PENGGUNAAN DERET IN UNTUK MENENTUKAN RERATA ORDE TINGGI FUNGSI POLINOMIAL DENGAN CARA LANGSUNG

(*Using The In Series For Finding High Order Average By Directly On Polinomial Function*)

Stephanus Ivan Goenawan[1*], Kumala Indriati [2]

[1,2]Universitas Katolik Indonesia Atma Jaya, Jl. Raya Cisauk Lapan, Sampora, Kec. Cisauk, Kabupaten Tangerang, Banten 15345
e-mail: steph.goenawan@atmajaya.ac.id, kumala.indriati@atmajaya.ac.id
*) penulis korespondensi

Abstract. The High Order Average (ROT) value in the data is an extension of the First Order Mean. There are two methods to find the High Order Average, namely the first step by step and the second directly. The ROT method can directly use the IN Series. Because the process of adding data in stages does not need to be done one by one, the direct ROT method is more effective and efficient. In this study, the two methods will be compared to each other with the results of calculating the ROT data from polynomial functions. ROT calculation results from both methods have the same value.

Keywords: Average, IN Series, Interpolation, ROT

1. Pendahuluan

Metode Rerata Orde Tinggi (ROT) pada data secara perhitungan matematik dapat dilakukan dengan dua metode. Metode perhitungan ROT pertama dilakukan secara bertahap, data yang akan dicari nilai ROTnya dilakukan penjumlahan bertingkat satu-persatu. Setelah hasil penjumlahan total data secara bertingkat terpenuhi maka dilakukan pembagian dengan jumlah data bertingkat totalnya [1,7]. Sedangkan metode perhitungan ROT kedua dilakukan secara langsung, data yang akan dicari nilai ROTnya tidak perlu dilakukan penjumlahan bertingkat satu-persatu. Metode ini dapat dilakukan karena menggunakan bantuan deret IN yang mampu melakukan perhitungan penjumlahan bertingkat dari data secara langsung, setelah itu hasilnya baru dibagi dengan jumlah total data bertingkat guna mendapatkan nilai ROT.

Dalam penelitian ini data yang akan dicari nilai ROTnya berasal dari data suatu fungsi polinomial berderajat tinggi. Data yang berasal dari fungsi polinomial yang telah ditentukan ini disebut sebagai data asli. Kemudian dari sekumpulan data asli akan digunakan untuk mencari suatu fungsi yang mampu menjumlahkan data bertingkat secara langsung dengan menggunakan teknik interpolasi deret IN. Setelah fungsi ini dihasilkan, selanjutnya akan dibandingkan dengan cara bertahap dalam perhitungan mencari nilai ROT suatu data dari fungsi polinomial di daerah absis positip. Proses perhitungan ROT inilah yang disebut sebagai Metode ROT suatu data dari fungsi polinomial secara Langsung. Hasil perbandingan ROT data dari fungsi polinomial antara Metode ROT konvensional dengan Metode ROT Langsung ternyata sama, namun metode langsung ini jalannya proses perhitungannya lebih sedikit [2].

2. Metodologi

Sebelum membahas Rerata Orde Tinggi (ROT) perlu sekiranya pemahaman akan deret IN, dimana penjelasan tentang deret IN diawali dengan penjelasan deret bertingkat berderajat satu. Deret bertingkat berderajat satu menjadi penting dalam deret IN karena berperanan sebagai basis fungsi dari deret IN [4]. Deret bertingkat berderajat satu adalah deret berderajat satu yang dilakukan pengulangan kembali dalam penjumlahan, dengan batas awal satu. Agar menjadi lebih jelas, Persamaan [1] mendefinisikan notasi penjumlahan bertingkat secara bertahap, dengan t dan u adalah bilangan integer positif, dengan $t \geq 1$ dan $u \geq 0$.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{t} {}^{0} i \equiv t \\ &\sum_{i=1}^{t} {}^{1} i \equiv \sum_{i=1}^{t} i \equiv 1+2+3+\cdots+t \\ &\sum_{i=1}^{t} {}^{2} i \equiv \sum_{j}^{t} \sum_{i=1}^{j} i \equiv 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+t) \end{aligned} \tag{1}$$

