BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* PADA SUBDIVISI GRAF SIKLUS *COMB* GRAF *STAR*

Eko Waluyo[1], Endah Tri Wisudaningsih[1], Masruro [2]
Universitas Islam Zainul Hasan Genggong, Indonesia
E-mail: ekowaluyo.inzah.tdm@gmail.com

ABSTRACT

Graceful coloring is a combination of the concepts of graceful and node coloring. Graceful coloring is defined as labeling a vertex of a graph G that satisfies an injective function from the set of vertices to the set of non-negative integers $\{1, 2, \ldots, k\}$ $such\ that\ each\ edge\ uv$ *in* G *gets labeled* $|c(u) - c(v)|$, *then the label of each side will be different. This study aims to determine the graceful coloring and chromatic numbers on a graph* $(C_n \triangleright S_m)$. *This research is a type of exploratory research using axiomatic deductive methods and pattern detection methods. This research produces a theorem about graceful coloring on cycle graphs of comb graph star which consists of three cases, namely* $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 6$; *for* $n \equiv 1\ mod\ 3$, $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 6$; *for* $n \equiv 2\ mod\ 3$, *and* $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 6$; *for* $n \equiv 0\ mod\ 3$.

Keywords : Chromatic Number, Graceful Coloring, Comb Product Operation

PENDAHULUAN

Sebagai ilmu dasar disiplin ilmu, matematika berperan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan, teknologi modern, dan kemampuan berpikir manusia. Teknologi yang mengikuti perkembangan zaman menuntut manusia untuk menghadapi masalah yang semakin kompleks. Pemecahan masalah yang semakin kompleks, manusia dituntut untuk dapat menyelesaikannya secara logis. Peran matematika adalah untuk memberi manusia pengetahuan tentang bagaimana menangani masalah, memodelkannya, mengamati akarnya secara koherensi, dan membuatnya mudah dipecahkan. Salah satu cabang matematika yang diterapkan dalam setiap bidang ilmu dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf [13].

Salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf disebut teori graf. Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong dari objek-objek yang disimbolkan dengan (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan yang mungkin kosong dari pasangan tak terurut (u, v) dari simpul-simpul u dan v yang berbeda di $V(G)$ yang dinotasikan dengan (*edge*) [7]. Teori graf ini menjelaskan adanya hubungan dan pasangan pada simpul-simpul tertentu seperti pada kehidupan yaitu hubungan antar manusia dengan ketakwaannya kepada Allah SWT dan hubungan antar sesama manusia, misalnya hubungan laki-laki dan perempuan yang sengaja diciptakan berpasang-pasangan. Seperti dalam firman Allah SWT dalam surat Yasin ayat 36:

سُبْحٰنَ الَّذِيْ خَلَقَ الْاَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْۢبِتُ الْاَرْضُ وَمِنْ اَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُوْنَ.٣٦

[1] Dosen Universitas Islam Zainul Hasan Genggong
[2] Mahasiswa Universitas Islam Zainul Hasan Genggong

Artinya: “Mahasuci (Allah) yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka sendiri, maupun dari apa yang tidak mereka ketahui.”

Ayat di atas adalah jawaban atas kedurhakaan orang-orang kafir di ayat sebelumnya. Ini menggarisbawahi bahwa Allah SWT Maha Suci, Tuhan yang menciptakan semua tanaman dan menciptakan pasangan bagi setiap tanaman untuk menghasilkan buah. Oleh karena itu, Allah SWT Sang Pencipta Maha suci atas segala kekurangan dan sifat buruk. Dapat disimpulkan bahwa Allah sudah menciptakan segala sesuatu baik benda hidup atau mati secara berpasang-pasangan, ada siang dan malam, ada suka dan duka, ada suami dan istri, ada hidup dan mati dan begitu pula seterusnya agar mereka beriman kepada Allah. Sama halnya seperti graf yang memiliki hubungan antara simpul dan sisi sehingga terbentuk pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ [9].

