KEANTIAJAIBAN SUPER TOTAL SELIMUT PADA COMB SISI GRAF TANGGA SEGITIGA DENGAN AMALGAMASI GRAF SIKEL DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Ulul Azmi[1], Dafik[2], Susi Setiawani[3]
ululazmi29011995@gmail.com

Cover total Labeling (a, d) -H- anti magical on a graph G = (V, E) is a bijective function of the points and edges on the set of integers from 1, 2, 3, ... |V(G)|+|E(G)|, *for every subgraph H of G which is isomorphic to H has a total different labeling and form of arithmetic sequence. H-labeling is said to have super anti magical if point labeling and edge labeling where the label side of a point less than the edge side label labeling side is done after labeling point. One technique that can be applied to get a super anti-magic total labeling blanket on a graph that is engineering the partition of the set of integers with different sets d. Partition symbolized In this article examines the super labeling (a, d) -* C_{m+2}*- anti magical total covering of an edge comb product triangular ladder graph and amalgamation cycle graph. Graf obtained by taking one copy of triangular ladder graph and |E(L)| copies of amalgamation cycle graph and grafting the i-th copy of amalgamation cycle graph at the edges to the i-th edge of triangular ladder graphwhich denoted The graph is labeled in order to obtain a new partition variations.*

Kata Kunci:
Super (a,d)-C_{m+2}*-Antimagic Total Selimut, Comb Sisi Graf Tangga Segitiga dengan Amalgamasi Graf Sikel*

PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang seiring dengan kemajuan jaman serta munculnya permasalahan untuk memenuhi kebutuhan manusia dalam kehidupan sehari-hari. Dibutuhkan proses berpikir untuk mencari solusi dan menciptakan inovasi-inovasi baru untuk membantu aktivitas kehidupan manusia dalam pemenuhan kebutuhan dan menyelesaikan permasalahannya. Glass dan Holyoak mengatakan bahwa berpikir dapat didefinisikan sebagai proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara komplek antara atribut- atribut mental seperti penilaian, abstraksi, penalaran, imajinasi dan pemecahan masalah [10]. Oleh karena itu, manusia tidak bisa lepas dari proses berpikir.

[1]Mahasiswa Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[2] Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[3]Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

Keterampilan berpikir tingkat tinggi sangat diperlukan oleh setiap individu mengingat dewasa ini ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat pesat.Keterampilan berpikir tingkat tinggi merupakan keterampilan kognitif tertinggi dari Taksonomi Bloom. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif dalam enam tingkatan, yaitu mengingat (*remembering*), pemahaman (*understanding*), penerapan (*application*), analisis (*analysis*), evaluasi (*evaluation*), dan mencipta (*creating*) [8]. Keterampilan berpikir tingkat tinggi dapat ditingkatkan melalui salah satu cabang ilmu matematika yaitu matematika diskrit yang memuat teori graf dalam kajiannya. Salah satu topik dalam teori graf yang banyak dikembangkan adalah pelabelan graf

Berdasarkan elemen-elemennya, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis yaitu pelabelan titik, sisi dan total. Jika elemen yang dilabeli adalah titik, maka disebut pelabelan titik *(vertex labelling).* Jika elemen yang dilabeli adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi *(edge labelling).* Kemudian jika elemen yang dilabeli berupa titik dan sisi, mak disebut pelabelan total *(total labelling)* [11]. Jenis pelabelan yang banyak dikembangkan adalah pelabelan ajaib (*magic*) dan pelabelan anti-ajaib (*antimagic*). Pelabelan antimagic merupakan pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990), mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antimagic, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $\{1,2,3,..., e_G\}$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Suatu selimut dari graf G adalah $H=\{H_1, H_2, H_3, ..., H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatuJika untuk setiapH_i isomorfik dengan suatu graf H, maka H dikatakan suatu selimut-H dari G. Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut-H.

Inayah et al. [5] mengembangkan pelabelan selimut *(a,d)*- H- anti ajaib pada suatu graf G yaitu pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ terdapat bilangan bulat $\{1, 2, 3, . . . ,|V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H' dari G yang isomorfis dengan H dimana $\sum H' = \sum_{v \epsilon V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \epsilon E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d, . . .,a+(s-1)d\}$dimana a, d bilanganpositif dengan a adalah suku pertama, d adalah beda,dan s adalah jumlah selimutnya. Jika $\lambda(v)_{v \epsilon V} = \{1,2,3 . . . ,|V(G)|\}$ maka graf G dikatakan memiliki pelabelan H- anti ajaib super.

