GENERALISASI FUNGSI GENAP PADA SISTEM KOORDINAT KUTUB DAN BEBERAPA SIFATNYA

(*Generalization of Even Function in Polar Coordinate System and Some Its Properties*)

Firdaus Ubaidillah

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
Jalan Kalimantan 37 Jember – Indonesia 68121
firdaus_u@yahoo.com

Abstract. The function $r: R \to R$ is said to be an even function if $r(-\theta) = r(\theta)$ for every θ in R. In the polar coordinate system, the graph of the even function is symmetric about the polar axis, i.e., the line $\theta = 0$, but not vice versa. In this paper, we will introduce a more general definition of an even function, or generalized even functions, in a polar coordinate system, which is given the function $r: R \to R$ and for a θ_0 in R then $r(\theta_0 - \theta) = r(\theta_0 + \theta)$ for every θ in R. In addition, some properties of the generalized even functions to the polar coordinate system will be discussed.

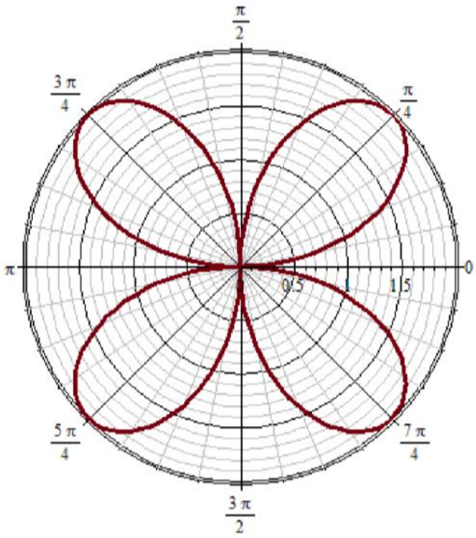
Keywords: even function, symmetric graph, polar coordinate system

1. Pendahuluan

Menurut Stewart [5], fungsi $f: R \to R$ dikatakan *fungsi genap* jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap x di R. Pada sistem koordinat Cartesian, grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu-y, atau garis $x = 0$, begitu juga sebaliknya, yakni setiap fungsi yang grafiknya simetri terhadap sumbu-y merupakan fungsi genap. Pada sistem koordinat kutub, jika diberikan $r: R \to R$ fungsi genap maka grafik fungsi r simetri terhadap sumbu kutub. Namun, jika suatu fungsi memiliki grafik yang simetri terhadap sumbu kutub, fungsi tersebut belum cukup menjamin sebagai fungsi genap. Sebagai contoh, fungsi $r(\theta) = 2$ $sin\, sin\,(2\theta)$ yang grafiknya diberikan pada Gambar 1. Pada Gambar 1 terlihat bahwa grafik fungsi r simetri terhadap sumbu kutub, namun r bukan fungsi genap, sebab

$$r(-\theta) = 2\, sin\, sin\,(2(-\theta)) = -2\, sin\, sin\,(2\theta) = -r(\theta).$$

Grafik fungsi genap pada koordinat kutub simetri terhadap sumbu kutub, atau garis $\theta = 0$. Dalam tulisan ini akan dikenalkan dan dibahas fungsi yang grafiknya simetri terhadap suatu garis $\theta = \theta_0$, yang nantinya dikatakan sebagai fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, yang merupakan generalisasi dari fungsi genap pada sistem koordinat kutub. Selain itu akan dieksplorasi sifat-sifat yang berkenaan dengan fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$. Untuk mengawali hal tersebut, terlebih dahulu ditinjau dasar-dasar teori tentang sistem koordinat kutub dan fungsi genap beserta sifat-sifatnya.



