mappings

1. Pendahuluan

Konsep ruang metrik pertama kali ditemukan dan diperkenalkan oleh Fréchet [4]. Salah satu topik yang menarik untuk dibahas dalam ruang metrik adalah teorema titik tetap, dikenal sebagai prinsip kontraksi Banach. Teorema titik tetap pertama kali disebutkan oleh Stefan Banach pada tahun 1922 dan dibuktikan oleh Renato Caccioppoli pada tahun 1931. Teorema titik tetap Banach menjamin adanya titik tetap tunggal pada pemetaan tertentu dalam ruang metrik, serta menyediakan metode untuk menemukan titik tetap tersebut.

Seiring berjalannya waktu, konsep ruang metrik telah mengalami pengembangan signifikan tidak hanya pada prinsip kontraksi Banach tetapi pada konsep ruangnya. Pada tahun 2000, Branciari [3] memperkenalkan konsep ruang metrik rectangular. Ruang metrik rectangular diperoleh dengan penambahan sifat rectangular, yakni mengganti aksioma pertidaksamaan segitiga dengan pertidaksamaan segiempat. Secara umum, ruang metrik rectangular adalah perluasan dari ruang metrik, sebab setiap ruang metrik adalah ruang metrik rectangular. Pada tahun 2007, Huang [5] memperkenalkan konsep ruang metrik cone. Ruang metrik cone diperoleh dengan mengganti kodomain metrik dengan ruang Banach real. Huang membuktikan beberapa teorema titik tetap pemetaan kontraktif Banach pada ruang metrik cone. Saat ini, konsep ruang metrik cone telah mengalami banyak kajian dan pengembangan oleh para matematikawan. Salah satunya telah dilakukan kajian oleh Sunarsini dkk. [9]. Mereka mengembangkan konsep pemetaan kontraktif selain Banach, yaitu pemetaan kontraktif tipe Reich dan Rhoades di ruang metrik cone. Selanjutnya, Azam dkk. [2] mengembangkan konsep dari Branciari dan Huang dengan memperkenalkan ruang metrik cone rectangular. Ruang metrik cone rectangular didapat dengan menambahkan sifat rectangular ke dalam ruang metrik cone. Selain itu, Azam dkk juga membuktikan teorema titik tetap Banach pada ruang metrik cone rectangular. Perkembangan teorema titik tetap Banach di ruang metrik cone rectangular antara lain dilakukan oleh Rashwan dkk. [7] yaitu dengan menambahkan suatu definisi himpunan pemetaan kontraktif Φ yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Rashwan juga mengembangkan teorema titik tetap Banach dengan menggunakan dua pemetaan sendiri (*two self-mappings*) di ruang metrik cone rectangular. Pada paper ini akan dikonstruksi suatu bukti alternatif dari teorema tersebut.

2. Metodologi

Pada bagian ini akan diuraikan langkah -langkah pengerjaan penelitian. Langkah pertama adalah mengumpulkan jurnal-jurnal yang bersesuaian dengan penelitian sebagai kajian pustaka. Dalam hal ini akan dibahas konsep ruang metrik cone dan prinsip kontraksi Banach di ruang metrik cone.

Definisi 1 [5] *Diberikan E ruang Banach real, θ elemen nol pada E, dan P himpunan bagian dari E. Himpunan P disebut cone jika dan hanya jika*

(C1) *P tertutup, tak kosong, dan $P \neq \{\theta\}$*

(C2) *Untuk setiap $a, b \geq 0$ serta $x, y \in P$, berlaku $ax + by \in P$*

(C3) *Jika $x \in P$ dan $(-x) \in P$, maka $x = \theta$*

Untuk selanjutnya, simbol E, θ, dan P masing-masing merepresentasikan ruang Banach real, elemen nol pada ruang tersebut, dan himpunan cone.

