ESTIMASI PARAMETER MODEL *ROBUST AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTICITY* MENGGUNAKAN FILTER TAU (τ)

(*Parameter Estimation of Robust Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model using Filtered Tau (τ)*)

Anita Ramadhani[1)], Dewi Retno Sari Saputro[2)]

[1,2)] Universitas Sebelas Maret, Surakarta
Jl. Ir Sutami No. 36A, Surakarta 57126
e-mail: ramadhanianita6@student.uns.ac.id, dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Abstract. Time series data analysis can be modelling with autoregressive, moving average and smoothing. Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) is a combination of autoregressive, integrated, and moving average process. Time series in the economic or financial sector often has a volatility effect. Time series data that has high volatility can cause a heteroscedasticity effect, where the data has a non-stationary mean and variance. Model Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) are appropriate for modelling of time series data that there are heteroscedasticity effect. In a time series data, it is possible that there are outliers that can cause biased data analysis results. Outliers can be removed from the data, but if the outlier is a value that is not due to an error, it can eliminate information and change the sample size. The purpose of this study was to examine the ARCH model and estimate the parameters of the ARCH robust model. To overcome the outliers, a robust ARCH model is needed. The results of the study obtained a robust ARCH model with a tau filter estimate for data containing outliers.

Keywords: ARCH, filter tau estimation, heteroscedasticity, outliers, robust ARCH

1. Pendahuluan

Data *time series* merupakan data yang berorientasi pada waktu, yaitu data hasil pengamatan yang diperoleh berdasarkan waktu pada interval waktu tertentu dan konsisten. Cryer [4] menyatakan analisis data *time series* bertujuan untuk memahami atau memodelkan mekanisme stokastik dan untuk memprediksi suatu nilai di masa yang akan datang berdasarkan data pada periode yang lalu dan mungkin data *time series* lain yang sesuai atau yang disebut dengan faktor. Model *ARIMA* dapat digunakan untuk pemodelan data *time series* stasioner yang melalui proses *differencing* terlebih dahulu dengan asumsi homokesdastisitas [12]. Proses *differencing* dilakukan pada data heteroskedastisitas agar diperoleh data yang memenuhi asumsi homokesdastisitas. Homokesdastisitas merupakan suatu keadaan dimana data *time series* memiliki varian residu yang stasioner. Kebalikan dari homokesdastisitas adalah heteroskedastisitas, yaitu suatu kondisi dimana data *time series* memiliki varian residu yang tidak stasioner. Data *time series* dalam bidang ekonomi atau finansial seringkali terjadi volatilitas yang tinggi. Volatilitas merupakan naik turun suatu harga dalam periode waktu tertentu. Menurut Widarjono [16], volatilisas tinggi ditunjukkan dengan adanya suatu fase dimana terjadi fluktuasi yang tinggi dan kemudian diikuti oleh fluktuasi yang rendah dan kembali tinggi. Data *time series* yang mengalami volatilitas tinggi memiliki rata-rata dan varian yang tidak stasioner, sehingga dapat dikatakan bahwa data *time series* tersebut mengalami heteroskedastisitas.

Untuk melakukan pemodelan pada data dengan varian dan rata-rata tidak stasioner dan mengalami volatilitas digunakan model *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (*ARCH*). Model matematika *Autoregressive Conditional Heterocedasticity* (*ARCH*) pertama kali dikembangkan oleh Engle pada tahun 1982. Engle [6] menyatakan untuk mengatasi asumsi ekonometrika tradisional, dalam hal ini yaitu pada asumsi bahwa peramalan satu periode memiliki varians tidak stasioner maka diperkenalkan model *ARCH*. Pada tahun 1986, Bollerslev [2] memperkenalkan *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (*GARCH*) yang merupakan pengembangan dari model *ARCH* dengan memasukkan unsur residu pada periode yang lalu dan varian residu. Pada tahun 1999, Andersen melakukan penelitian mengenai model *ARCH* dengan estimasi *efficient method of moments* (*EMM*)