Salah satu teknik yang dapat diterapkan untuk mendapatkan pelabelan super *(a,d)*-H-anti ajaib pada suatu graf yaitu teknik partisi dari himpunan bilangan bulat dengan menetapkan beda *d*. Misalkan {*n, c, d, i,*} dan *k* merupakan bilangan bulat positif dimana *n* jumlah kolom, *c* jumlah baris, *d* beda, *i* baris dan *k* selimut atau kolom. Partisi $\mathcal{P}_{c,d}{}^{n}(i,k)$ dari himpunan {1, 2, 3,. . .,*cn*} dalam *n* kolom, $n \geq 2$, dan *c* baris adalah partisi pelabelan super *(a,d)-H*-anti ajaib dengan jumlah bilangan-bilangan sebanyak *c* baris untuk masing-masing kolom membentuk barisan aritmatika dengan beda *d* dan *k*=1, 2, . . .,*n*. $\sum\mathcal{P}_{c,d}{}^{n}(i,k)$ adalah jumlah bilangan pada $P_{c,d}^{n}(i,k)$dan $d = P_{c,d}^{n}(i,k-1)$-$P_{c,d}^{n}(i,k)$. Notasi $P_{c,d}^{n}(i,k) \oplus b$ artinya setiap bilangan pada $P_{c,d}^{n}(i,k)$ ditambahkan n dengan b, dimana b dapat berupa bilangan asli atau anggota partisi yang lain [2].

Salah satu jenis graf yang belum diketahui super (*a*,*d*)-*H-antimagic* total selimut adalah comb sisi dari graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf tangga segitiga dan salinan amalgamasi graf sikel sebanyak simpul graf tangga segitiga dengan cara melekatkan satu simpul dari setiap amalgamasi graf sikel ke setiap simpul graf tangga segitiga yang dinotasikan Penelitian ini menggunakan comb sisi dari graf tangga segitiga karena comb sisi dari graf tangga segitiga merupakan graf *well known*, graf yang mudah dilabeli titik dan sisinya, peneliti sebelumnya belum ada yang menggunakan comb sisi dari graf tangga segitiga untuk pelabelan total selimut. Beberapa hasil penelitian super *(a,d)-H*-anti ajaib total selimut yang telah ditemukan diantaranya lihat [1], [6],[7],[9].

Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas *d* yang berbeda dan nilai *d* tidak tunggal. Nilai dengan *d* adalah bilangan bulat non negatif dan *s* merupakan nilai terbesar *d* dalam suatu graf. Tujuan menentukan batas atas ini adalah mengetahui nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super (a,d)-H- anti ajaib total selimut. Oleh karena itu, peneliti akan mengembangkan pelabelan super (a,d)-H-*antimagic* total selimut pada comb sisi dari graf tangga segitiga dan akan mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari pelabelan selimut dari comb sisi dari graf triangular ladder dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang menggunakan acuan taksonomi Bloom.

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif aksiomatik yaitu metode menurunkan aksima atau terema yan sudah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan super (*a,d*)-*H*-antimagic total selimut pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi grasikel konektif dan diskonektif jika pada graf tersebut ditemukan super (*a*,*d*)-*H-antimagic* total selimut maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola *(pattern recognition).* Penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan taksonomi Bloom yang elah direvisi yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevalusi, dan menciptakan. Setiap langkah dalam penelitian ini dikaitkan dengan tahapan-tahapan tersebut untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

HASILDAN PEMBAHASAN

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui fungsi bijektif konektif, diskonektif,dan keterampilan berpikir tingkat tinggi dari pelabelan super (*a*,*d*)-C_{m+2}-*antimagic* total selimut pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel konektif dan diskonekti. Hasil penelitian untuk pelabelan super (*a*,*d*)-C_{m+2}-*antimagic* total selimut pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel konektifdan diskonektif , yakni:

Observasi 1. *Misal pG, pH, qG, qH berturut-turut adalah jumlah titik dan jumlah sisi pada comb sisi dari graf* tangga segitiga *dan amalgamasi graf sike*l *konektif serta m, r, n, dan s merupakan bilangan bulat dengan m dan r merupakan jumlah titik dan sisi pada satu selimut, s merupakan banyaknya graf G, dan n banyak amalgamasi pada graf sikel maka pG = nm(4s+1)+2(s+1), pH =m+2, qG=rn(4s+1)+4s+1, qH=r+1.*

Bukti

$$d \leq p_H^2 - 2p_H + q_H^2 - q_H + \frac{2sp_H + 4sq_H}{n(4s+1) - 1}$$

Jika graf *G* memiliki super (a,d)-Cm+2 *antimagic* total selimut pada comb sisi dari graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel Selanjutnya penentuan fungsi bijektif dari pengembangan partisi yang ditemukan dan variasi nilai beda pada pelabelan super (*a*,*d*)-Cm+2-*antimagic* total selimut akan disesuaikan dengan nilai *d* yang telah ditetapkan.