Catatan 1: *Jika diberikan cone $P \subset E$, serta $x, y \in E$. Keterurutan parsial $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$. Didefinisikan $x \prec y$ jika dan hanya jika $x \preccurlyeq y$ namun $x \neq y$. Didefinisikan $x \ll y$ jika dan hanya jika $y - x \in int\ P$, di mana int P ialah himpunan titik interior P. Cone $P \subset E$ dikatakan normal apabila terdapat konstanta $\kappa > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in E$, $\theta \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ maka $\|x\| \leq \kappa\|y\|$. Bilangan positif terkecil κ yang memenuhi ketaksamaan di atas disebut sebagai konstanta normal.*

Definisi 2 [5] *Diberikan X himpunan tak kosong. Apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ pemetaan $d_c: X \times X \to E$ memenuhi*

(MC1) $d_c(x, y) \succcurlyeq \theta$

(MC2) $d_c(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$

(MC3) $d_c(x, y) = d_c(y, x)$

(MC4) $d_c(x, y) \preccurlyeq d_c(x, z) + d_c(y, z)$

maka d_c disebut sebagai metrik cone dan (X, d_c) disebut sebagai ruang metrik cone.

Selanjutnya akan dibahas teorema titik tetap di ruang metrik cone. Berikut disajikan definisi titik tetap serta contoh titik tetap:

Definisi 3 [6] *Diberikan X himpunan tak kosong dengan pemetaan $G : X \to X$. Titik tetap pada pemetaan G ialah setiap $x^* \in X$ yang memenuhi $G(x^*) = x^*$.*

Contoh 1. Diberikan himpunan $X = [-1, 1]$ dan pemetaan $g: X \to X$ dengan definisi $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ untuk setiap $x \in X$, maka $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ merupakan titik tetap pemetaan g. Hal ini dapat dilihat bahwa $g\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Huang [5] membuktikan beberapa teorema titik tetap di ruang metrik cone. Teorema ini hasil pengembangan teorema kontraksi Banach di ruang metrik. Salah satu teorema-teorema tersebut disajikan sebagai berikut:

Teorema 1 *Misalkan (X, d_c) adalah ruang metrik cone lengkap, serta P cone normal dengan konstanta normal κ. Misalkan pemetaan $T: X \to X$ memenuhi syarat kontraktif*

$$d_c(Tx, Ty) \preccurlyeq \alpha d_c(x, y) \text{ untuk setiap } x, y \in X,$$

dengan $\alpha \in [0,1)$ konstan, maka T memiliki titik tetap tunggal dalam X, dan untuk setiap $x \in X$, barisan iteratif $\{T^n x\}$ konvergen ke titik tetap.

Langkah berikutnya adalah menganalisis dan membahas ruang metrik cone rectangular, pembuktian teorema titik tetap untuk dua pemetaan diri (*two self-mappings*) di ruang metrik cone rectangular, serta pengembangan contoh sehingga dapat menghasilkan jawaban dari tujuan penelitian. Semuanya ini akan dibahas pada bagian hasil dan pembahasan.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Ruang Metrik Cone Rectangular

Konsep ruang metrik cone rectangular pertama kali diperkenalkan oleh Azam [2]. Dengan menambahkan sifat rectangular ke dalam definisi ruang metrik cone, didapatkan definisi ruang metrik cone rectangular berikut ini.

Definisi 4 *Diberikan X himpunan tak kosong. Apabila untuk setiap $x, y \in X$ pemetaan $d_{cr}: X \times X \to E$ memenuhi*

(MCR1) $d_{cr}(x, y) \succcurlyeq \theta$
(MCR2) $d_{cr}(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$
(MCR3) $d_{cr}(x, y) = d_{cr}(y, x)$

(MCR4) $d_{cr}(x,y) \preccurlyeq d_{cr}(x,z) + d_{cr}(z,w) + d_{cr}(w,y)$
untuk setiap $z,w \in X - \{x,y\}$ *dan* $z \neq w$, *maka* d_{cr} *disebut sebagai metrik cone rectangular dan* (X, d_{cr}) *disebut sebagai ruang metrik cone rectangular.*

Contoh 2
Misalkan X suatu himpunan tak kosong, $A \subseteq X$ dengan $A \neq \phi$ dan $A^C = X - A \neq \phi$, $E = R^2$, serta $P = \{(x,y) | x,y \geq 0\}$ adalah cone di E. Didefinisikan pemetaan $d_{cr} : X \times X \to E$ sebagai berikut:

$$d_{cr}(x,y) = \{(0,0)\ jika\ x = y\ (3,2)\ jika\ \{x,y\} \subseteq A, x \neq y\ (1,1)\ jika\ \{x,y\} \nsubseteq A, x \neq y$$

maka (X, d_{cr}) adalah ruang metrik cone rectangular, namun bukan ruang metrik cone.