Teori graf pertama kali dirumuskan oleh matematikawan dan fisikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam idenya untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg. Dipahami bahwa "kota Königsberg (sekarang dikenal sebagai Klingler) di Prusia timur, Jerman, memiliki sungai bernama Pregar. Kota Königsberg terbagi menjadi empat daratan. Ada tujuh jembatan di sungai yang menghubungkan empat tempat tersebut. Permasalahan jembatan Königsberg yang terkenal adalah "Mungkinkah seseorang memulai dari benua tertentu, melewati masing-masing dari tujuh jembatan tepat satu kali, dan kembali ke daratan asalnya? Jawaban Euler tertulis dalam bukunya yang berjudul "Solutio Problematis ad Geometriam Pertinentis Site" [5].

Masalah Konisberg Bridge menjadi dasar munculnya masalah dalam dunia graf. Seiring berkembangnya zaman, perkembangan grafis juga sangat pesat. Matematikawan mempelajari pengetahuan yang berkaitan dengan teori graf untuk mendapatkan pengetahuan dan penerapannya dalam kehidupan. Salah satu topik yang berkembang pesat dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah metode pelabelan graf dengan memberikan warna pada simpul, sisi, atau daerah yang berdekatan. Terdapat banyak macam pewarnaan graf diantaranya pewarnaan simpul proper, pewarnaan ketakteraturan, dan pewarnaan *graceful*.

Penelitian ini membahas tentang pewarnaan *graceful*. Pada penelitian sebelumnya telah ditemukan hasil penelitian tentang bilangan kromatik pada graf pohon [6], bilangan kromatik dari hasil penggabungan graf tangga [10], dan bilangan kromatik dari penggabungan simpul dari graf keluarga pohon [11]. Selain itu, Zhang mendefinisikan pewarnaan *graceful* pada graf dan memperoleh bilangan kromatik dari beberapa graf [15]. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, para peneliti tertarik untuk memahami lebih jauh pewarnaan *graceful* pada graf $(C_n \rhd S_m)$. Berdasarkan penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk menganalisis bilangan kromatik *graceful* pada graf $(C_n \rhd S_m)$ sehingga nantinya akan mendapatkan bilangan kromatik *graceful* berpola dan dengan demikian memperoleh teorema baru.

Berikut merupakan Lemma pewarnaan *graceful*:
Lemma 1.1 $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan jenis penelitian kualitatif eksploratif. Penelitian yang dilakukan secara luas dan mendalam yang bertujuan untuk mengkaji dan menelaah hal baru yang kemudian hasil dari penelitiannya dapat menjadi acuan penelitian berikutnya disebut dengan penelitian eksploratif. Sebab mengapa penelitian ini merupakan penelitian eksploratif karena tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengenalkan suatu hal baru agar

 ©Kadikma, Vol.14, No.1, hal. 20-29, 2023

lebih dikenal oleh masyarakat luas serta memberikan gambaran dasar dan mengembangkan teori yang bersifat dapat diperbaharui.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakna prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang sudah ada, kemudian diterapkan dalam pewarnaan *graceful* dari $(C_n \rhd S_m)$. Kemudian, metode pendeteksi pola digunakan untuk mencari pola dan menentukan bilangan kromatik *graceful* pada $(C_n \rhd S_m)$.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pewarnaan *graceful* dan kromatik *graceful* pada graf siklus *comb* graf *star*. Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengidentifikasi graf yang akan diteliti yaitu graf siklus *comb* graf *star* $(C_n \rhd S_m)$. Kemudian menentukan kardinalitas dari graf tersebut.