Lema 1.1.*Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari* $P_{m,d}^{n,s}(i,j,k)$*membentuk barisan aritmatik yang berbeda* $d = \frac{1}{4}$.

Fungsi	*Keterangan*
$ns(i-1)+n(k-1)+j$	$i \equiv 1$ *(mod 4)*
$ins-n(k-1)-j+1$	$i \equiv 2$ *(mod 4)*
$ns(i-1)+\frac{k+1}{2}+s(\frac{j+1}{2})-s$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in ganjil$
$ns(i-1)+\frac{k}{2}+s(\frac{j}{2})-\frac{s-1}{2}$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in genap, k \in genap$
$ns(i-1)+\frac{k}{2}+s(\frac{j+1}{2})+\frac{ns+1}{2}-s$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in genap$
$ns(i-1)+\frac{k+1}{2}+s(\frac{j}{2})+\frac{ns+s}{2}-s$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in genap, k \in ganjil$
$ns(i-1)+\frac{k}{2}+s(\frac{j+1}{2})-s$	$i \equiv 0$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in genap$
$ns(i-1)+\frac{k+1}{2}+s(\frac{j}{2})-\frac{s+1}{2}$	$i \equiv 0$ *(mod 4)*$, j \in genap, k \in ganjil$
$ns(i-1)+\frac{k+1}{2}+s(\frac{j+1}{2})+\frac{ns-1}{2}-s$	$i \equiv 0$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in ganjil$
$ns(i-1)+\frac{k}{2}+s(\frac{j}{2})+\frac{ns-1}{2}+\frac{s+1}{2}-s$	$i \equiv 0$ *(mod 4)*$, j \in genap, k \in genap$

Bukti. Perhitungan sederhana untuk j= 1, 2, 3, ..., n dan k=1, 2, 3, ..., s

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_{m,d}^{s,n}(i,k,j) &= \mathcal{P}_{m,d}^{s,n}(k,j) \\
&= \{\frac{m}{8}(4mns-ns-2s+3)+\frac{m}{4}(js+k)\} \\
&= \{\frac{m}{8}(4mns-ns-2s+3)+\frac{m}{4}(s+1), \frac{m}{8}(4mns-ns-2s \\
&\quad +3)+\frac{m}{4}(s+2), \ldots, \frac{m}{8}(4mns-ns-2s+3)+\frac{m}{4}(2s), \frac{m}{8} \\
&\quad (4mns-ns-2s+3)+\frac{m}{4}(2s+1), \ldots, \frac{m}{8}(4mns-ns- \\
&\quad 2s+3)+\frac{m}{4}(sn+s)\}
\end{aligned}$$

terbukti. □

Lema 1.1.*Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari* $P_{m,d}^{n,s}(i,j,k)$*membentuk barisan aritmatik yang berbeda* $d = -\frac{1}{4}$.

Fungsi	*Keterangan*
$ins-(j-1)n-k+1$	$i \equiv 1$ *(mod 4)*
$ns(i-1)+(j-1)n+k$	$i \equiv 2$ *(mod 4)*
$ns(i-1)-\frac{k+1}{2}-(\frac{j+1}{2})s+\frac{ns+1}{2}+s+1$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in ganjil$
$ns(i-1)-\frac{k}{2}-(\frac{j}{2})s+\frac{ns-s}{2}+s+1$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in genap, k \in genap$
$ins-\frac{k}{2}-s(\frac{j+1}{2})+s-1$	$i \equiv 3$ *(mod 4)*$, j \in ganjil, k \in genap$

$ins - \frac{k}{2} - s(\frac{j+1}{2}) + s - 1$	$i \equiv 3 \ (mod\ 4), j \in ganjil, k \in genap$
$ns(i-1) - \frac{k+1}{2} - s(\frac{j}{2}) - \frac{s-1}{2} + s + 1$	$i \equiv 3 \ (mod\ 4), j \in genap, k \in ganjil$
$ns(i-1) - \frac{k}{2} + s(\frac{j+1}{2}) + \frac{ns-1}{2} + s + 1$	$i \equiv 0 \ (mod\ 4), j \in ganjil, k \in genap$
$ins - ns - \frac{k+1}{2} - s(\frac{j}{2}) + \frac{ns-s}{2} + s + 1$	$i \equiv 0 \ (mod\ 4), j \in genap, k \in ganjil$
$ins - \frac{k}{2} - s(\frac{j}{2}) + s - 2$	$i \equiv 0 \ (mod\ 4), k \in genap, j \in genap$
$ins - \frac{k+1}{2} - s(\frac{j+1}{2}) + s + 1$	$i \equiv 0 \ (mod\ 4), k \in ganjil, j \in ganjil$