Penelitian model *ARCH* telah dilakukan, diantaranya pada tahun 2013 Alam *et al*. [1] melakukan peramalan volatilitas terhadap indeks persediaan dengan model *ARCH*. Kemudian pada tahun 2018, Desvina dan Khairunisa [5] meramalkan transaksi nilai tukar mata uang Indonesia terhadap mata uang Eropa dengan metode *ARCH/GARCH*. Pada tahun yang sama, Nainggolan dkk. [11] menentukan volatilitas harga eceran komoditas cabai rawit dan tomat apel di Kota Manado menggunakan model *ARCH*. Pada tahun 2018 juga, Gustiasih dan Saputro [8] melakukan penelitian model *Generalized Space Time Autoregressive Integrated* dengan *Error Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (*GSTARI-ARCH*). Kemudian pada tahun 2019, Puspitasari, dkk. [13] melakukan analisis sifat volatilitas harga bawang merah nasional menggunakan model *ARCH GARCH*.

Pada suatu data *time series* dimungkinkan adanya *outlier* atau pencilan yang dapat mempengaruhi hasil pemodelan. Estimasi parameter model *ARCH* dengan *maximum likelihood* tidak kekar terhadap *outlier*. Berdasarkan uraian tersebut, penulis mengkaji tentang model *robust ARCH* menggunakan estimasi filter tau.

2. Metodologi

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori dengan metode penelitian kajian pustaka, yaitu mengkaji *literature* yang relevan dengan permasalahan pada penelitian. Kajian pustaka yang relevan dengan penelitian yaitu model *ARCH* dan estimasi filter tau. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan mengkaji ulang model *ARCH* yang mencakup model ARIMA, dan uji heteroskedastisitas, serta estimasi filter tau.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 *Outlier*

Outlier merupakan pengamatan yang menyimpang jauh dari pengamatan lain [9]. Terdapat dua tipe *outlier*, yaitu *additive outlier* yang berpengaruh pada suatu pengamatan dan *innovative outlier* yang berpengaruh pada beberapa pengamatan [7]. Sedangkan Rousseeuw dan Leroy [14] mengklasifikasikan *outlier* dalam analisis data berdasarkan asal *outlier*, yaitu *outlier* sumbu y atau titik *influence* dan *outlier* sumbu x atau titik *laverage*. Soemartini [15] menyatakan bahwa *outlier* pada data berdampak pada

a. residual yang besar dari model yang terbentuk atau E[e]≠0,
b. varian pada data tersebut menjadi lebih besar, dan
c. taksiran interval memiliki rentang yang lebar.

Outlier dalam data dapat menyebabkan hasil analisis data yang bias, oleh karena itu diperlukan penanganan yang tepat terhadap *outlier*. Untuk mengidentifikasi *outlier* dapat digunakan berbagai pendekatan, diantaranya pendekatan grafis, pendekatan berbasis model, pendekatan berbasis jarak, dan pendekatan berbasis deviasi. Pendeteksian *outlier* berbasis jarak diantaranya yaitu jarak Cook, jarak Mahalonobis, dan jarak Euclid. Jarak Cook diusulkan oleh Dennis Cook [3] pada tahun 1977 yang menampilkan jarak cook yang menunjukkan besarnya pengaruh terhadap adanya data *outlier* terhadap estimator koefisien regresi.

3.2 Model *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (*ARCH*)

Barisan x_t mengikuti model *ARCH*(*p*) apabila dapat ditulis sebagai

$$x_t = \{(\sigma_t^2\})^{\frac{1}{2}} z_t, \tag{1}$$

dengan z_t merupakan white noise yang berdistribusi normal $N(0, \sigma_t^2)$. Model *ARCH*(*p*) memenuhi kondisi keteraturan jika $\alpha_0 > 0$ dan $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ [6].
Varians bersyarat dari x_t pada persamaan (1) ditulis sebagai

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i}^2 \tag{2}$$

Pada model *ARCH*(*p*) yang memenuhi persamaan (1) dengan $\alpha_0 > 0$ dan $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ adalah kovarians stasioneritas jika dan hanya jika setiap akar persamaan karakteristik berada diluar lingkaran satuan dengan varians stasioner ditulis dengan

$$\sigma_x^2 = E(x_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i} \tag{3}$$

Parameter model *ARCH* dapat diestimasi dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (*MLE*) dengan fungsi *log-likelihood* adalah

$$L_t = -\frac{1}{2} log\ log\ \sigma_t^2 - \frac{1}{2}\frac{x_t^2}{\sigma_t^2}$$

dengan T merupakan ukuran sampel.