Selanjutnya secara umum dapat diperoleh bentuk seperti pada Persamaan (2) berikut [4],

$$\sum_{i=1}^{t} {}^{u} i = \binom{t+u}{u+1} \tag{2}$$

Dan sebagai basis fungsi dapat ditulis seperti Persamaan (3)

$$g(i,u,t) = \sum_{j=1}^{t} {}^{u+i-1} j = \binom{u+i+t-1}{u+i} \tag{3}$$

Bentuk deret IN [4] yang menggunakan basis fungsi deret bertingkat berderajat satu dirumuskan pada Persamaan (4).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t} {}^{u} f(i) &\cong \sum_{l=0}^{\beta} b_l \cdot g(l,u,t) \\ &\cong b_0 \cdot g(0,u,t) + b_1 \cdot g(1,u,t) + b_2 \cdot g(2,u,t) + \\ &\quad b_3 \cdot g(3,u,t) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_\beta \cdot g(\beta,u,t). \end{aligned} \tag{4}$$

2.1 Pola Keteraturan Basis Dari Fungsi Bertingkat

Dari Persamaan (4) apabila dijabarkan satu persatu, mulai dari persamaan jumlahan berderajat nol, satu, dua, dst maka akan terdapat pola pergeseran variabel basis fungsi t terhadap posisi konstanta-konstanta b_j. Misal untuk memperoleh persamaan jumlahan berderajat satu dari persamaan berderajat nol caranya adalah dengan menggeser basis fungsi tiap suku satu langkah ke kiri terhadap posisi konstanta-konstanta b_j, seperti terlihat dari Persamaan (5) berikut.

$$\sum_{i=1}^{t}{}^{0} f(i) = f(t) \cong b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot \frac{t\cdot(t+1)}{2!} + b_3 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!} + \dots\dots\dots + b_\beta \cdot \frac{\prod_{k=0}^{\beta-1}(t+k)}{\beta.!}. \tag{5}$$

Persamaan (5) menjadi Persamaan (6) di bawah ini.

$$\sum_{i=1}^{t}{}^{1} f(i) = f(t) \cong b_0 \cdot t + b_1 \cdot \frac{t\cdot(t+1)}{2!} + b_2 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!} + b_3 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdot(t+3)}{4!} + \dots\dots\dots + b_\beta \cdot \frac{\prod_{k=0}^{\beta}(t+k)}{(\beta+1).!}. \tag{6}$$

Demikian juga untuk memperoleh persamaan jumlahan berderajat dua dari persamaan berderajat satu caranya juga sama yaitu dengan menggeser basis fungsi tiap suku satu langkah ke kiri terhadap posisi konstanta-konstanta b_j, seperti terlihat dari Persamaan (6) menjadi Persamaan (7).

$$\sum_{i=1}^{t}{}^{2} f(i) = f(t) \cong b_0 \cdot \frac{t\cdot(t+1)}{2!} + b_1 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!} + b_2 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdot(t+3)}{4!} + b_3 \cdot \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdot(t+3)\cdot(t+4)}{5!} + \dots\dots\dots + b_\beta \cdot \frac{\prod_{k=0}^{\beta+1}(t+k)}{(\beta+2).!}. \tag{7}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan persamaan jumlahan berderajat lebih tinggi dapat dilakukan berulang seperti proses di atas, di mana akhirnya persamaan umumnya dapat ditulis seperti Persamaan (8) di bawah ini.

$$\sum_{i=1}^{t}{}^{u} f(i) = f(t) \cong b_0 \cdot \frac{t \cdot (t+1) \cdots (t+u-1)}{u!} + b_1 \cdot \frac{t \cdot (t+1) \cdot (t+2) \cdots (t+u)}{(u+1)!} +$$

$$b_2 \cdot \frac{t \cdot (t+1) \cdot (t+2) \cdot (t+3) \cdots (t+u+1)}{(u+2)!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_\beta \cdot \frac{\prod_{k=0}^{\beta+u-1}(t+k)}{(\beta+u).!} . \qquad (8)$$