Bukti. Perhitungan sederhana untuk j= 1, 2, 3, ..., n dan k=1, 2, 3, ..., s

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_{m,d}^{s,n}(i,k,j) &= \mathcal{P}_{m,d}^{s,n}(k,j)\\ &= \{\frac{m}{8}(4mns + ns + 3s) - \frac{m}{4}(js + k)\}\\ &= \{\frac{m}{8}(4mns + ns + 3s) - \frac{m}{4}(s+1), \frac{m}{8}(4mns + ns + 3s) - \frac{m}{4}\\ &\quad (s+2), \ldots, \frac{m}{8}(4mns + ns + 3s) - \frac{m}{4}(2s), \frac{m}{8}(4mns + ns +\\ &\quad 3s) - \frac{m}{4}(2s+1), \ldots, \frac{m}{8}(4mns + ns + 3s) - \frac{m}{4}(sn + s)\}\end{aligned}$$

terbukti. □

Teorema 1. *Misal m, n, dan s adalah bilangan bulat positif* $m \geq 3$ $n \in ganjil$ *maka comb sisi dari graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel yang dinotasikan dengan* $L_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$ *memiliki super (a,d)-H-antiajaib total selimut dengan.*

$a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_1}{4} - \frac{m_2}{4} + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{r_1}{4} - \frac{r_2}{4} + r_3 - r_4 + r_5^2 - r_6^2$

Bukti. Menurut kardinalitas titik dan sisi pada comb sisi graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel memiliki himpunan titik $V_1 = \{x_{i,k}\,; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq k \leq s\}$ dan $V_2 = \{v_{i,j,k}\,;\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq 4s+1; 1 \leq j \leq n\}$ himpunan sisi $E_1 = \{x_{i,k}\,x_{i,k+1}, x_{i,k}x_{i+1,k}, x_{i,k}x_{i+1,k+1}\,;\ 1 \leq i \leq 2;\ 1 \leq k \leq 4s+1\}$ dan $E_2 = \{e_{i,l,j}\,;\ 1 \leq l \leq r, 1 \leq j \leq n\}$. Sehingga jumlah titik $|V_1|$=2s+2dan $|V_2|$=mn(4s+1) maka p_G= $|V_1|+|V_2|$=mn(4s+1)+2s+2, jumlah sisi $|E_1|$=4s+1 dan $|E_2|$=r maka $q_G=|E_1|+|E_2|=cn+t$ sedangkan $p_H=m+2$ dan $q_H=r+1$ dengan jumlah selimut n . Selanjutnya labeli titik dan sisinya sebagai berikut.

$$f(V_1) = \{i + 2k - 2, 1 \leq k \leq 2s + 2, 1 \leq i \leq 2\}$$

$$f(V_2) = \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_1,\frac{m_1}{4}} \oplus (2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_2,-\frac{m_2}{4}} \oplus m_1 n(4s+1) + (2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_3,m_3} \oplus m_2 n(4s+1) + m_1 n(4s+1) + (2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_4,-m_4} \oplus m_3 n(4s+1) + m_2 n(4s+1) + m_1 n(4s+1) + (2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_5,m_5^2} \oplus (n(4s+1)\textstyle\sum_{a=1}^{4} m_a + (2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{m_6,-m_6^2} \oplus (n(4s+1)\textstyle\sum_{a=1}^{5} m_a + (2s+2)\}$$

$$f(E_1) = \bigcup_{k=1}^{s} \{4mns + mn + 6s - k + 1, 1 \leq k \leq 4s + 1\}$$

$$f(E_2) = \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_1,\frac{r_1}{4}} \oplus (mn(4s+1) + 4s + 1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_2,-\frac{r_2}{4}} \oplus (r_1 n(4s+1) + mn(4s+1) + 4s + 1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_3,r_3} \oplus (r_2 n(4s+1) + r_1 n(4s+1) + mn(4s+1) + 4s + 1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_4,-r_4} \oplus (r_3 n(4s+1) + r_2 n(4s+1) + r_1 n(4s+1) + mn(4s+1) + 4s + 1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_5,r_5^2} \oplus (n(4s+1)\textstyle\sum_{a=1}^{4} r_a + mn(4s+1) + 4s + 1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_6,-r_6^2} \oplus (n(4s+1)\textstyle\sum_{a=1}^{5} r_a + mn(4s+1) + 4s + 1)\}$$