Seperti dalam ruang metrik cone, terdapat konsep barisan Cauchy, barisan konvergen serta kelengkapan. Pada bagian ini, dibahas konsep-konsep terkait barisan pada ruang metrik cone rectangular. Azam [2] memberikan definisi barisan Cauchy, barisan konvergen, serta ruang metrik cone rectangular lengkap sebagai berikut:

Definisi 5 *Diberikan* (X, d_{cr}) *ruang metrik cone rectangular,* (x_n) *barisan dalam* (X, d_{cr}) *serta* $x \in (X, d_{cr})$. *Apabila untuk setiap* $c \in E$ *dengan* $\theta \ll c$ *terdapat* $n_0 \in N$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n > n_0$ *berlaku* $d_{cr}(x_n, x) \ll c$, *maka* (x_n) *disebut sebagai barisan yang konvergen ke* x *dan* x *merupakan limit barisan* (x_n).

Definisi 6 *Diberikan* (X, d_{cr}) *ruang metrik cone rectangular dan* (x_n) *barisan dalam* (X, d_{cr}). *Apabila untuk setiap* $c \in E$ *dengan* $\theta \ll c$ *terdapat* $n_0 \in N$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n > n_0$ *berlaku* $d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \ll c$, *maka* (x_n) *disebut sebagai barisan Cauchy dalam* (X, d_{cr}).

Definisi 7 *Apabila setiap barisan Cauchy dalam ruang metrik cone rectangular* (X, d_{cr}) *konvergen, maka* (X, d_{cr}) *disebut sebagai ruang metrik cone rectangular lengkap.*

Perlu diperhatikan bahwa tidak benar setiap barisan konvergen adalah barisan Cauchy. Selain itu, juga tidak benar bahwa konvergensi barisan bersifat tunggal. Samet [8] memberikan contoh penyangkal sebagai berikut:

Contoh 3 Misalkan (q_n) sebuah barisan di Q dan $a, b \in R - Q$ dengan $a \neq b$. Didefinisikan $X = \{q_1, q_2, ...\} \cup \{a, b\}$, $E = R$ dengan cone himpunan bilangan real tak negatif, dan $d_{cr}: X \times X \to E$ sebagai berikut:

$$d_{cr}(x,x) = 0, \qquad \forall x \in X$$
$$d_{cr}(x,y) = d_{cr}(y,x), \qquad \forall x,y \in X$$
$$d_{cr}(q_n, q_m) = 1, \qquad \forall n,m \in N, n \neq m$$
$$d_{cr}(q_n, b) = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in N$$
$$d_{cr}(q_n, a) = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in N$$

$$d_{cr}(a,b) = 1,$$

(X, d_{cr}) merupakan ruang metrik cone rectangular. Barisan (q_n) konvergen ke a dan konvergen ke b serta bukan merupakan barisan Cauchy.

Meskipun limit barisan konvergen di ruang metrik cone rectangular tidak bersifat tunggal, terdapat suatu sifat yang menjamin ketunggalan limit barisan, seperti tertuang dalam Lemma berikut:

Lemma 1 *Diberikan* (X, d_{cr}) *ruang metrik cone rectangular dan* (x_n) *barisan di* X. *Apabila* (x_n) *barisan Cauchy yang konvergen, maka* x_n *bersifat tunggal.*

3.2 Teorema Titik Tetap Untuk Dua Pemetaan di Ruang Metrik Cone Rectangular

Pada bagian ini, dikaji pengembangan teorema titik tetap di ruang metrik cone rectangular. Azam [4] memperluas Teorema 1 menjadi bentuk berikut:

Teorema 2 *Misalkan* (X, d_{cr}) *adalah ruang metrik cone rectangular lengkap, serta* P *cone normal dengan konstanta normal* κ *dan pemetaan* $T: X \to X$ *memenuhi:*

$$d_{cr}(Tx, Ty) \preccurlyeq \alpha d_{cr}(x, y) \text{ untuk setiap } x, y \in X,$$

dengan $\alpha \in [0,1)$ *konstan. Maka* T *memiliki titik tetap tunggal dalam* X.