Pada formula deret IN Persamaan (5) nilai variabel *t* merupakan bilangan integer positif untuk nilai $u \geq 1$, akan tetapi bila $u = 0$ maka range untuk nilai variabel *t* berubah menjadi bilangan real sama seperti pada deret Newton. Dengan metode interpolasi deret IN maka konstanta-konstanta b_j yang menyusunnya dapat diperoleh persamaannya yaitu [2]:

$$b_0 = f(0), \qquad b_1 = -\left(f(-1) - b_0\right)$$

dan

$$b_l = \left(f(-l) - b_0 - \sum_{j=1}^{l-1} b_j \cdot \frac{\prod_{k=0}^{j-1}(-l+k)}{(j-1)!} \right) \cdot \frac{l.!}{\prod_{k=0}^{l-1}(-l+k)} \qquad (9)$$

dengan rentang nilai *l* = 2, 3, 4 ….. (bil. Integer positif).

Dari Persamaan (9) di atas dapat diperoleh hubungan untuk mendapatkan nilai konstanta b_j pada deret IN yang lebih sederhana dengan menggunakan pola angka segitiga paskal [6], yaitu:

1.
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Dari pola segitiga paskal di atas dapat tersusun persamaan konstanta b_j sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
b_0 &= +f(t=0) \\
b_1 &= -f(t=-1)+b_0 \\
b_2 &= +f(t=-2)-b_0+2\cdot b_1 \\
b_3 &= -f(t=-3)+b_0-3\cdot b_1+3\cdot b_2 \\
b_4 &= +f(t=-4)-b_0+4\cdot b_1-6\cdot b_2+4\cdot b_3 \\
b_5 &= -f(t=-5)+b_0-5\cdot b_1+10\cdot b_2-10\cdot b_3+5\cdot b_4 \\
b_6 &= -f(t=-6)-b_0+6\cdot b_1-15\cdot b_2+20\cdot b_3-15\cdot b_4+6\cdot b_5
\end{aligned} \tag{10}$$

Kemudian konstanta-konstanta b_j pada Persamaan (10) dapat disubstitusikan ke dalam deret IN pada Persamaan (8), sehingga akan diperoleh fungsi yang mampu melakukan penjumlahan bertingkat data secara langsung di daerah absis positif.

2.2 Rerata Orde Tinggi (ROT)

Nilai Rerata suatu data adalah jumlahan total dari nilai data dibagi dengan jumlah data total. Sedangkan Rerata Orde Tinggi merupakan bentuk lebih umum dari Rerata Orde Satu dari suatu data yang telah diketahui tersebut. Lebih umum karena Rerata Orde Satu, Dua, atau rerata suatu data pada umumnya yang lebih besar ini termasuk dalam bagian dari Rerata Orde Tinggi. Sehingga definisi Rerata Orde Tinggi suatu data adalah jumlahan total bertingkat dari data dibagi dengan jumlah total bertingkat data total. Pada Persamaan (3) di atas telah dirumuskan bahwa *g(i,u,t)* sebagai persamaan basis fungsi deret IN dan f_j adalah data dari fungsi polinomial, maka perumusan Rerata Orde Tinggi dapat diformulasikan dalam pola keteraturan [5] pada Persamaan (11) dan Persamaan (12) di bawah ini.

Rerata Orde Satu, u = 1
Formula Perhitungan Rerata Orde Satu Secara Bertahap

$$\overline{f}^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} f_i}{t} = \frac{f_1+f_2+\ldots+f_t}{t}$$

Formula Perhitungan Rerata Orde Satu Secara Langsung

$$\overline{f}^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=1}f_i}{g(1,0,t)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=1}f_i}{t}$$

Rerata Orde Dua, u = 2

Formula Perhitungan Rerata Orde Dua Secara Bertahap [3]

$$\overline{f}^{(2)} = \frac{\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{j} f_i}{\left(\frac{t\cdot(t+1)}{2!}\right)} = \frac{f_1 + (f_1 + f_2) + \ldots + (f_1 + \ldots + f_t)}{\left(\frac{t\cdot(t+1)}{2!}\right)}$$