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_4 + \mathrm{m}_5 + \mathrm{m}_6 \ \ dan\ \ \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_4 + \mathrm{r}_5 + \mathrm{r}_6$$

Terlihat bahwa $f{:}V_1 \cup V_2 \rightarrow \{1,2,\ldots,|V(G)|\}$ dan $f{:}E_1 \cup E_2 \rightarrow \{|V(G)|+1,|V(G)|+2,\ldots,|V(G)|+|E(G)|\}$. Jika W adalah bobot total selimut, maka W dapat diperolehdengan menjumlahkan seluruh label titik dan sisi diatas dengan $k=1,2,\ldots,n$. Dengan mudah dapat dilihat bahwa bobot total terkecilnya adalah $a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_1}{4} - \frac{m_2}{4} + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{r_1}{4} - \frac{r_2}{4} + r_3 - r_4 + r_5^2 - r_6^2$

Observasi 2. *Misal p_G, p_H, q_G, q_H berturut-turut adalah jumlah titik dan jumlah sisi pada comb sisi dari graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel diskonektif serta m, r, n, s, dan c merupakan bilangan bulat dengan m dan r merupakan jumlah titik dan sisi pada satu selimut, s merupakan banyaknya graf G, n banyak amalgamasi pada graf sikel, dan c merupakan banyaknya salinan eksponensial graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel, maka $p_G = cnm(4s+1)+2(s+1)$, $p_H = m+2$, $q_G = crn(4s+1)+4s+1$, $q_H = r+1$.*

Bukti. Comb sisi pada graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel memiliki pelabelan super *(a,d)-H*-anti ajaib total selimut dan memiliki himpunan titik dan , himpunan sisi. Sehingga memiliki j*umlah titik $pG = ncm(4s+1)+c2(s+1)$ dan jumlah sisi $qG=rcn(4s+1)+c(4s+1)$, jumlah titik selimut $pH=m+2$ serta jumlah sisi selimut $qH=r+1$ maka batas atas nilai beda (d) sebagai berikut:*

$$d \ \leq \ p_H^2 - 2cp_H + q_H^2 - q_H + \frac{2cs(p_H + 2q_H)}{cn(4s+1) - 1}$$

Jika graf *G* memiliki super (a,d)-Cm+2 *antimagic* total selimut pada comb sisi dari graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel Selanjutnya penentuan fungsi bijektif dari pengembangan partisi yang ditemukan dan variasi nilai beda pada pelabelan super (*a*,*d*)-Cm+2-*antimagic* total selimut akan disesuaikan dengan nilai *d* yang telah ditetapkan.

Lema 2.1.*Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari* $P_{m,d}^{n,s,c}(i,j,k,t) = \{insc - nsc - c(s+1) + jsc + ck + t; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s; 1 \leq t \leq c\}$*membentuk barisan aritmatik yang berbeda* $d = m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_{m,d}^{s,n,c}(i,k,j,t) &= \mathcal{P}_{m,d}^{s,n,c}(k,j,t) \\
&= \{\frac{m}{2}(mnsc - nsc - 2sc - 2c) + m(jsc + ck + t)\} \\
&= \{\frac{m}{2}(mnsc - nsc - 2sc - 2c) + m(sc + c + 1), \\
&\quad \frac{m}{2}(mnsc - nsc - 2sc - 2c) + m(2sc + 2c + 2), \ldots, \\
&\quad \frac{m}{2}(mnsc - nsc - 2sc - 2c) + m(nsc + sc + c)\}
\end{aligned}$$

terbukti. □

Lema 1.1.*Misal m, n dan s bilangan bulat positif dengan variasi nilai beda. Jumlah dari* $P_{m,d}^{n,s,c}(i,j,k,t) = \{insc + sc + c + 1 + jsc + ck + t; 1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq s; 1 \leq t \leq c\}$*membentuk barisan aritmatik yang berbeda* $d = -m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_{m,d}^{s,n,c}(i,k,j,t) &= \mathcal{P}_{m,d}^{s,n,c}(k,j,t) \\
&= \{\frac{m}{2}(mnsc + nsc + 2sc + 2c + 2) - m(jsc + ck + t)\} \\
&= \{\frac{m}{2}(mnsc + nsc + 2sc + 2c + 2) - m(sc + c + 1), \\
&\quad \frac{m}{2}(mnsc + nsc + 2sc + 2c + 2) - m(2sc + 2c + 2), \ldots, \\
&\quad \frac{m}{2}(mnsc + nsc + 2sc + 2c + 2) - m(nsc + sc + c)\}
\end{aligned}$$

terbukti. □

Teorema 1.*Misal m, n, c dan s adalah bilangan bulat positif* $m \geq 3$ $n \in ganjil$ *maka comb sisi dari graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel yang dinotasikan dengan* $tL_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$ *memiliki super (a,d)-H-antiajaib total selimut dengan.*

