

# PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN UDARA PADA BRONKUS AKIBAT PENYAKIT ASMA BRONKIAL

**Diah Putri Madinda<sup>1</sup>, Arif Fatahillah<sup>2</sup>, Susi Setiawani<sup>2</sup>**

Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Jember

Jalan Kalimantan 37 Kampus Tegalboto Jember 68121

E-mail: [diahmadinda@gmail.com](mailto:diahmadinda@gmail.com)

## ***ABSTRACT***

*Bronchial asthma is a disease of the narrowing of the airways located in the human bronchi. One of the factors causing this narrowing is Particulate Matter 2.5. Particulate Matter 2.5 is a kind of particle with dust that can cause narrowing of the airways. These particles are very small, ie less than 2.5 micrometer and can enter the lungs. Mathematical modeling is a way of solving problems that describe a mathematical solution in the real world. Mathematical modeling can form a mathematical model that describes the flow of air on the bronchi due to bronchial asthma according to actual conditions and important influences in them. In this research formed a mathematical model of bronchial air flow due to bronchial asthma. Mathematical models are obtained from the momentum and mass equations which are solved using the finite volume method.*

**Keywords:** *Asthma, Mathematical modeling, Finite volume*

## **PENDAHULUAN**

Matematika merupakan ilmu dasar yang menjadi pedoman dalam mengembangkan ilmu pengetahuan yang lain. Tujuan dari pengembangan ini menjadikan konsep matematika yang awalnya bersifat abstrak menjadi lebih nyata. Pengembangan ilmu Matematika salah satunya digunakan dalam ilmu Kedokteran. Kedokteran merupakan ilmu yang mempelajari tentang suatu penyakit dan cara penyembuhannya. Secara umum, terdapat dua faktor yang menyebabkan suatu penyakit yaitu faktor internal dan eksternal. Faktor internal merupakan faktor yang berasal dari dalam diri manusia, seperti gen atau keturunan. Sedangkan faktor eksternal merupakan faktor yang berasal dari lingkungan luar, contohnya seperti *Particulate Matter 2.5*. Salah satu penyakit yang disebabkan oleh *Particulate Matter 2.5* yaitu Asma Bronkial. Kecepatan aliran udara penderita asma bronkial dapat diprediksi menggunakan metode

---

<sup>1</sup>Mahasiswa S-1 Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

<sup>2</sup>Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

numerik. *Computational Fluid Dynamics* (CFD) merupakan ilmu yang mempelajari perhitungan numerik dalam menganalisis aliran fluida [1]. Sebelum melakukan perhitungan menggunakan metode numerik yaitu melakukan studi pustaka, mengumpulkan data berupa variabel dan parameter yang berpengaruh dan memprediksi kondisi yang terjadi berdasarkan fenomena fisika guna menjadi tolok ukur yang sebenarnya.

Asma bronkial merupakan suatu penyakit penyempitan saluran napas yang letaknya pada bronkus manusia. Penyakit ini disebabkan oleh beberapa faktor, salah satunya yaitu *Particulat Matter 2.5*. *Particulat Matter 2.5* merupakan sebuah partikel sejenis dengan debu yang berukuran lebih kecil dari 2.5 *micrometer* [16]. Jenis partikulat tersebut yaitu pekat dan berukuran sangat kecil, sehingga tidak dapat tersaring oleh rambut halus manusia dan mudah masuk bersama udara kedalam hidung. Berdasarkan Peraturan Pemerintah Nomor 41 tahun 1999 tentang nilai ambang batas mengeluarkan nilai ambang batas *Particulat Matter 2.5* di udara yaitu  $65 \mu\text{g}/\text{m}^3$  (rata-rata per 24 jam). Nilai ambang batas merupakan batas dari pengendalian suatu penyakit. Jika *Particulat Matter 2.5* diudara melebihi dari ambang batas, maka akan terjadi suatu penyakit berupa sesak napas. Dalam kurun waktu yang lama, partikel tersebut akan mengendap dan menyebabkan penyempitan saluran napas [11].