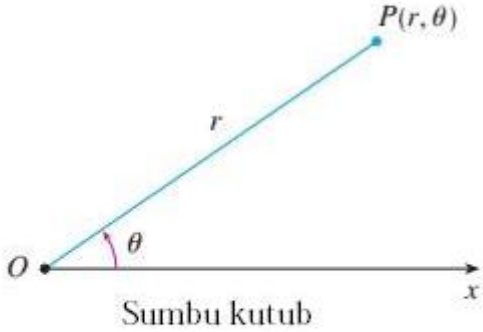
Gambar 1. Grafik fungsi $r(\theta) = 2\ sin\ sin\ (2\theta)$

1.1. Sistem Koordinat Kutub

Sistem koordinat digunakan untuk memudahkan pendeskripsian, perhitungan, dan analisa, baik yang sifatnya geometrik maupun dinamik. Sistem koordinat ini memungkinkan untuk mengidentifikasi titik di bidang atau di ruang tiga dimensi dengan sekumpulan angka. Pada bidang, sistem koordinat siku-siku atau persegi panjang (juga disebut *Cartesian*) merupakan sistem koordinat yang paling umum dipakai. Dalam koordinat persegi panjang, posisi koordinat ditafsirkan sebagai panjang dan lebar sisi persegi panjang. Dalam beberapa masalah lain terkadang lebih mudah menganalisis posisi titik dalam sistem koordinat tertentu sebagai sistem koordinat alternatif. Salah satu sistem koordinat alternatif itu adalah koordinat kutub.

Dalam beberapa penelitian, para peneliti menggunakan koordinat kutub untuk memudahkan investigasi. Shatnawi, dkk [4] menggunakan sistem koordinat kutub untuk menginvestigasi polar PSO dengan menginisialisasi kembali posisi-posisi partikel berdasarkan teknik inisialisasi. Zhou, dkk [6] menggunakan koordinat kutub untuk mendeteksi objek untuk penginderaan jauh. Dan masih banyak lagi para peneliti menggunakan koordinat kutub untuk keperluan penelitiannya.

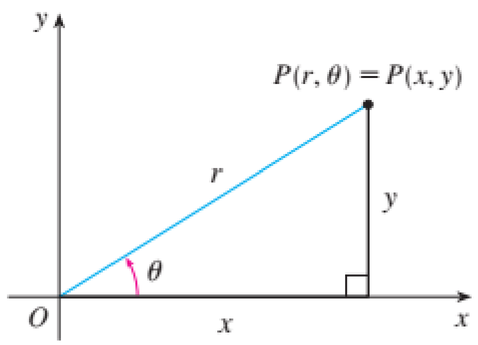
Untuk mengenal sistem koordinat kutub, berikut merupakan pengertian koordinat kutub beserta penjelasannya yang diambil dari Stewart [5]. Untuk memulainya, pertama dengan menggambar sebuah setengah-garis tetap arah ke kanan yang selanjutnya dinamakan **sumbu kutub** yang berpangkal di sebuah titik 0. Titik ini disebut **kutub** atau titik asal. Sumbu kutub digambar dengan posisi mendatar dan mengarah ke kanan dan oleh sebab itu sumbu ini dapat disamakan dengan sumbu x positif pada sistem koordinat persegi panjang. Setiap titik $P(r, \theta)$ di koordinat kutub, yang bukan kutub, adalah perpotongan antara sebuah lingkaran yang berpusat di kutub berjari-jari r dan sebuah sinar yang memancar dari kutub dengan besar sudut θ yang dihitung dari sumbu kutub dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam, seperti terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Koordinat kutub

Sebuah sifat pada koordinat kutub yang tidak ada pada sistem koordinat persegi panjang adalah tiap titik memiliki banyak koordinat kutub. Misalnya, titik dengan koordinat kutub (3, π/2) juga memiliki koordinat (3, 5π/2), (3, 9π/2), (3, -3π/2), dan sebagainya. Hal ini berlaku juga jika r memiliki nilai yang negatif. Dalam hal ini titik (r, θ) terletak pada sinar yang berlawanan arah dengan sinar yang dibentuk oleh θ dan terletak r satuan dari titik asal. Dengan demikian, titik (-3, π/4) sama dengan titik (3, -3π/4). Untuk titik asal mempunyai koordinat (0, θ), di mana θ sudut sembarang.

Hubungan antara koordinat kutub dengan koordinat persegi panjang (*Cartesian*) dapat dilihat pada Gambar 3. Kutub pada koordinat kutub merupakan titik asal pada koordinat persegi panjang dan sumbu kutub pada koordinat kutub merupakan sumbu-x positif pada koordinat persegi panjang.