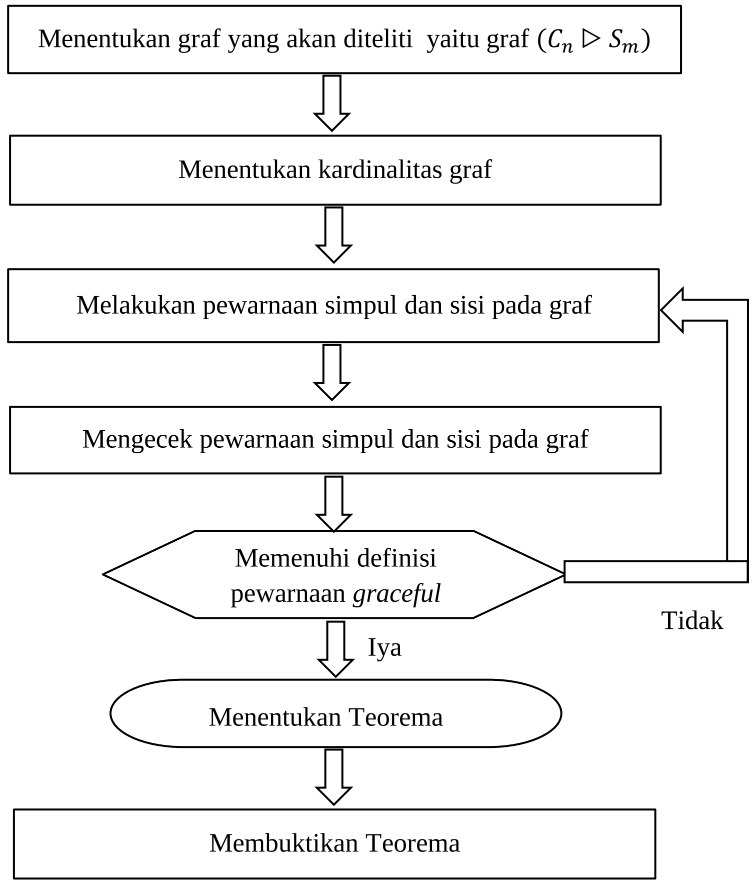
Langkah kedua, melakukan pewarnaan simpul dengan warna paling kecil dimana antara simpul yang berdekatan harus memuat warna yang berbeda. Selain itu, gunakan definisi dari pewarnaan *graceful* yaitu warna sisi diperoleh dari selisih nilai mutlak antara dua simpul yang bertetangga untuk melakukan pewarnaan sisi pada graf. Lalu melakukan pengecekan warna sisi yang diperoleh, apabila terdapat dua sisi yang bertetangga memiliki warna yang sama, maka harus kembali ke tahap pertama dalam pewarnaan simpul pada graf yang diteliti. Apabila setiap warna sisi yang bertetangga memuat warna berbeda dan sesuai dengan definisi pewarnaan *graceful*, maka dapat dilanjutkan ke tahap berikutnya.

Langkah ketiga adalah menentukan bilangan kromatik *graceful* $\chi_g(C_n \rhd S_m)$. Hal pertama yang harus dilakukan dalam menentukan bilangan kromatik *graceful* yaitu melakukan pewarnaan simpul. Kemudian, pewarnaan sisi didapatkan dari selisih nilai mutlak dari warna simpul pada setiap sisinya. Selain itu, perlu dipastikan warna simpul pada setiap graf sudah seminimal mungkin, artinya warna yang disusun merupakan warna paling kecil sehingga itulah yang disebut bilangan kromatik *graceful*. Sebelumnya, pada penelitian ini telah mencari bilangan kromatik $\chi_g(C_n \rhd S_m)$ dari graf yang diteliti untuk mengetahui minimal bilangan kromatik *graceful* yang akan diperoleh. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa bilangan kromatik *graceful* lebih besar daripada bilangan kromatik dari graf $(C_n \rhd S_m)$ yang diteliti. Hal ini dikarenakan dalam pewarnaan simpul hanya memperhatikan setiap simpul yang bertetangga memiliki warna berbeda. Berbeda halnya dengan pewarnaan titik *graceful*, yaitu tidak hanya memperhatikan setiap simpul yang bertetangga harus memiliki warna berbeda, tetapi juga perlu memperhatikan warna sisinya yang diperoleh dari nilai mutlak selisih simpul yang bertetangga dimana setiap sisi yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda pula.