3.3 Estimasi Filter Tau (τ)

Dari Muler dan Yonai [10], pada persamaan (2) jika $y_t = x_t^2$, dari varians bersyarat x_t persamaan (1) diperoleh

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, y_{t-i} \tag{4}$$

dan

$$\frac{y_t}{\sigma_t^2} = z_t^2,$$

dengan z_t adalah variabel random dengan distribusi normal $N(0,1)$. Untuk mengurangi pengaruh *outlier*, digunakan varians bersyarat yang berdasar filter y_t.

Untuk $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$, nilai dugaan dari σ_t^2 dilambangkan dengan $\hat{\sigma}_t^2$ dan y_t dilambangkan dengan $\hat{y}_t$. Untuk $\hat{y}_s$ dengan $s \leq t-1$, dari persamaan (4), diperoleh persamaan (5):

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \hat{y}_{t-i} \tag{5}$$

dengan

$$\hat{y}_t = w\left(\frac{y_t}{\hat{\sigma}_t^2}\right) \widehat{\sigma_t^2},$$

w fungsi genap dan fungsi mulus yang memenuhi

$$w(u) = \{u, jika\ |u| \leq c_1\ 1, jika\ |u| > c_2$$

dengan $c_2 > c_1$, oleh karena itu

$$\hat{y}_t = \{y_t, jika \frac{y_t}{\hat{\sigma}_t^2} \leq c_1\ \hat{\sigma}_t^2, jika \frac{y_t}{\hat{\sigma}_t^2} > c_2 \tag{6}$$

Misalkan $\hat{z}_t^2 = \frac{y_t}{\widehat{\sigma_t^2}}$, berdasar persamaan (6), nilai y_t tidak di berubah saat $\hat{z}_t^2 \leq c_1$. Sebaliknya, jika nilai $\hat{z}_t^2 > c_2$ dapat diinterpretasikan sebagai sinyal bahwa terdapat *outlier* pada y_t. Oleh karena itu menurut Muler dan Yohai [10], nilai y_t disubstitusi dengan nilai dugaan $\hat{\sigma}_t^2$. Nilai $\hat{z}_t^2$ merupakan estimasi dari z_t^2 yang mengikuti distribusi chi-squares χ^2 dengan derajat bebas satu, sehingga saat sampel tidak memuat *outlier* akan diperoleh

$$P(\hat{y}_t = y_t) \simeq P(\chi_1^2 \leq c_1) = p_1$$

dan

$$P(\hat{y}_t = \hat{\sigma}_t^2) \simeq P(\chi_1^2 \geq c_2) = p_2$$

Karena $\hat{y}_t$ bergantung pada α sehingga dapat dituliskan $\hat{y}_t(\alpha)$. Jika $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ diketahui, dari persamaan (3) diperoleh

$$\alpha_0(\beta) = \frac{(1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i)\sigma_x^2}{(1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i)\sigma_x^2} \tag{7}$$

dan

$$\alpha_j(\beta) = \frac{\sigma_x^2 \beta_j}{1 - \sum_{i=1}^{p} \beta_i + (\sum_{i=1}^{p} \beta_i)\sigma_x^2} \tag{8}$$

dengan $j = 1, \dots, p$

Parameter β diestimasi dengan meminimumkan *pseudo likelihood* $L_{\lambda,n(\beta_i)}$ sebagai berikut

$$L_{\lambda,n}^{F}(\beta_i) = \log\log \tau_{\lambda,n}^{2}\left(\frac{x_{p+1}}{\left(\beta_0(\beta_i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \hat{y}_{p+1-i}(\alpha(\beta_i))\right)^{\frac{1}{2}}}, \dots, \frac{x_n}{\left(\beta_0(\beta_i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \hat{y}_{n-i}(\alpha(\beta_i))\right)^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n} \log\log\left(\beta_0(\beta_i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \hat{y}_{t-i}(\alpha(\beta_i))\right)$$