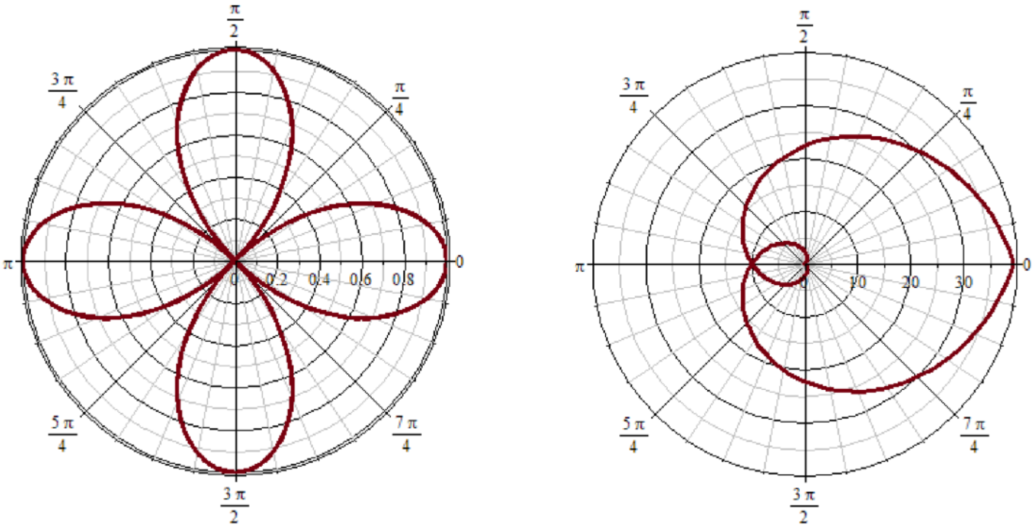
Gambar 3. Hubungan antara koordinat kutub dengan koordinat persegi panjang

Konversi titik dari koordinat kutub ke koordinat persegi panjang sebagai berikut

$$x = r\ cos\ cos\ \theta \quad \text{dan} \quad y = r\ sin\ sin\ \theta\,.$$

1.2. Fungsi Genap

Fungsi $f: R \rightarrow R$ dikatakan *fungsi genap* jika berlaku $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in R$ [3]. Sebagai contoh pada sistem koordinat kutub, fungsi yang didefinisikan $r_1(\theta) = cos\, cos\, 2\theta$ dan $r_2(\theta) = \theta^2$ keduanya merupakan fungsi genap karena berlaku $r_1(-\theta) = cos\, cos\, (-2\theta) = cos\, cos\, (2\theta) = r_1(\theta)$ dan juga berlaku $r_2(-\theta) = (-\theta)^2 = \theta^2 = r_2(\theta)$. Sedangkan fungsi $r_3(\theta) = sin\, sin\, \theta$ bukan merupakan fungsi genap. Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu kutub, atau garis $\theta = 0$. Grafik fungsi r_1 dan r_2 yang diberikan pada contoh di atas dapat dilihat pada Gambar 4.



(a). Grafik fungsi $r_1(\theta) = cos\, cos\, 2\theta$ (b). Grafik fungsi $r_2(\theta) = \theta^2$

Gambar 4. Grafik fungsi genap pada sistem koordinat kutub

Beberapa sifat yang terkait dengan fungsi genap pada sistem koordinat persegi panjang (*Cartesian*) diberikan sebagai berikut [5].

1. Untuk sebarang fungsi $f: R \rightarrow R$, fungsi h yang didefinisikan pada R dengan
$$h(x) = f(x) + f(-x), \qquad untuk\ setiap\ x \in R,$$
merupakan fungsi genap.

2. Untuk sebarang fungsi $f: R \rightarrow R$ dan g fungsi genap, maka fungsi komposisi $f \circ g$ merupakan fungsi genap.

3. Kombinasi linear fungsi-fungsi genap merupakan fungsi genap, yakni jika $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bilangan-bilangan real dan $f_1, f_2, \dots, f_n$ fungsi-fungsi genap, maka
$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$$
merupakan fungsi genap.