Formula Perhitungan Rerata Orde Dua Secara Langsung

$$\overline{f}^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=2} f_i}{g(2,0,t)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=2} f}{\left(\frac{t\cdot(t+1)}{2!}\right)}$$

Rerata Orde Tiga, u = 3

Formula Perhitungan Rerata Orde Tiga Secara Bertahap

$$\overline{f}^{(3)} = \frac{\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} f_i}{\left(\frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!}\right)} = \frac{f_1 + (f_1 + (f_1 + f_2)) + \ldots + (f_1 + \ldots + (f_1 + \ldots + f_t))}{\left(\frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!}\right)}$$

Formula Perhitungan Rerata Orde Tiga Secara Langsung

$$\overline{f}^{(3)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=3} f_i}{g(3,0,t)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u=3} f_i}{\left(\frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)}{3!}\right)}$$

Rerata Orde Tinggi

Formula Perhitungan Rerata Orde Tinggi *u* Secara Bertahap

$$\overline{f}^{(3)} = \frac{\sum_{t_{u-1}=1}^{t_u} \cdots \sum_{t_1=1}^{t_2}\sum_{i=1}^{t_1} f_i}{\begin{pmatrix} u + t_u - 1 \\ u \end{pmatrix}} \qquad (11)$$

Formula Perhitungan Rerata Orde Tinggi *u* Secara Langsung

$$\overline{f}^{(m)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u} f_i}{g(u,0,t)} = \frac{\sum_{i=1}^{t} {}^{u} f_i}{\binom{u+t-1}{u}} \tag{12}$$

3. Hasil dan Pembahasan Perbandingan ROT

Hasil perbandingan antara metode rerata orde tinggi bertahap atau tidak langsung dengan metode rerata orde tinggi langsung menggunakan deret IN pada data berupa fungsi polinomial akan disimulasikan di bawah ini. Dalam penelitian ini, untuk perbandingan dibutuhkan fungsi asli polinomial dan dalam simulasi ini misal digunakan fungsi polinomial berderajat 5, seperti tampak pada Persamaan (13).

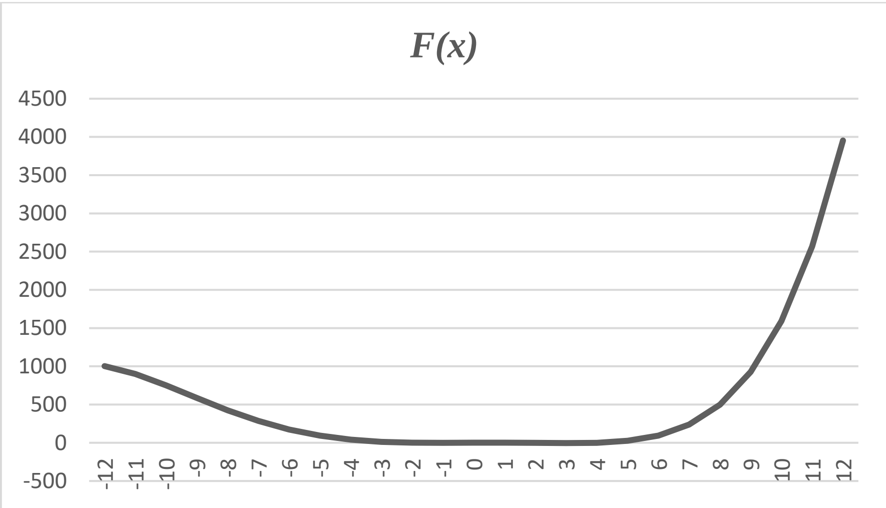
$$f(x) = 1 + 2\cdot x - 0{,}8\cdot x^2 - 0{,}6\cdot x^3 + 0{,}125\cdot x^4 + 0{,}01\cdot x^5 \tag{13}$$

Dari Persamaan (13) di atas dapat dicari nilai data interpolasi yang akan digunakan untuk mendapatkan formula fungsi jumlahan bertingkat.Karena contoh fungsi polinomial yang digunakan pada Persamaan (13) berderajat 5 maka data minimal yang digunakan adalah 6 data. Dalam simulasi ini akan digunakan 13 data yaitu mulai nilai x = 0 hingga x = -12, data dari fungsi asli polinomial untuk interpolasi menggunakan deret IN terlihat pada Tabel 2 di bawah ini.