Model matematika merupakan representasi nyata yang menjabarkan bentuk permasalahan kedalam persamaan matematika. Persamaan tersebut mengandung variabel, parameter dan konstanta. Pemodelan matematika merupakan suatu cara penyelesaian untuk merepresentasikan sebuah permasalahan yang menggambarkan suatu penyelesaian masalah [9]. Permasalahan yang terjadi biasanya berkaitan dengan fenomena fisika, salah satunya yaitu kecepatan aliran udara. Kecepatan aliran udara akibat penyakit asma bronkial dapat dikaji dengan menggunakan faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan aliran tersebut.

Penelitian Chen, *et al* (2018) yang berjudul *Flow Dynamics and PM<sub>2.5</sub> Deposition in Healthy and Asthmatic Airways at Different Inhalation Statuses* mensimulasikan aliran udara pernapasan manusia penderita asma dibawah tiga kondisi, yaitu kondisi ketika sedang beristirahat, beraktivitas ringan, dan

berolahraga. Pada penelitian tersebut telah dibuktikan bahwa penderita asma lebih rentan kambuh ketika mereka dalam kondisi berolahraga atau beraktivitas berat. Hal ini disebabkan karena presentase pengendapan partikel paling besar terjadi ketika aktivitas tersebut [15].

Berdasarkan uraian diatas, penelitian ini bertujuan mengembangkan model matematika aliran udara penyakit asma bronkial, menganalisis pengaruh variabel yang berbeda dari penelitian sebelumnya yaitu pengaruh kecepatan awal dan ukuran jari-jari bronkus. Model matematika akan diselesaikan menggunakan metode volume hingga dengan teknik diskritisasi QUICK.

## **METODE PENELITIAN**

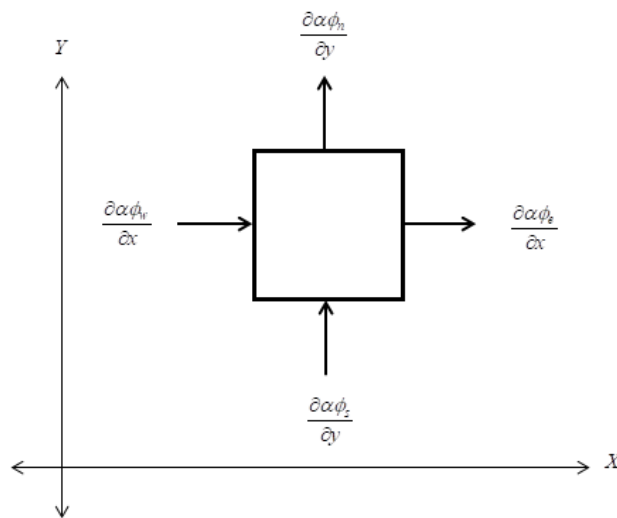
Metode penelitian adalah tahap yang dilakukan untuk mendapatkan data yang akan dianalisis untuk sampai pada kesimpulan yang konsisten dengan tujuan penelitian. Penelitian ini merupakan jenis penelitian simulasi. Penelitian simulasi merupakan bentuk penelitian yang bertujuan untuk mencari gambaran melalui model yang dilakukan dengan memanipulasi untuk mendapatkan pengaruh yang mirip dengan keadaan sebenarnya.

Penelitian ini memodelkan aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial menggunakan metode volume hingga. Langkah pertama yaitu melakukan studi pustaka tentang penyakit asma bronkial dan penyebabnya. Langkah selanjutnya membuat representasi dari sistem nyata dalam bentuk model matematika. Sehingga diperoleh model matematika aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma berdasarkan hasil atau data-data yang mendekati keadaan sebenarnya.

## **HASIL PENELITIAN**

Analisis numerik aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial dilakukan dengan beberapa tahapan. Tahapan pertama yaitu pembentukan model matematika aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial menggunakan persamaan fisika yaitu persamaan kontinuitas massa dan momentum. Persamaan massa yang digunakan berdasarkan hukum kekekalan

massa, sedangkan persamaan momentum merupakan bentuk persamaan diferensial yang menghubungkan gaya-gaya yang bekerja pada volume kendali yaitu gaya antar partikel ( $F_{pf}$ ), gaya gravitasi ( $g$ ) dan Hukum Stokes ( $Stk$ ). Berikut merupakan skema kendali persamaan massa aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial.