Rashwan [5] memperumum pemetaan yang digunakan oleh Azam dengan memberikan suatu definisi himpunan pemetaan kontraktif sebagai berikut:

Definisi 8 *Misalkan* $P \subseteq E$ *himpunan cone.* Φ *didefinisikan sebagai himpunan pemetaan* $\varphi: P \to P$ *yang memenuhi*

(PHI1) *Jika* $x \preccurlyeq y$, *maka* $\varphi(x) \preccurlyeq \varphi(y)$ *untuk setiap* $x, y \in P$.

(PHI2) *Jika* $\{x_n\}$ *konvergen ke* x, *maka* $\{\varphi(x_n)\}$ *konvergen ke* $\varphi(x_n)$ *untuk setiap* $x_n, x \in P$.

(PHI3) $\theta \prec \varphi(x) \prec x$ *untuk setiap* $x \in P - \{\theta\}$.

(PHI4) *Deret* $\sum_{n\geq 0} \varphi^n(x)$ *konvergen untuk setiap* $x \in P - \{\theta\}$.

Akibat 1 *Berdasarkan definisi* (PHI2) *dan* (PHI3), *dengan mengambil barisan* (x_n) *konvergen ke* θ, *didapat bahwa* $\varphi(\theta) = \theta$. *Berdasarkan definisi* (PHI4), *didapat bahwa* $\varphi^n(x) = \theta$ *untuk setiap* $x \in P$. *Selain itu, apabila terdapat pemetaan* $\varphi \in \Phi$, P *pastilah merupakan himpunan dengan tak hingga banyak anggota.*

Dengan menggunakan Definisi 8, Rashwan [5] mengembangkan Teorema 1 menjadi bentuk berikut:

Teorema 3 *Misalkan* (X, d_{cr}) *ruang metrik cone rectangular lengkap dan pemetaan* $T: X \to X$ *memenuhi*

$$d_{cr}(Tx, Ty) \preccurlyeq \varphi(d_{cr}(x, y))$$

untuk setiap $x, y \in X$, *di mana* $\varphi \in \Phi$. *Maka* T *memiliki titik tetap tunggal dalam* X.

Berikut disajikan contoh pemetaan kontraktif yang memenuhi Teorema 3:

Contoh 4 Diberikan $X = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} \cup \{0\}, E = l_R^\infty$ dan $P = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) | a_i \geq 0, \forall i \in N\}$. Didefinisikan pemetaan $d_{cr} : X \times X \to E$ sebagai berikut:

(i) $d_{cr}\left(1, \frac{1}{3}\right) = d_{cr}\left(\frac{1}{3}, 1\right) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots)$

(ii) $d_{cr}(x, y) = (|x-y|, |x-y|, |x-y|, \dots)$ untuk $(\frac{1}{3}, 1) \neq (x, y) \neq (1, \frac{1}{3})$.

Diberikan pula pemetaan $T: X \to X$ dan $\varphi: P \to P$ sebagai berikut:

$$T(x) = x^2, \forall x \in X - \{0,1\}$$
$$T(0) = T(1) = 0$$
$$\varphi((a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)) = (\frac{7}{8}a_1, \frac{15}{16}a_2, \frac{31}{32}a_3, \dots, \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}a_n, \dots)$$

maka (X, d_{cr}) ruang metrik cone rectangular lengkap yang memenuhi $d_{cr}(Tx, Ty) \preccurlyeq \varphi(d_{cr}(x, y))$ untuk setiap $x, y \in X$ dan T memiliki titik tetap tunggal, yakni $0 \in X$.