4. Diberikan $b \in R, b > 0$. Jika f fungsi genap yang terintegral pada selang $[-b, b]$, maka
$$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{b} f(x)dx\,.$$

2. Metodologi

Dalam mengenalkan istilah baru fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ pada sistem koordinat kutub diperoleh setelah berhasil menggeneralisasi pengertian fungsi genap. Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu kutub, atau garis $\theta = 0$. Fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ ini merupakan hasil dari garis $\theta = 0$ pada pengertian fungsi genap yang kemudian digeneralisasi menjadi garis $\theta = \theta_0$.

Selanjutnya, untuk menggali sifat-sifat fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ diperoleh dari menurunkan sifat-sifat fungsi genap yang sudah diberikan pada Seksi 1 sebelumnya. Sifat-sifat fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ pada sistem koordinat kutub dituangkan dalam bentuk teorema-teorema dan akibat dengan disertai buktinya.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk mengawali hasil dan pembahasan ini, diberikan definisi berikut.

Definisi 1. Diberikan fungsi $r: R \to R$ dan bilangan θ_0 di R. Fungsi r pada sistem koordinat kutub dikatakan **fungsi genap terhadap garis** $\theta = \theta_0$ jika

$$r(\theta_0 - \theta) = r(\theta_0 + \theta), \quad untuk\ setiap\ \ \theta \in R.$$

Sebagai contoh, fungsi $r(\theta) = sin\,(2\theta)$ merupakan fungsi genap terhadap garis $\theta = \pi/4$. Hal ini bisa diperlihatkan bahwa

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) &= sin\,sin\,\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\ &= sin\,sin\,\left(\frac{\pi}{2}\right)\,cos\,cos\,(2\theta)\,-cos\,cos\,(\frac{\pi}{2})\,sin\,sin\,(2\theta) \\ &= cos\,cos\,(2\theta)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dan

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) &= sin\,sin\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) \\ &= sin\,sin\,\left(\frac{\pi}{2}\right)\,cos\,cos\,(2\theta)\,+cos\,cos\,(\frac{\pi}{2})\,sin\,sin\,(2\theta) \\ &= cos\,cos\,(2\theta)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dari persamaan (1) dan (2) menunjukkan bahwa $r\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=r\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$.

Akibat dari Definisi 1 ini, setiap fungsi genap merupakan fungsi genap terhadap garis $\theta = 0$. Akibat lain dari Definisi 1 adalah grafik fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$.

Berikut merupakan sifat-sifat yang berkenaan dengan fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ yang dituangkan dalam teorema-teorema dan akibat.

Teorema 2. Jika r_1 dan r_2 keduanya fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ maka

(i). αr_1, untuk setiap α di R,

(ii). $r_1 + r_2$,

(iii). $r_1 r_2$, dan

(iv). r_1/r_2, asalkan $r_2(\theta) \neq 0$,

merupakan fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$.

Bukti: (i). $(\alpha r_1)(\theta-\theta_0) = \alpha[r_1(\theta-\theta_0)] = \alpha[r_1(\theta+\theta_0)] = (\alpha r_1)(\theta+\theta_0)$.

(ii). $(r_1+r_2)(\theta-\theta_0) = r_1(\theta-\theta_0) + r_2(\theta-\theta_0)$

$$= r_1(\theta+\theta_0) + r_2(\theta+\theta_0)$$
$$= (r_1+r_2)(\theta+\theta_0).$$

(iii). $(r_1 r_2)(\theta-\theta_0) = r_1(\theta-\theta_0)\, r_2(\theta-\theta_0)$

$$= r_1(\theta+\theta_0)\, r_2(\theta+\theta_0)$$
$$= (r_1 r_2)(\theta+\theta_0).$$

(iv). $\frac{r_1}{r_2}(\theta-\theta_0) = \frac{r_1(\theta-\theta_0)}{r_2(\theta-\theta_0)} = \frac{r_1(\theta+\theta_0)}{r_2(\theta+\theta_0)} = \frac{r_1}{r_2}(\theta+\theta_0)$ ∎

Teorema 3. Jika r fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ dan r terintegral pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0 + \theta_1]$, maka

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r\, d\theta = 2\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r\, d\theta .$$