$a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_7}{4} - \frac{m_8}{4} + m_9 - m_{10} + \frac{r_7}{4} - \frac{r_8}{4} + r_9 - r_{10}$

Bukti. Menurut kardinalitas titik dan sisi pada comb sisi graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel memiliki himpunan titik $V_1 = \{x_{i,k}^t \; ; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq k \leq s, \; 1 \leq$

$t \leq c\}$ dan $V_2 = \{v_{i,j,k}^t;\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq 4s+1; 1 \leq j \leq n; 1 \leq t \leq c\}$ himpunan sisi $E_1 = \{x_{i,k}^t x_{i,k+1}^t, x_{i,k}^t x_{i+1,k}^t,\ x_{i,k}^t x_{i+1,k+1}^t;\ 1 \leq i \leq 2;\ 1 \leq k \leq 4s+1; 1 \leq t \leq c\}$ dan $E_2 = \{e_{l,k,j}^t;\ 1 \leq l \leq r; 1 \leq k \leq 4s+1;\ 1 \leq j \leq n; 1 \leq t \leq c\}$. Sehingga jumlah titik $|V_1|=$ c(2s+2)dan $|V_2|=$ cmn(4s+1) maka $p_G= |V_1|+|V_2|=$ cmn(4s+1)+ c (2s+2), jumlah sisi $|E_1|=$ c(4s+1) dan $|E_2|=$ cr maka $q_G=|E_1|+|E_2|=cn(4s+1)+1$ sedangkan $p_H=m+2$ dan $q_H=r+1$ dengan jumlah selimut n . Selanjutnya labeli titik dan sisinya sebagai berikut.

$$f(V_1) = \begin{cases} \{\frac{t+1}{2} + 2c(k-1); & i=1;\ k \equiv 1 \pmod 3; t \in ganjil; \\ \{\frac{t}{2} + \frac{c+1}{2} + 2c(k-1); & i=1;\ k \equiv 1 \pmod 3; t \in genap; \\ \{2c(k-1) - t + 1; & i=1;\ k \equiv 2 \pmod 3; \\ \{\frac{t}{2} + 2c(k-1); & i=1;\ k \equiv 0 \pmod 3; t \in genap; \\ \{\frac{t+1}{2} + \frac{c-1}{2} + 2c(k-1); & i=1;\ k \equiv 1 \pmod 3; t \in ganjil; \\ \{\frac{t}{2} + 2ck - c; & i=2;\ k \equiv 1 \pmod 3; t \in genap; \\ \{\frac{t+1}{2} + \frac{c-1}{2} + 2ck - c; & i=2;\ k \equiv 1 \pmod 3; t \in ganjil; \\ \{\frac{t+1}{2} + 2c(k+1); & i=2;\ k \equiv 2 \pmod 3; t \in ganjil; \\ \{\frac{t}{2} + \frac{c+1}{2} + c(2k-1); & i=2;\ k \equiv 2 \pmod 3; t \in genap; \\ \{2kc - t + 1); & i=2;\ k \equiv 0 \pmod 3; \end{cases}$$

$$f(V_2) = \{\mathcal{P}^{s,n,c}_{m_7,\frac{m_7}{4}} \oplus c(2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n,c}_{m_8,-\frac{m_8}{4}} \oplus m_7nc(4s+1) + c(2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n,c}_{m_9,m} \oplus m_8nc(4s+1) + m_7nc(4s+1) + c(2s+2)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n,c}_{m_{10},m_{10}} \oplus m_9nc(4s+1)m_8nc(4s+1) + m_7nc(4s+1) + c(2s+2)\}$$