Selanjutnya, akan dibahas teorema titik tetap untuk dua pemetaan sendiri (*two self-mappings*) di ruang metrik cone rectangular. Sebelumnya akan diberikan konsep titik pertemuan antara dua pemetaan.

Definisi 9 [7] *Diberikan pemetaan $S, T: X \to X$ dengan X himpunan tak kosong. Apabila terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $w = Sx = Tx$, maka w disebut titik pertemuan pemetaan S dan T.*

Rashwan [7] juga mengembangkan Teorema 3 menjadi Teorema 4. Dalam paper ini akan dibuktikan teorema tersebut dengan suatu bukti yang berbeda.

Teorema 4 *Misalkan (X, d_{cr}) ruang metrik cone rectangular lengkap dan pemetaan $S, T: X \to X$ memenuhi*

$$d_{cr}(Tx, Ty) \preccurlyeq \varphi(d_{cr}(Sx, Sy))$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan suatu $\varphi \in \Phi$. Apabila $T(X) \subseteq S(X)$, serta $T(X)$ atau $S(X)$ merupakan sub-ruang lengkap dalam X, maka pemetaan S dan T memiliki titik pertemuan yang unik dalam X.

Bukti

Ambil sebarang $x_0 \in X$. Karena $T(X) \subseteq S(X)$, dapat dipilih $x_1, x_2, x_3, \dots \in X$ sehingga $Tx_0 = Sx_1$, $Tx_1 = Sx_2$, $Tx_2 = Sx_3$, dan seterusnya. Dengan asumsi bahwa $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in N$, akan ditunjukkan bahwa $d_{cr}(x_n, x_{n+m}) \to \theta$ untuk $n \to \infty$.
Untuk $m = 2$, didapat bahwa

$$\begin{aligned} d_{cr}(Tx_n, Tx_{n+2}) &\preccurlyeq \varphi\big(d_{cr}(Sx_n, S_{n+2})\big) = \varphi\big(d_{cr}(Tx_{n-1}, Tx_{n+1})\big) \\ &\preccurlyeq \varphi^2\big(d_{cr}(Sx_{n-1}, S_{n+1})\big) \\ &\vdots \\ &\preccurlyeq \varphi^n\big(d_{cr}(Tx_0, Tx_2)\big) \end{aligned}$$

Berdasarkan Akibat 1, $\varphi^n\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_2)\big)$ konvergen ke θ. Jadi, $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2}) \to \theta$ untuk $n \to \infty$. Dengan cara serupa, untuk $m = 2k-1$, $k \in N$, berlaku

$$d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k-1}) \preccurlyeq \varphi^n\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_{2k-1})\big) \tag{1}$$

Berdasarkan (MCR4), berlaku

$$\begin{aligned} d_{cr}(Tx_0,Tx_{2k-1}) &\preccurlyeq d_{cr}(Tx_0,Tx_1) + d_{cr}(Tx_1,Tx_2) + d_{cr}(Tx_2,Tx_{2k-1}) \\ &\preccurlyeq d_{cr}(Tx_0,Tx_1) + d_{cr}(Tx_1,Tx_2) + d_{cr}(Tx_2,Tx_3) + d_{cr}(Tx_3,Tx_4) + d_{cr}(Tx_4,Tx_{2k-1}) \\ &\vdots \\ &\preccurlyeq d_{cr}(Tx_0,Tx_1) + d_{cr}(Tx_1,Tx_2) + \cdots + d_{cr}(Tx_{2k-3},Tx_{2k-2}) + d_{cr}(Tx_{2k-2},Tx_{2k-1}) \\ &\preccurlyeq d_{cr}(Tx_0,Tx_1) + \varphi(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)) + \cdots + \varphi^{2k-3}(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)) \\ &\quad + \varphi^{2k-2}(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)) \end{aligned}$$

$$\prec \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)\big) \tag{2}$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh:

$$d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k-1}) \preccurlyeq \varphi^n(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)\big))$$

Jadi $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)\big)$ konvergen dalam P. Karena P tertutup, maka $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)\big) \in P-\{\theta\}$. Berdasarkan Akibat 1, $\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i\big(d_{cr}(Tx_0,Tx_1)\big)\Big)$ konvergen ke θ. Jadi, $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k-1}) \to \theta$ untuk $n \to \infty$.