Bukti: Berdasarkan sifat integral bahwa

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} r\, d\theta = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r\, d\theta,$$

untuk itu cukup akan dibuktikan

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r\, d\theta.$$

Dengan memisalkan $\theta = u + \theta_0$ dan dari definisi fungsi genap diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = \int_{-\theta_1}^{0} r(\theta_o + u)\, du = \int_{-\theta_1}^{0} r(\theta_o - u)\, du\,. \qquad (3)$$

Kemudian dengan memisalkan $\theta_o - u = v$, integral ruas paling kanan persamaan (3) menjadi

$$\int_{-\theta_1}^{0} r(\theta_o - u)\, du = -\int_{\theta_0+\theta_1}^{\theta_0} r(v)\, dv = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(v)\, dv$$
$$= \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta) d\theta. \qquad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4), diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r(\theta)\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r(\theta) d\theta.$$

Bukti selesai. ■

Sekarang, menurut Bittinger, dkk [1] dan Guichard [2] bahwa jika A menyatakan luas daerah pada koordinat kutub yang dibatasi oleh kurva r, garis $\theta = \theta_0$, dan garis $\theta = \theta_1$ adalah

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{r^2}{2}\, d\theta.$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} \frac{r^2}{2}\, d\theta$ menyatakan luas daerah yang dibatasi kurva r pada selang $[\theta_0 - \theta_1,\ \theta_0 + \theta_1]$. Jika r fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, maka luasan daerah yang dibatasi kurva r pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0]$ sama dengan luasan daerah yang dibatasi kurva r pada selang $[\theta_0, \theta_0 + \theta_1]$. Dengan demikian, diperoleh akibat berikut.

Akibat 4. Jika r fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ dan r terintegral pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0 + \theta_1]$, maka

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r^2\, d\theta = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r^2\, d\theta\,.$$

Bukti: Jika r fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, berdasarkan Teorema 2 (iii) dan (i), maka $\frac{r^2}{2}$ juga merupakan fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r^2\, d\theta\,.$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$\int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0+\theta_1} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r^2\, d\theta\ . \qquad \blacksquare$$

Dengan demikian, jika r fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, maka luas daerah yang dibatasi kurva r, garis $\theta = \theta_0 - \theta_1$, dan garis $\theta = \theta_0 + \theta_1$, dinyatakan dengan L, adalah

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta_1} r^2\, d\theta \quad atau \quad L = \int_{\theta_0-\theta_1}^{\theta_0} r^2\, d\theta.$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan terkait dengan sifat-sifat generalisasi fungsi genap, yakni fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, diantaranya:

1. Grafik fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ simetri terhadap garis $\theta = \theta_0$, namun belum tentu berlaku sebaliknya.

2. Perkalian fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ dengan konstanta, jumlahan dua fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, perkalian dua fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$, dan pembagian dua fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ merupakan fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$.

3. Nilai integral fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0 + \theta_1]$ sama dengan dua kali nilai integral fungsi genap terhadap garis $\theta = \theta_0$ tersebut pada selang $[\theta_0, \theta_0 + \theta_1]$ atau pada selang $[\theta_0 - \theta_1, \theta_0]$.

Daftar Pustaka

[1] Bittinger, M.L., Ellenbogen, D. J., Surgent, S. A., (2012), *Calculus and Its Applications*, 10th ed., Pearson Education, Inc., Boston.

[2] Guichard, D., (2022), *Calculus*, California: LibreTexts.

[3] Herman, E., Strang G., (2018), *Calculus Volume 1*, Houston: OpenStax.

[4] Shatnawi, M., Nasrudin, M.F., Sahran, S., (2017), A New Initialization Technique in Polar Coordinates for Particle Swarm Optimization and Polar PSO, *IJASEIT*, **7**(**1**), 242-249.

[5] Stewart, J., (2008), *Calculus Early Transcendentals*, 6th ed., Belmont: Thomson Learning, Inc.

[6] Zhou, L., Wei, H., Li, H., Zhao, W., Zhang, Y., Zhang, Y., (2020), Object Detection for Remote Sensing Images Based on Polar Coordinates, *IEEE Accesss*, **8**, 223373-223384.