Gambar 1. Skema Kendali Persamaan Massa

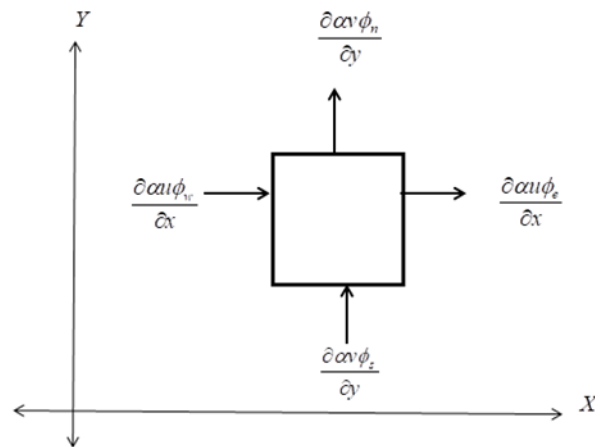
Maka persamaan massa yang diperoleh sebagai berikut

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + [\text{pure rate}] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + [\text{output} - \text{input}] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \phi_e}{\partial x} - \frac{\partial \alpha \phi_w}{\partial x} + \frac{\partial \alpha \phi_n}{\partial y} - \frac{\partial \alpha \phi_s}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Selain persamaan massa, aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial juga menggunakan persamaan momentum.



Gambar 2. Skema Kendali Persamaan Momentum

Dari skema kendali persamaan energi diatas maka persamaan momentum yang diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + [\text{pure rate}] = \sum F \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + [\text{output} - \text{input}] = \sum F \quad (5)$$

$$\frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u \phi_e}{\partial x} - \frac{\partial \alpha u \phi_w}{\partial x} + \frac{\partial \alpha v \phi_n}{\partial y} - \frac{\partial \alpha v \phi_s}{\partial y} = \sum F \quad (6)$$

dengan,

$$\begin{aligned} \sum F = & -\frac{\partial}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \mu \partial \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ & \frac{1}{8} \pi \pi_p^2 \rho C_D (u - u_p) |u - u_p| + \frac{9U \pi \mu D_{ave}^2}{2Q \rho_p d_p^2 C_c \alpha} (u - u_p) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} g \end{aligned}$$

Penyelesaian model matematika menggunakan metode volume hingga dengan mengintegalkan persamaan massa dan persamaan momentum terhadap tiga variabel yaitu  $x$ ,  $y$  dan  $t$ . Berikut merupakan bentuk integral dari persamaan massa.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} \left[ \frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \phi_e}{\partial x} - \frac{\partial \alpha \phi_w}{\partial x} + \frac{\partial \alpha \phi_n}{\partial y} - \frac{\partial \alpha \phi_s}{\partial y} \right] dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} 0 dx dy dt \quad (8)$$

Maka diperoleh model akhir persamaan massa aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial sebagai berikut:

$$\alpha\phi_0\Delta x\Delta y + \alpha\phi_e\Delta y\Delta t - \alpha\phi_w\Delta y\Delta t + \alpha\phi_n\Delta x\Delta t - \alpha\phi_s\Delta x\Delta t = 0 \quad (9)$$

$$\phi_0 = -\phi_e \frac{\Delta t}{\Delta x} + \phi_w \frac{\Delta t}{\Delta x} - \phi_n \frac{\Delta t}{\Delta y} + \phi_s \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (10)$$

Selanjutnya pengintegralan persamaan momentum terhadap tiga variabel yaitu  $x$ ,  $y$  dan  $t$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} \left[ \frac{\partial \alpha \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u \phi_e}{\partial x} - \frac{\partial \alpha u \phi_w}{\partial x} + \frac{\partial \alpha v \phi_n}{\partial y} - \frac{\partial \alpha v \phi_s}{\partial y} \right] dx dy dt =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} \left[ \frac{-\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) + 2\mu\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. 2\mu\alpha_f \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_{pf} + Stk_n \right] dx dy dt \quad (11)$$