Untuk $m = 2k, k \in N$, dengan (MCR4) diperoleh

$$d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k}) \preccurlyeq d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k+1}) + d_{cr}(Tx_{n+2k+1},Tx_{n+2k+3}) + d_{cr}(Tx_{n+2k+3},Tx_{n+2k})$$

Karena $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k+1})$ konvergen ke θ, $d_{cr}(Tx_{n+2k+1},Tx_{n+2k+3})$ konvergen ke θ, dan $d_{cr}(Tx_{n+2k+3},Tx_{n+2k})$ konvergen ke θ, maka untuk setiap $c \in E$ dengan $\theta \ll c$, terdapat $n_0 \in N$ sehingga

$$d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k+1}) \ll \frac{c}{3}$$
$$d_{cr}(Tx_{n+2k+1},Tx_{n+2k+3}) \ll \frac{c}{3}$$
$$d_{cr}(Tx_{n+2k+3},Tx_{n+2k}) \ll \frac{c}{3}$$

Hal ini mengakibatkan $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k}) \ll c$ sehingga $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+2k})$ konvergen ke θ. Telah ditunjukkan bahwa $d_{cr}(Tx_n,Tx_{n+m})$ konvergen ke θ untuk setiap $m \in N$. Jadi $(Tx_n) = (S_{n+1})$ adalah barisan Cauchy. Karena $T(X)$ atau $S(X)$ adalah sub-ruang lengkap, maka terdapat titik $q \in S(X)$ sehingga $\{Tx_n\} = \{Sx_{n+1}\} = q$. Selain itu, terdapat $p \in X$ sehingga $Sp = q$.

Kini ditunjukkan bahwa $Tp = q$. Dengan (MCR4), didapat bahwa

$$d_{cr}(Tp,q) \preccurlyeq d_{cr}(Tp,Tx_n) + d_{cr}(Tx_n,Sx_n) + d_{cr}(Sx_n,q)$$

$$\preccurlyeq \varphi\big(d_{cr}(Sp, Sx_n)\big) + d_{cr}(Tx_n, Tx_{n-1}) + d_{cr}(Sx_n, q)$$
$$\prec d_{cr}(q, Sx_n) + d_{cr}(Tx_n, Tx_{n-1}) + d_{cr}(Sx_n, q)$$
Karena $d_{cr}(q, Sx_n)$, dan $d_{cr}(Tx_n, Tx_{n-1})$ konvergen ke θ, maka $d_{cr}(Tp, q) = \theta$. Jadi $Tp = q = Sp$. Jadi q merupakan titik pertemuan pemetaan S dan T.
Selanjutnya, misalkan q dan u merupakan dua titik pertemuan berbeda atas pemetaan S dan T dengan $q = Sp = Tp$ serta $u = Sv = Tv$, maka

$$d_{cr}(q, u) = d_{cr}(Tp, Tv) \preccurlyeq \varphi\big(d_{cr}(Sp, Sv)\big) \prec d_{cr}(Sp, Sv) = d_{cr}(q, u).$$
Kontradiksi. Sehingga titik pertemuan S dan T bersifat tunggal. □

Selanjutnya, dengan menggunakan hasil penemuan Abbas dan Jungck [1], didapat Teorema 5 sebagai berikut:

Teorema 5 *Diberikan X himpunan tak kosong dan dua pemetaan $S, T: X \to X$. Apabila pemetaan S dan T memiliki titik pertemuan tunggal $w \in X$ dan $Tw = Sw$, maka w merupakan titik tetap bersama tunggal pemetaan S dan T.*

Bukti
Karena $Tw = Sw$, maka Tw merupakan titik pertemuan pemetaan S dan T. Karena titik pertemuan S dan T tunggal, didapat bahwa $w = Tw = Sw$. Jadi w merupakan titik tetap bersama pemetaan S dan T. Selanjutnya, apabila $z \in X$ merupakan titik tetap pemetaan S dan T, maka $z = fz = gz$. Hal ini mengakibatkan z merupakan titik pertemuan pemetaan S dan T. Oleh karena titik pertemuan S dan T tunggal, maka $w = z$. Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap bersama pemetaan S dan T bersifat tunggal. □