Langkah keempat, menentukan teorema hasil pewarnaan *graceful*. Dalam menentukan teorema ini, hal yang dilakukan adalah menentukan batas atas dan batas bawah simpul pola pewarnaan pada setiap graf yang diteliti. Jika grafnya memiliki satu pola pewarnaan yang bisa diteruskan hingga n simpul, maka teorema yang terbentuk hanya satu kasus pembuktian teorema saja. Akan tetapi, jika graf yang diteliti membutuhkan lebih dari satu pola pewarnaan untuk bisa diwarnai hingga n simpul, maka teorema yang terbentuk lebih dari satu kasus pembuktian. Kemudian, pada penelitian ini memperoleh satu teorema baru yaitu bilangan kromatik *graceful* pada graf $(C_n \rhd S_m)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini merupakan penjelasan dari hasil penelitian dengan proses pencarian bilangan kromatik *graceful* pada $(C_n \rhd S_m)$. Hasil penelitian ini ialah berupa teorema bilangan kromatik *graceful* pada $(C_n \rhd S_m)$. Langkah awal pada penelitian ini dengan menentukan graf yang akan diteliti yaitu graf $(C_n \rhd S_m)$. Selanjutnya menentukan kardinalitas dari graf tersebut. Lalu melakukan pewarnaan simpul dan pewarnaan sisi pada graf yang telah ditentukan sedemikian hingga memenuhi definisi pewarnaan *graceful* dan dapat menghasilkan bilangan kromatiknya.



Keterangan : Alur kegiatan utama =
Proses kegiatan =
Analisis uji =
Hasil kegiatan =

Gambar 1.1 Prosedur Penelitian

Pada penelitian ini ditemukan satu teorema yang terdiri dari tiga kasus baru terkait pewarnaan *graceful* pada graf $(C_n \rhd S_m)$. Penyajian hasil teorema pada penelitian ini disajikan dengan pernyataan yang disertai pembuktian sebagai validasi kebenaran teorema tersebut.

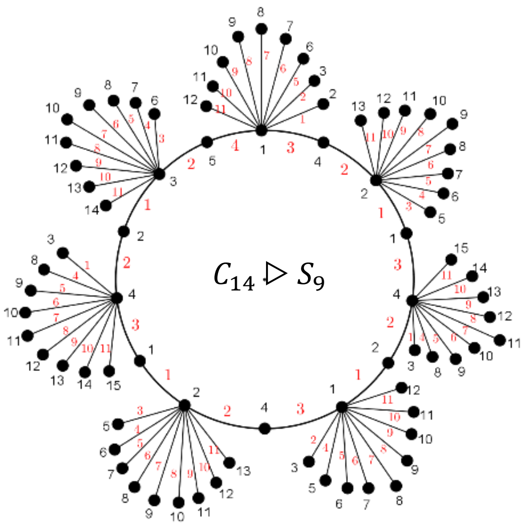
A. Hasil Penelitian

Pada penelitian pewarnaan *graceful* pada graf $(C_n \rhd S_m)$ ini diperoleh satu Teorema. Pewarnaan ini dimulai dari memberikan warna pada setiap simpul dan sisi sedemikian hingga setiap dua simpul yang bertetangga berbeda dan setiap dua sisi yang bertetangga berbeda, dimana warna sisi diperoleh dari selisih warna dua simpul yang berkaitan dengan sisi tersebut. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan simpul proper disebut bilangan kromatik *graceful* dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Jadi, bilangan kromatik *graceful* adalah bilangan k terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan k warna.

Teorema 3.1. Bilangan kromatik *graceful* pada $(C_n \rhd S_m)$ adalah:

$$\chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6$$

Bukti. Graf $(C_n \rhd S_m)$ memiliki himpunan titik, $V(C_n \rhd S_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ji}; 1 \leq j \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi, $E(C_n \rhd S_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_{ji}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Kardinalitas simpul dari graf $(C_n \rhd S_m)$ adalah $|V(C_n \rhd S_m)| = n(m+1)$ dan kardinalitas sisi dari graf $(C_n \rhd S_m)$ adalah $|E(C_n \rhd S_m)| = n(m+1)$. Derajat simpul dari graf $(C_n \rhd S_m)$ adalah $\Delta(C_n \rhd S_m) = m + 2$.



Gambar 1.2 Graf $(C_{14} \rhd S_9)$.