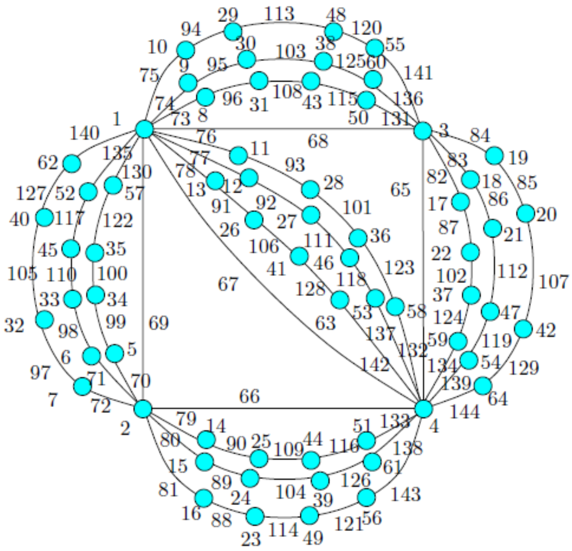
$$f(E_1) = \begin{cases} \{4sc - ck + 2c - t + 1; & k \equiv 1 \pmod 3; \\ \{4sc - \frac{t+1}{2} - \frac{c+1}{2} - ck + 2c + 2; & k \equiv 1 \pmod 3; t \in ganjil; \\ \{4sc - \frac{t}{2} - ck + c + 2; & k \equiv 2 \pmod 3; t \in genap; \\ \{4sc - \frac{t}{2} - ck + \frac{6c+5}{2}; & k \equiv 0 \pmod 3; t \in genap; \\ \{4sc - \frac{t+1}{2} - ck + c + 2; & k \equiv 1 \pmod 3; t \in ganjil; \end{cases}$$

$$f(E_2) = \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_7,\frac{r_7}{4}} \oplus cmn(4s+1) + c(4s+1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_8,-\frac{r_8}{4}} \oplus r_7cn(4s+1) + cmn(4s+1) + c(4s+1)\} \cup \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_9,r_9} \oplus r_8cn(4s+1) + r_7cn(4s+1) + cmn(4s+1) + c(4s+1)\} \oplus \{\mathcal{P}^{s,n}_{r_{10},-r_{10}} \oplus r_9cn(4s+1) + r_8cn(4s+1) + r_7cn(4s+1) + cmn(4s+1) + c(4s+1)\}$$

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_4 + \mathrm{m}_5 + \mathrm{m}_6\ \ dan\ \ \mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_3 + \mathrm{r}_4 + \mathrm{r}_5 + \mathrm{r}_6$$

Terlihat bahwa $f{:}V_1\cup V_2 \rightarrow \{1,2,...,|V(G)|\}$ dan $f{:}E_1\cup E_2 \rightarrow \{|V(G)|+1,|V(G)|+2,...,|V(G)|+|E(G)|\}$. Jika W adalah bobot total selimut, maka W dapat diperolehdengan menjumlahkan seluruh label titk dan sisi diatas dengan $k=1,2,...,n$. Dengan mudah dapat dlihat bahwa bobot total terkecilnya adalah $a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_7}{4} - \frac{m_8}{4} + m_9 - m_{10} + \frac{r_7}{4} - \frac{r_8}{4} + r_9 - r_{10}$.

Sebagai ilustrasi akan dicontohkan comb sisi pada graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel sebagai berikut.Gambar.1 berikut merupakan contoh dari super (652,3) –(C_{m+2})- antiajaib total selimut pada comb sisi dari graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel konektif$L_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$. Dari gambar beikut terlihat jelas label titik dan label sisi pada comb sisi graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel konektif.



Gambar.1 Super (652,3)-(Cm+2)-anti ajaib pada $L_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$