Contoh 5 Diberikan $X = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} \cup \{0\}, E = l_R^\infty$ dan $P = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) | a_i \geq 0, \forall i \in N\}$ cone pada E. Didefinisikan pemetaan $d_{cr} : X \times X \to E$ sebagai berikut:
(i) $d_{cr}\left(1, \frac{1}{3}\right) = d_{cr}\left(\frac{1}{3}, 1\right) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots)$
(ii) $d_{cr}(x, y) = (|x - y|, |x - y|, |x - y|, \dots)$ untuk $\{x, y\} \neq \{1, \frac{1}{3}\}$.

Diberikan pula pemetaan $S, T: X \to X$ serta $\varphi: P \to P$ sebagai berikut:
$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+3}, \forall n \in N$$
$$T\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+2)(n+3)}, \forall n \in N$$
$$S(0) = T(0) = 0$$
$$\varphi((a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)) = (\frac{2}{3}a_1, \frac{3}{4}a_2, \frac{4}{5}a_3, \dots, \frac{n+1}{n+2}a_n, \dots)$$
maka (X, d_{cr}) ruang metrik cone rectangular lengkap yang memenuhi $d_{cr}(Tx, Ty) \preccurlyeq \varphi(d_{cr}(Sx, Sy))$ untuk setiap $x, y \in X$. Pemetaan S dan T memiliki titik pertemuan yang unik pada $0 \in X$. Dapat dilihat pula bahwa 0 merupakan titik tetap bersama tunggal.

4. Kesimpulan

Telah diperoleh syarat cukup untuk mendapatkan eksistensi serta ketunggalan titik tetap bersama untuk dua pemetaan sendiri (*two self-mappings*) di ruang metrik cone rectangular. Telah dikonstruksi suatu bukti alternatif teorema titik tetap untuk dua pemetaan sendiri (*two self-mappings*) di ruang metrik cone rectangular.

Daftar Pustaka

[1] Abbas, M. & Jungck, G., (2008), Common Fixed Point Results for Noncommuting Mappings without Continuity in Cone Metric Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 416-420. http:/dx.doi.org/10.1016/ j.jmaa.2007.09.070

[2] Azam, A., Arshad, M., Beg, I., (2009), Banach Contraction Principle on Cone Rectangular Metric Spaces, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **3**, 236-241. doi:10.2298/AADM0902236A

[3] Branciari, A., (2000), A Fixed Point Theorem of Banach-Caccioppoli Type on a Class of Generalized Metric Spaces, *Publ. Math. Debrecen*, **57**, 31-37. http://www.sciepub.com/reference/117108

[4] Frechet, M., (1906), Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22**, 1-72.

[5] Huang, L.G. & Zhang, X., (2007), Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **332**, 1468-1476. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.087

[6] Kreyszig, E., (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York: John Wiley.

[7] Rashwan, R.A. & Saleh, S.M., (2012), Some Fixed Point Theorem in Cone Rectangular Metric Spaces, *Mathematica Aeterna*, **2**, 573-587. https://www.researchgate.net/publication/260980167_Some_Fixed_Point_Theorems_in_Cone_Rectangular_Metric_Spaces/link/0f317532cb4d0addb7000000/download

[8] Samet, B., (2010), Discussion on: A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces by A. Branciari, *Publ. Math. Debrecen*, **76(4)**, 493-494. https://www.researchgate.net/publication/235737285_Discussion_on_A_fixed_point_theorem_of_Banach_Caccioppolitype_on_a_class_of_generalized_metric_spaces_by_A_Branciari

[9] Sunarsini, Apriliani, E., Yunus, M., (2021), Fixed point theorems of Rhoades and Reich contractive mappings in complete cone metric space, *Journal of Physics: Conference Series*, **1821,** 012003. doi:10.1088/1742-6596/1821/1/012003