Diperoleh model akhir dari persamaan momentum sebagai berikut :

$$-\phi_e \frac{\Delta t}{\Delta x} + \phi_w \frac{\Delta t}{\Delta x} - \phi_n \frac{\Delta t}{\Delta y} + \phi_s \frac{\Delta t}{\Delta y} (\alpha \Delta x \Delta y) + \alpha u \phi_e \Delta y \Delta t - \alpha u \phi_w \Delta y \Delta t + \alpha v \phi_n \Delta x \Delta t -$$

$$\alpha v \phi_s \Delta x \Delta t = \frac{-\alpha P}{\rho} \Delta y \Delta t - \frac{\alpha P}{\rho} \Delta x \Delta t + (2\mu\alpha u + \mu\alpha v) \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} + (2\mu\alpha v + \mu\alpha u) \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y}$$

$$+ (F_{pf} + Stk_n) \Delta x \Delta y \Delta t + (\mu u + \mu v) \Delta t \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat disederhanakan menjadi:

$$-\phi_e [(-\alpha + \alpha u) \Delta y \Delta t] + \phi_w [(\alpha - \alpha u) \Delta y \Delta t] - \phi_n [(-\alpha + \alpha v) \Delta x \Delta t] +$$

$$\phi_s [(\alpha - \alpha v) \Delta x \Delta t] = \frac{-\alpha P}{\rho} \Delta y \Delta t - \frac{\alpha P}{\rho} \Delta x \Delta t + (2\mu\alpha u + \mu\alpha v) \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} +$$

$$(2\mu\alpha v + \mu\alpha u) \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + (F_{pf} + Stk_n) \Delta x \Delta y \Delta t + (\mu u + \mu v) \Delta t \quad (13)$$

dengan,

$$F_{pf} = \frac{1}{8} \pi \pi_p^2 \rho C_D (u - u_p) |u - u_p|$$

$$Stk_n = \frac{9U \pi \mu D_{ave}^2}{2Q \rho_p d_p^2 C_c \alpha} (u - u_p) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} g$$

Model matematika aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & -\phi_e[(-\alpha + \alpha u)\Delta y\Delta t] + \phi_w[(\alpha - \alpha u)\Delta y\Delta t] - \phi_n[(-\alpha + \alpha v)\Delta x\Delta t] + \phi_s[(\alpha - \alpha v) \\
 \Delta x\Delta t] &= \frac{-\alpha P}{\rho} \Delta y\Delta t - \frac{\alpha P}{\rho} \Delta x\Delta t + (2\mu\alpha u + \mu\alpha v) \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + (2\mu\alpha v + \mu\alpha u) \\
 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} &+ \left( \frac{1}{8} \pi \pi_p^2 \rho C_D (u - u_p) |u - u_p| + \frac{9U\pi\mu D_{ave}^2}{2Q\rho_p d_p^2 C_c \alpha} (u - u_p) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} g \right) \\
 \Delta x\Delta y\Delta t &+ (\mu u + \mu v)\Delta t \tag{14}
 \end{aligned}$$

## KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diharapkan agar melakukan penelitian dengan menganalisis penyakit yang berbeda selain asma bronkial. Model matematika aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial diperoleh dari persamaan massa dan momentum. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh model matematika aliran udara pada bronkus akibat penyakit asma bronkial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & -\phi_e[(-\alpha + \alpha u)\Delta y\Delta t] + \phi_w[(\alpha - \alpha u)\Delta y\Delta t] - \phi_n[(-\alpha + \alpha v)\Delta x\Delta t] + \phi_s[(\alpha - \alpha v) \\
 \Delta x\Delta t] &= \frac{-\alpha P}{\rho} \Delta y\Delta t - \frac{\alpha P}{\rho} \Delta x\Delta t + (2\mu\alpha u + \mu\alpha v) \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + (2\mu\alpha v + \mu\alpha u) \\
 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} &+ \left( \frac{1}{8} \pi \pi_p^2 \rho C_D (u - u_p) |u - u_p| + \frac{9U\pi\mu D_{ave}^2}{2Q\rho_p d_p^2 C_c \alpha} (u - u_p) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} g \right) \\
 \Delta x\Delta y\Delta t &+ (\mu u + \mu v)\Delta t
 \end{aligned}$$

Model matematika diperoleh berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhi aliran udara pada bronkus. Model matematika dapat disimulasikan untuk memperoleh hasil numerik yang dapat dibandingkan dengan kondisi sebenarnya, sehingga peneliti lain dapat melakukan simulasi model matematika yang diperoleh.