Kasus 1. Untuk $n \equiv 1 \, mod \, 3$

Langkah pertama untuk membuktikan $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6$; untuk $n \equiv 1 \, mod \, 3$, harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m + 3$. Diasumsikan $\chi_g(G) = m + 5$, Diberikan warna simpul $y_m = m + 5$, diperoleh sisi $x_5 y_9$ yang akan memiliki warna yang sama dengan sisi $x_5 y_1$, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m + 5$ warna adalah salah, terbukti bahwa $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m + 6$.

Berikutnya akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik $\chi_g(C_n \rhd S_m) \leq m + 5$. Pewarnaan simpul proper $f: V(C_n \rhd S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m + 6\}$ diberikan oleh:

Untuk $n \equiv 1\ mod\ 3$

$$f[c(x_i)]\begin{cases}1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3\\ 4, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3\\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3\\ 3, untuk\ i = n-1\\ 5, untuk\ i = n\end{cases}$$

$$f[c(y_{ji})]\begin{cases}m+3\ untuk\ 3 \le j \le m\\ 2\ untuk\ j = 1\\ 3\ untuk\ j = 2\end{cases} \qquad Kasus\ 1$$

$$f[c(y_{ji})]\ \{m+4\ untuk\ 1 \le j \le m \qquad Kasus\ 2$$

$$f[c(y_{ji})]\begin{cases}m+6\ untuk\ 2 \le j \le m\\ 3\ untuk\ j = 1\end{cases} \qquad Kasus\ 3$$

$$f[c(y_{ji})]\ \{m+5\ untuk\ 1 \le j \le m \qquad Kasus\ 4$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi proper dari graf $(C_n \triangleright S_m)$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})]\begin{cases}3; untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3\\ 2; untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3\\ 1; untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3\\ 2; untuk\ i = n-1\\ 4; untuk\ i = n\end{cases}$$

$$f\left[c'\left(x_i y_{ji}\right)\right]\begin{cases}m+2\ untuk\ 1 \le j \le m\\ 1\ untuk\ j = 1\\ 2\ untuk\ j = 2\end{cases} \qquad Kasus\ 1$$

$$f\left[c'\left(x_i y_{ji}\right)\right]\begin{cases}m+2\ untuk\ 2 \le j \le m, i \ge 2\\ 3\ untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3\\ 1\ untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3\\ 2\ untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3\end{cases} \qquad Kasus\ 2$$

$$f\left[c'\left(x_i y_{ji}\right)\right]\{m+2\ untuk\ 1 \le j \le m \qquad Kasus\ 3$$

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ diperoleh $m+6 \ge \chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+6$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$; untuk $n \equiv 1\ mod\ 3$.

Kasus 2. Untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$

Langkah pertama untuk membuktikan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$; untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$, harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \ge \Delta(G)+1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+3$. Diasumsikan $\chi_g(G) = m+5$, Diberikan warna simpul $y_m = m+5$, diperoleh sisi x_5y_9 yang akan memiliki warna yang sama dengan sisi x_5y_1, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+5$ warna adalah salah, terbukti bahwa $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+6$.

Berikutnya akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik $\chi_g(C_n \rhd S_m) \leq m+5$. Pewarnaan simpul proper $f: V(C_n \rhd S_m) \rightarrow \{1,2,3,\dots,m+6\}$ diberikan oleh:
Untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$

$$f[c(x_i)] \begin{cases} 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3 \\ 4, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i = n \end{cases}$$

$$f[c(y_{ji})] \begin{cases} m+3\ untuk\ 2 \leq j \leq m \\ 2\ untuk\ j = 1 \end{cases} \qquad \textit{Kasus 1}$$

$$f[c(y_{ji})]\{m+4\ untuk\ 1 \leq j \leq m \qquad \textit{Kasus 2}$$

$$f[c(y_{ji})] \begin{cases} m+6\ untuk\ 2 \leq j \leq m \\ 3\ untuk\ j = 1 \end{cases} \qquad \textit{Kasus 3}$$