Tabel 2. Data fungsi asli polinomial

x	*F(x)*
0	1,000
-1	-1,085
-2	0,280
-3	11,695
-4	40,360
-5	92,875
-6	174,040
-7	285,655
-8	425,320
-9	585,235
-10	751,000
-11	900,415
-12	1002,280

Untuk keperluan simulasi grafik maka dipilih rentang absis dari -12 hingga 12, sehingga dapat digambarkan representasi dari fungsi polinomial derajat 5 melalui Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Grafik fungsi polinomial berderajat lima

Setelah data asli dari fungsi polinomial Persamaan (13) dimanfaatkan untuk mencari nilai konstanta b_j menggunakan Persamaan (10) maka nilainya dapat dihasilkan pada Tabel 3 di bawah ini.

Tabel 3. Nilai konstanta-konstanta b_j dari deret IN

n	b_n
0	1,000
1	2,085
2	3,450
3	-6,600
4	0,600
5	1,200
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0

Kemudian nilai konstanta b_n pada Tabel 2 disubstitusikan ke dalam Persamaan (4) sehingga diperoleh fungsi baru hasil interpolasi seperti pada Persamaan (14) berikut:

$$\sum_{i=1}^{t} {}^{u} f(i) \cong b_0 \cdot g(0,u,t) + b_1 \cdot g(1,u,t) + b_2 \cdot g(2,u,t) + \cdots + b_\beta \cdot g(\beta,u,t). \tag{14}$$

Selanjutnya dilakukan tes uji perbandingan perhitungan ROT dengan metode konvensional dengan metode langsung menggunakan Persamaan (11) dan Persamaan (12) dengan menggunakan bantuan program Excell. Untuk simulasi perbandingan ini digunakan jumlah data asli sebanyak sepuluh, nilai absis dari $x = 1$ hingga $x = 10$, langkah pertama adalah mencari nilai ROT orde tinggi secara bertahap yang dihasilkan dapat dilihat pada Tabel 4 di bawah ini.

Tabel 4. Perhitungan ROT secara bertahap

x	*F(x)*	$\Sigma^1 F(x)$	$\Sigma^2 F(x)$	$\Sigma^3 F(x)$	$\Sigma^4 F(x)$	$\Sigma^5 F(x)$
1	1,735	1,735	1,735	1,735	1,735	1,735
2	-0,68	1,055	2,79	4,525	6,26	7,995
3	-3,845	-2,79	0	4,525	10,785	18,78
4	0,04	-2,75	-2,75	1,775	12,56	31,34
5	25,375	22,625	19,875	21,65	34,21	65,55
6	94,36	116,985	136,86	158,51	192,72	258,27
7	238,195	355,18	492,04	650,55	843,27	1101,54
8	498,28	853,46	1345,5	1996,05	2839,32	3940,86
9	927,415	1780,875	3126,375	5122,425	7961,745	11902,61
10	1591	3371,875	6498,25	11620,68	19582,42	31485,03
JT* =	3371,875	6498,25	11620,68	19582,42	31485,03	48813,7
JD** =	10	55	220	715	2002	5005
ROT =	337,1875	118,15	52,82125	27,388	15,72679	9,752987

Keterangan:
*JT : Jumlah Total dari Nilai Data
**JD : Jumlah Data

Kemudian langkah kedua, menentukan nilai ROT orde tinggi secara langsung dengan menggunakan Persamaan (14). Fungsi interpolasi ini digunakan untuk mencari nilai jumlahan bertingkat mulai dari tingkat satu hingga tingkat enam untuk nilai $x = 10$. Setelah itu baru nilai jumlahan tersebut dibagi dengan banyaknya Jumlah Data (JD) tiap jumlahan bertingkat. Hasil yang diperoleh dapat dilihat pada kolom *ROT-u* pada Tabel 5 di bawah ini.