Keterkaitan antara level berpikir menurut Bloom dengan proses berpikir tingkat tinggi pada super *antimagic* toal selimut pada comb sisi dari graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel.Pada tahap pertama yaitu mengingat, peneliti akan mengingat kembali famili graf yang dibangun dengan cara mengidentifikasi famili graf. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf yang diperoleh darihasil operasi comb sisi graf tangga segitiga dengan amalgamasi graf sikel. Amalgamasi graf yang digunakan adalah amalgamasi-sisi, dimana dengan cara menempelkan sisi terminal amalgamasi-sisi graf sikel sebanyak jumlah sisi graf tangga segitiga yang dinotasikan dengan Penelitian ini akan mengekspan sebanyak *s* yaitu penambahan selimut Ls, sebanyak *m* yaitu jumlah titik graf siklus C_{m+2} sebanyak *n* yaitu jumlah kuping atau amalgamasi dari graf sikel.Tahapan yang kedua yaitu memahami, peneliti akan memahami bagaimana cara menghitung jumlah titik *p* dan sisi *q* pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf siklus baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya serta menentukan batas atas nilai beda *d*. Tahap ketiga adalah menerapkan, peneliti akan menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel tunggal dan gabungan. Pada tahapan ini harus dilakukan pemeriksaan apakah label titik pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel tunggaldan gabungan*expandable* atau *unexpandable*. Apabila pelabelan titik yang ditemukan adalah pelabelan yang *expandable,* maka penelitian dapat dilanjutkan pada tahapan selanjutnya.Tahap keempat adalah tahap menganalisa yaitu menentukan fungsi bijektif titik, sisi, dan bobot total selimut. Jika pelabelan yang didapatkan pada tahap sebelumnya memiliki pola yang sama disetiap ekspanannya, maka dengan mudah dapat ditentukan fungsi bijektif dari pelabelan titik, sisi dan bobot total selimutnya.Pada tahap ini yang akan dilakukan adalah membuktikan kebenaran fungsi yang telah dirumuskan. Membuktikan apakah fungsi yang telah dirumuskan pada graf tunggal dan gabungan sesuai dengan pola pelabelan bobot titik selimut dan bobot total selimut yang telah dibangun.Tahapan yang terakhir adalah mencipta. Pada tahapan ini peneliti meng-gunakan kata kerja menemukan teorema. Menemukan teorema yang dimaksud adalah bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yaitu pengelompokkan pada beda yang konsisten. Sesuai dengan tujuan penelitian yaitu menemukan pelabelan super *(a,d)*-C_{m+2}-*antimagic* total selimut pada comb sisi graf triangular ladder dan amalgamasi graf siklus tunggal maupun gabungan saling lepas, *a* adalah bobot sisi terkecil dan *d* adalah nilai bedanya.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka dapat disimpulkan bahwa comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel konektif yang disimbolkan dengan $L_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$ memiliki super (a,d)-C_{m+2}-anti ajaib total selimut $a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_1}{4} - \frac{m_2}{4} + m_3 - m_4 + m_5^2 - m_6^2 + \frac{r_1}{4} - \frac{r_2}{4} + r_3 - r_4 + r_5^2 - r_6^2$. Sedangkan pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel diskonektif yang dinotasikan dengan $tL_s \trianglerighteq Amal(C_{m+2,e,n})$memiliki super *(a,d)*-$C_{m+2}$-anti ajaib total selimut$a = \sum f(V_2) + \sum f(E_1) - d$ dan $d = \frac{m_7}{4} - \frac{m_8}{4} + m_9 - m_{10} + \frac{r_7}{4} - \frac{r_8}{4} + r_9 - r_{10}$.

Selain itu, kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan super *(a,d)*-C_{m+2}-*antimagic* total selimut pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat dalam mengidentifikasi famili graf, memahami dalam menghitung jumlah titik *p* dan sisi *q* serta menentukan batas atas nilai beda *d* pada menerapkan dalam menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan mencipta teorema baru.Dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada pelabelan total super *(a,d)*-C_{m+2}-*antimagic* total selimut pada comb sisi graf tangga segitiga dan amalgamasi graf sikel tunggal dan gabungan saling lepas dengan pengembangan partisi dan variasi nilai beda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Azizah, I. dan Dafik. 2014. Super (a,d)$-H-*antimagic* total selimut pada graf shackle kipas f4. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, **1**:242-250.

[2] Baca, Bronkovic, L., Lascsakova, M., Phanalasy, dan Fenovcikova, A. S. 22013. On d-Antimagic Labellings of Plane Graoph. *Electronica Journal of Graph Theory and Application*, **1**. 28-39.

[3] Dafik, Mirka, M., Ryan, J., Baca, M. 2009. *On Super (a, d)-Edge-Antimagic Total Labeling of Disconnected Graphs*. Discrete Mathematics 309 (15), 4909-4915.

[4] Dafik 2011, Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graphs. Jember: CSS.

[5] Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. *On (a,d)-H-Antimagic Covering of Graph*. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 71, 273-281.

[6] Jamil, N. A. 2014. Super (a,d)-H-Antimagic Total Covering Pada Graf Triangular Ladder. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, **1**:110-118.

[7] Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut (a, d)-H-Antiajaib Super Pada Graf Fan, Sun,dan Generalized Petersen.* Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.

[8] Krathwol, D. R. 2002. *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. Theory Into Practice*, 41 (4): 213-218.Pudyaningrum, P. R. H. 2014. Super *(a,d)-H*-Antimagic Total Covering pada Shackle Graf Triangular Book. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*

[9] Suharman. 2005. \emph{Pikologi Kognitif}. Surabaya: Srikandi.

[10] Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhäuser, 80:2.