**DAFTAR PUSTAKA**

- [1] A. Fatahillah, Dafik, E.E. Riastutik, dan Susanto, *The Analysis of Air Circulation on Coffee Plantation Based on the Level of Plants Roughness and Diamond Ladder Graph Cropping Pattern using Finite Volume Method*, *Unej*, vol. 7, no. 9, hal 28, 2014.
- [2] A. Fatahillah, S. Setiawani, and A. S. Mandala, *Numerical Analysis of Blood Flow in Intracranial Artery Stenosis Affected by Ischemic Stroke using Finite Element Method*, *J. Phys. Conf. Series*, vol. 1218, no. 12005, 2019.
- [3] A. Fatahillah, "Pemodelan dan Penyelesaian Numerik dari Permasalahan Korosi Besi yang Didasarkan pada Sifat Kimia Larutan," *Kadikma*, vol. 2, no. 1, pp. 71–80, 2010.
- [4] A. Fatahillah, S. Setiawani, and R. Damayanti, *Mathematical Model Analysis of Fluid Flow in Edamame Hydrofluidization Using Finite Element Method*, *J. Phys. Conf. Series*, vol. 1211, no. 12021, 2019.
- [5] A. Fatahillah, *Numerical Analysis of Fluida Flow in Heat Exchangers Using Finite Element Method to Reduce Exhaust Emission Level in Air*, *J. Phys. Conf. Series*, vol. 1108, no. 1, pp 1-7, 2018.
- [6] A. G. Niam, *Simulasi Distribusi Suhu dan Pola Pergerakan Udara pada Rumah Tanaman Tipe Standart Peak Berventilasi Menggunakan CFD*. Institut Pertanian Bogor, 2011.
- [7] A. S. H. Putra, Suharto, and A. Fatahillah, "Analisis Sirkulasi Udara pada Sistem Pernafasan Manusia menggunakan Metode Volume Hingga," *Kadikma*, vol. 8, no. 2, pp. 95–104, 2017.
- [8] H. Zhang and G. Papadakis, *Computational Analysis of Flow Structure and Article Deposition in a Single Asthmatic Human Airway Bifurcation*, *J. of Biomechanics*, vol. 43, no.13, pp. 2453–2459, 2010.
- [9] M. Z. Ndi, *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. CV Budi Utama, 2018.
- [10] S. Choi, S. Miyawaki, and C. L. Lin, *A Feasible Computational Fluids Dynmaics Study for Relationships of Structural and Functional Alterations with Particle Deposition in Severe Asthmatic Lungs*, *J. Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 10, no. 1, pp. 1-12, 2018.
- [11] S. Arba, *Dust Respirable Concentration Particulate Matter (PM 2.5) and Health Disorders Communities in Settlement Around Electric Steam Power Plant*, *J. Kesehatan Masyarakat*, vol. 9, no. 2, pp. 178-184, 2019.
- [12] Widowati, Sutimin, *Pemodelan Matematika*. Universitas Diponegoro, 2007.
- [13] Q. Zhang, Z. Qiu, K. F. Chung, and S. K. Huang, *Environmental Air Pollution and Allergic Asthma*, *J. of Thorac Disease*, vol. 7, no. 1, pp. 14-22, 2015.
- [14] S. Choi, J. Choi, and C. L. Lin, *Contributions of Kinetic Energy and Viscous Dissipation to Airway Resistance in Pulmonary Inspiratory and Expiratory Airflows in Successive Symmetric Airway Models with Various Bifurcation Angles*, *J. of Biomechanical Engineering*, vol. 140, no. 1, 2018.
- [15] W. H. Chen, K. Hao. Lee, J. K. Matuku, and C. J. Hwang, *Flow Dynamics and PM 2.5 Deposition in Healthy and Asthmatic Airways at Different*



- Inhalation Statuses, J. Aerosol and Air Quality Research*, vol. 18, no. 10, pp. 866-883, 2018.
- [16] Z. Aulia dan R. Azizah, “Karakteristik Perilaku Fungsi Paru Pekerja dan Kadar PM 2.5 di Industri Rumah Tangga Cecek Kabuptaen Sidoarjo,” *J. Kesehatan Lingkungan*, vol 8, no. 1, pp. 128-136, 2015.