dengan $\beta_i \geq 0, 1 \leq i \leq p, \sum_{i=1}^{p} \beta_i \leq 1$. Berdasarkan persamaan (7) dan (8), dengan

$$a(\beta_i) = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\beta_0(b) + (\sum_{i=1}^{p} \beta_i \hat{\sigma}_x^2}(\beta_0(\beta_i), \beta_1, \dots, \beta_p)$$

diperoleh

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\tau_{\lambda,n}^{2}(x_1, \dots, x_n)}{E(\rho_{2,\lambda}(z))}$$

dengan z berdistribusi normal N(0,1). Parameter α diestimasi dengan menstubtitusi β dan σ_x^2 dengan $\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}_x^2$ pada persamaan (7) dan (8) [10].

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan hasil dapat disimpulkan bahwa untuk mengatasi data *time series* yang mengalami volatilitas dan heteroskedastisitas adalah dengan menggunakan model *ARCH*. Estimasi parameter model *ARCH* menggunakan filter tau untuk mengatasi outlier, oleh karena itu diperoleh model *robust ARCH* dengan estimasi filter tau. Estimasi filter tau dinotasikan dengan $\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}_x^2$ yang disubstitusikan pada parameter α.

Daftar Pustaka

[1] Alam, Md. Z., Siddikee, Md. N., and Masukujjaman, Md., (2013), Forecasting Volatility of Stock Indices with ARCH Model, *International Journal of Financial Research*, **4(2)**, 126-143

[2] Bollerslev (1986), T., Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometric*, **31(3)**, 307-327.

[3] Cook, R. D., (1977), Detection of Influential Observation in Linear Regression. *Technometrics*, **19(1)**. https://doi.org/10.1080/00401706.1977.10489493

[4] Cryer, J. D., & Chan, K.-S. (n.d.)., *Springer Texts in Statistics Time Series Analysis with Applications in R Second Edition*.

[5] Desvina, P. A., dan Khairunisa, (2018), Penerapan Metode Arch/Garch Dalam Meramalkan Transaksi Nilai Tukar (Kurs) Jual Mata Uang Indonesia (IDR) Terhadap Mata Uang Eropa (GBP*)*, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, **4**(2), 114-123.

[6] Engle, R. F., (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, **50(4)**. https://doi.org/10.2307/1912773

[7] Fox, A. J., (1972), Outliers in Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* (Methodological), **34(3)**. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1972.tb00912.x

[8] Gustiasih, R dan D. R. S. Saputro, (2018), Model Generalizedspace Time Autoregressive Integrated dengan Error Autoregressive Conditional Heteroscedastic (GSTARI-ARCH), *Prosiding Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya* (KNPMP) III, UMS.

[9] Hawkins, D. M., (1980), *Identification of Outliers. In Identification of Outliers*. https://doi.org/10.1007/978-94-015-3994-4

[10] Muler, N., & Yohai, V. J. (2002). Robust estimates for ARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 23(3). https://doi.org/10.1111/1467-9892.00268

[11] Nainggolan, W., Nainggolan, N., dan Komalig, Hanny A. H., (2018), Analisis Volatilitas Harga Eceran Komoditas Beberapa Pangan Utama di Kota Manado Menggunakan Model ARCH, *Jurnal MIPA UNSRAT ONLINE*, 7(2), 6-11.

[12] Newbold, P., (1983), ARIMA Model Building and the Time Series Analysis Approach to Forecasting, *Journal of Forecasting*, **2(1)**, 23-35

[13] Puspitasari, Kurniasih, D., Kiloes A. M., (2019), Aplikasi Model ARCH/GARCH dalam Menganalisis Volatilitas Harga Bawang Merah, *Informatika Pertanian*, **28(1)**, 21-30.

[14] Rousseeuw, P. J., & Leroy, A. M., (1987), *Robust regression and outlier detection*. Wiley.

[15] Soemartini, (2007), *Pencilan*, Universitas Padjajaran, Jatinangor

[16] Widarjono, (2018), A., *Ekonometrika: Pengantar dan Aplikasinya Disertai Panduan EViews*, UPP STIM YKPN, Yogyakarta