Tabel 5. Perhitungan ROT secara langsung pada nilai $x = 10$

u	$\Sigma^u F(x)$	*JD*	*ROT-u*
1	3371,875	10	337,1875
2	6498,25	55	118,15
3	11620,68	220	52,82125
4	19582,42	715	27,388
5	31485,03	2002	15,72679
6	48813,7	5005	9,752987

Hasil simulasi perhitungan ROT orde tinggi secara bertahap pada Tabel 4 dapat dibandingkan dengan ROT orde tinggi secara langsung pada Tabel 5. Hasil perbandingan kedua tabel menunjukkan bahwa nilai ROT dengan dua metode yang berbeda menghasilkan nilai yang sama.

4. Kesimpulan

Rerata Orde Tinggi suatu fungsi polinomial dapat dihitung secara bertahap (konvensional) ataupun secara langsung menggunakan deret IN. Dalam penelitian ini, data untuk perhitungan ROT yang dilakukan penjumlahan adalah data di daerah x bernilai positif dari fungsi polinomial. Hasil perbandingan dalam perhitungan ROT antara metode bertahap dengan metode langsung bernilai sama. Apabila diterapkan dalam algoritma pemrograman maka komputasi dengan metode perhitungan ROT secara langsung dengan menggunakan Deret IN akan lebih efektif dan efisien dari segi langkah penjumlahan data, karena langkah penjumlahan data bertingkat tidak perlu dijumlahkan satu persatu. Pada hasil penelitian ROT ini telah dihasilkan dua penemuan baru yang didaftarkan Hak Kekayaan Intelektual (HKI)-nya, yaitu: klaim pertama adalah istilah dan konsep adanya nilai Rerata Orde Tinggi (ROT) dan klaim kedua adalah dalam mencari nilai ROT dapat dihasilkan secara langsung tidak perlu bertahap. Aplikasi ROT ini dapat digunakan pada Analisa Timbangan Data guna menimbang dan menganalisis data kuesioner atau perdagangan (*trading*).

Daftar Pustaka

[1] Bakker, A., (2003), The Early History Of Average And Implications For Education, *Journal of Statistics Education*, **11(1)**, 17-26, https://doi.org/10.1080/10691898.2003.11910694.

[2] Goenawan, S. I., Indriati, K., (2021), Metode Rerata Orde Tinggi Data Fungsi Polinomial Secara Langsung Via Deret IN: Lebih Efektif & Efisien daripada Cara Konvensional, *HKI No.EC00202135532*, 27 Juli 2021.

[3] Goenawan, S. I., Natalia, C., Sejahtera, F. P., (2021), Analisa Timbangan Data Dampak Positif Dan Negatif Dompet Digital, *Prosiding Seminar Nasional Riset dan Teknologi Terapan* (*RITEKTRA*), ISSN: 2807-999X.

[4] Goenawan, S. I., (2020), Comparison Simulation Analysis Of The Gradual Summation Of A Function With Recognition Of Direct Extrapolation Via IN Series, *IJASST*, https://www.e-journal.usd.ac.id/index.php/IJASST/article/view/1969/0, p-ISSN 2655-8564, e-ISSN 2685-9432.

[5] Goenawan, S. I., (2003), Deret Bertingkat Berderajat Satu dalam Teori Keteraturan, *Metris*, **4(1)**, 50-56, ISSN: 1411-3287.

[6] Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O., (1994), Binomial Coefficients, *Concrete Mathematics*, pp. 153-256, ISBN: 978-0-201-55802-9.

[7] Merigo, J. M., Cananovas, M., (2009), The Generalized Hybrid Averaging Operator and its Application in Decision Making, *Journal of Quantitative Methods for Economics and Business Administration*, pp. 69-84, ISSN 1886-516X.