$$f[c(y_{ji})] \begin{cases} m+3\ untuk\ 2 \leq j \leq m \\ 3\ untuk\ j = 1 \end{cases} \qquad \textit{Kasus 4}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi proper dari graf $(C_n \rhd S_m)$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})] \begin{cases} 3, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i = n \end{cases}$$

$$f\left[c'(x_i y_{ji})\right] \begin{cases} m+2\ untuk\ 2 \leq j \leq m, \quad i \geq 2 \\ 1; untuk\ i\ \equiv\ 1\ mod\ 3 \\ 1; untuk\ i\ \equiv\ 2\ mod\ 3 \\ 3; untuk\ i\ \equiv\ 0\ mod\ 3 \\ 2; untuk\ i\ \equiv 1\ mod\ 3 \end{cases}$$

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \rhd S_m$ diperoleh $m+6 \geq \chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+6$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m+6$; untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$.

Kasus 3. Untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$

Langkah pertama untuk membuktikan $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m+6$; untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$, harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \geq \Delta(G)+1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+3$. Diasumsikan $\chi_g(G) = m+5$, Diberikan warna simpul $y_m = m+5$, diperoleh sisi x_5y_9 yang akan memiliki warna yang sama dengan sisi x_5y_1, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+5$ warna adalah salah, terbukti bahwa $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+6$.

Berikutnya akan dibuktikan batas atas bilangan kromatik $\chi_g(C_n \rhd S_m) \leq m+5$. Pewarnaan simpul proper $f: V(C_n \rhd S_m) \rightarrow \{1,2,3,\dots,m+6\}$ diberikan oleh:
Untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$

$$f[c(x_i)]\begin{cases}1; untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3\\4; untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3\\2; untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3\end{cases}$$

$$f[c(y_{ji})]\begin{cases}m+3\ untuk\ 2 \le j \le m\\ \quad 3\ untuk\ j=1\end{cases} \qquad \textit{Kasus 1}$$

$$f[c(y_{ji})]\{m+4\ untuk\ 1 \le j \le m \qquad \textit{Kasus 2}$$

$$f[c(y_{ji})]\begin{cases}m+6\ untuk\ 2 \le j \le m\\ \quad 3\ untuk\ j=1\end{cases} \qquad \textit{Kasus 3}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi proper dari graf $(C_n \triangleright S_m)$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})]\begin{cases}3; untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3\\2; untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3\\1; untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3\end{cases}$$

$$f\left[c'\left(x_i y_{ji}\right)\right]\begin{cases}m+3\ , untuk\ 1\ \le j \le m\ , i \ge 2\\2\ \ , untuk\ \ i \equiv 1\ mod\ 3\\3\ \ , untuk\ \ i \equiv 0\ mod\ 3\\1\ \ , untuk\ i\ \equiv 2\ mod\ 3\end{cases}$$

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ diperoleh $m+6 \ge \chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+6$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$; untuk $ntuk\ n \equiv 0\ mod\ 3$.

B. Pembahasan

Penelitian ini menghasilkan satu teorema baru yakni :

$$\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$$

Langkah pertama pembuktian teorema ini dengan menentukan batas bawah menggunakan Lema 1.1 $\chi_g(G) \ge \Delta(G)+1$. Diketahui $\Delta(C_n \triangleright S_m) = m+2$, maka :

$$\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge \Delta(C_n \triangleright S_m) + 1$$
$$\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+2+1$$
$$\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+3$$

Dikarenakan hasil teorema pada analisis graf $(C_n \triangleright S_m)$ adalah $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$ dan dari Lema $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+3$, maka diasumsikan $\chi_g(G) = m+5$. Alasan menggunakan asumsi tersebut karena mengambil angka yang paling mendekati $m+6$. Kemudian diberikan warna simpul $y_m = m+5$ yang artinya $y_9 = 14$ diperoleh sisi $x_5 y_9$ yang akan memiliki warna yang sama dengan sisi $x_5 y_1$, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+5$ warna adalah salah, terbukti bahwa $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+6$.

Pada pembuktian batas terdapat $f[c(y_j)]$ dan $f\left[c'\left(x_i y_j\right)\right]$ yang memuat beberapa fungsi yang berbeda pada setiap n modulonya, sehingga peneliti membagi ke dalam beberapa kasus untuk memudahkan pembaca dalam memahaminya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan analisis graf $(C_n \rhd S_m)$, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik *graceful* diperoleh dengan melakukan pewarnaan simpul yang menginduksi pewarnaan sisi proper pada graf $(C_n \rhd S_m)$. Jadi, warna sisi pada pewarnaan *graceful* diperoleh dari hasil induksi atau selisih nilai mutlak simpul yang bertetangga pada sisi tersebut. Kemudian, diperoleh satu teorema baru yang terdiri dari tiga kasus mengenai pewarnaan *graceful* pada graf siklus *comb* graf *star* yaitu $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6;\ \ untuk\ \ n \equiv 1\ mod\ 3,\ \ \chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6;\ \ untuk\ \ n \equiv 2\ mod\ 3,\ dan\ \chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6;\ untuk\, n \equiv 0\ mod\ 3.$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alfarisi, R., Dafik, Prihandini, R. M., Adawiyah, R., Albirri, E. R., & Agustin, I. H. (2019). Graceful Chromatic Number of Unicyclic Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1306/1/012039

[2] Asy'Ari, M. L., Dafik, Agustin, I. H., Nisviasari, R., & Adawiyah, R. (2022). On graceful chromatic number of some graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2157/1/012013

[3] Asy'ari, M. L., Dafik, D., & Tirta, I. M. (2022). Kerangka Aktivitas Pembelajaran Berbasis Riset dengan Pendekatan STEM: Penerapan Materi Pewarnaan Graceful dalam Meningkatkan Kemampuan Berpikir …. *Ebook CGANT Universitas*

[4] Bantara, J. A., Sudarsana, I. W., & Musdalifah, S. (2018). PELABELAN GRACEFUL GANJIL PADA GRAF DUPLIKASI DAN SPLIT BINTANG. *JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN*. https://doi.org/10.22487/2540766x.2018.v15.i1.10193

[5] Dafik. (2015). Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. In *The conferment of professorship*.

[6] English, S., & Zhang, P. (2017). On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica*. https://doi.org/10.21136/MB.2017.0035-15

[7] Fierera, A., & Sugeng, K. A. (2022). PEWARNAAN SIMPUL r-DINAMIS PADA GRAF TERATAI T_n. *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*. https://doi.org/10.30598/pattimurasci.2021.knmxx.165-170

[8] Gross, J. L., Yellen, J., & Zhang, P. (2013). Handbook of graph theory. Second Edition. In *Journal of Development Economics*.

[9] Ishartono, N. (2019). PENGGUNAAN GRAF POHON DALAM MENGAJARKAN KONSEP MAHRAM. *Edukasia : Jurnal Penelitian Pendidikan Islam*. https://doi.org/10.21043/edukasia.v14i2.4575

[10] Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., & Albirri, E. R. (2021). On graceful chromatic number of comb product of ladder graph. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012027

[11] Kristiana, A. I., Aji, A., Wihardjo, E., & Setiawan, D. (2022). on Graceful Chromatic Number of Vertex amalgamation of Tree Graph Family. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*. https://doi.org/10.18860/ca.v7i3.16334

[12] Mincu, R., Obreja, C., & Popa, A. (2019). The Graceful Chromatic Number for Some Particular Classes of Graphs. *Proceedings - 21st International Symposium on*

Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2019. https://doi.org/10.1109/SYNASC49474.2019.00024

[13] Muzdalifa, A. (2016). Penerapan Graf Terhubung untuk Menentukan Klasifikasi Sidik Jari. *Makalah IF2120 Matematika Diskrit – Sem. I Tahun 2016/2017*.

[14] Sania, N. A., Dafik, D., & Fatahillah, A. (2020). Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Unicyclic. *CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS*. https://doi.org/10.25037/cgantjma.v1i2.39

[15] Zhang, P. (2016). A kaleidoscopic view of graph colorings. In *SpringerBriefs in Mathematics*.