NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF SEGITIGA BERMUDA

Novalita Anjelia A. P.[44], Slamin[45], Dafik[46]

Abstract. *For a simple graph G, a labelling* $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ *is called an edge irregular total k-labelling of G if for any two different edges e and f of G there is,* $wt(e) \neq wt(f)$*. The total edge irregularity strength denoted by tes G is the smallest positive integer k for which G has an edge irregular total k-labelling. In this paper, we consider the total edge irregularity strength of Bermuda Triangle graph and the union isomorphic and non isomorphic Bermuda Triangle graph. We show that* $tes(Btr_{n,4}) = \left\lceil \frac{30n+17}{3} \right\rceil$*, for* $n \geq 1$*,* $tes(sBtr_{n,4}) = \left\lceil \frac{s(30n+15)+2}{3} \right\rceil$*, for* $n \geq 1$ *and* $s \geq 2$*, and* $tes(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}) = \left\lceil \frac{(30n+15)+(30m+15)+2}{3} \right\rceil$*, for* $1 \leq n \leq m$*.*

Keywords : *Edge irregular total labelling, Irregularity strength, Total edge irregularity strength, Bermuda Triangle graph.*

PENDAHULUAN

Banyak topik menarik dalam ilmu teori graf, salah satunya yaitu mengenai pelabelan graf. Ada beberapa jenis pelabelan graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan total sisi irregular (*edge irregular total labelling*). Pelabelan total sisi irregular pada graf *G* dinotasikan dengan *tes*(*G*) merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif dimana nilai yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik dan himpunan sisi dari suatu graf *G* dengan bobot setiap sisinya berbeda seminimal mungkin. Penentuan nilai *tes* pada penelitian ini mengacu pada Teorema 1 dan berkaitan dengan Lema 1 berikut, yaitu:

Teorema 1: Jika *G* = (*V*, *E*) adalah sebuah graf dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi E (yang tidak kosong), maka; $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$ (Bača *et al*. 2002).

Lemma 1: Ada pelabelan titik (7, 1)-sisi *antimagic* pada graf Segitiga Bermuda $Btr_{n,4}$ jika $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq 4$, dan $i, j, n \in N$ (Munawwir, Z. 2013: 54).

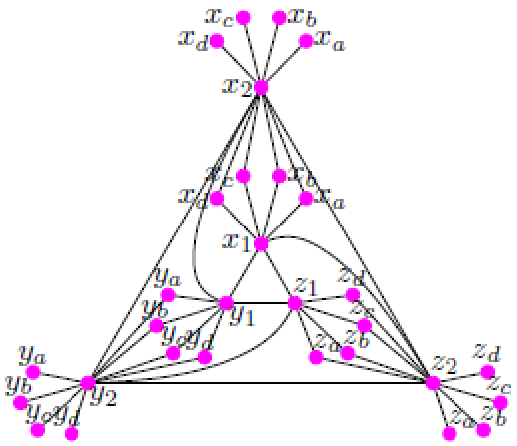
Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui adanya keterkaitan antara pelabelan titik (7, 1)-sisi *antimagic* dengan pelabelan total sisi irregular pada graf Segitiga Bermuda tunggal dan mengetahui nilai *tes* dalam pelabelan total sisi irregular pada graf

[44] Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[45] Dosen Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember
[46] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

Segitiga Bermuda Tunggal, beserta gabungan graf Segitiga Bermuda isomorfis maupun non-isomorfis.

GRAF SEGITIGA BERMUDA ($Btr_{n,4}$)

Graf Segitiga Bermuda adalah sebuah graf baru yang dinotasikan dengan $Btr_{n,4}$. Graf Segitiga Bermuda memiliki himpunan titik $V = \{x_i, y_i, z_i, x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq 4\}$ dan memiliki himpunan sisi $E = \{x_i y_i, y_i z_i, x_i z_i, 1 \leq i \leq n+1\}$ $\cup$ $\{x_i z_{i+1}, z_i y_{i+1}, y_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ $\cup$ $\{x_i x_{i,j}, y_i y_{i,j}, z_i z_{i,j}, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq 4\}$ $\cup$ $\{x_{i+1} x_{i,j}, y_{i+1} y_{i,j}, z_{i+1} z_{i,j}, 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq 4\}$. Graf $Btr_{n,4}$ memiliki $15n + 15$ titik dan $30n + 15$ sisi. Gambar 1 menunjukkan graf $Btr_{1,4}$, dimana $a = (i,1), b = (i,2), c = (i,3), d = (i,4)$.



Gambar 1: Graf Segitiga Bermuda $Btr_{1,4}$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Adapun teknik penelitian pada graf $Btr_{n,4}$ dengan pelabelan total sisi irregular yaitu: (1) menentukan batas bawah dan batas atas dari *tes*($Btr_{n,4}$) dengan menggunakan Teorema 1, (2) menggunakan metode pendeteksian pola dalam melabeli titik dan sisi dengan mengikuti himpunan bobot sisi pada EAVL yang telah dikonversikan menjadi himpunan bobot total sisi pada pelabelan total sisi irregular, (3) menentukan formulasi pelabelan graf $Btr_{n,4}$ yang sudah dilakukan (berupa fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi pada bilangan bulat), (4) menentukan nilai *tes*($Btr_{n,4}$), untuk $n \geq 1$ dengan batas bawah dan batas atas yang telah diperoleh, (5) melakukan langkah yang sama seperti diatas untuk menentukan nilai *tes*$(sBtr_{n,4})$ dan *tes*$(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4})$ dengan batasan yang telah ditentukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Lema 2: Jika graf $Btr_{n,4}$ memiliki pelabelan titik (7, 1)-sisi *antimagic* maka graf $Btr_{n,4}$ memiliki pelabelan total sisi irregular dengan bobot total sisi minimal 3 dan berurutan, dengan barisan bobot total sisi $\omega = \{3, 4, 5, \dots, 30n + 17\}$, untuk $1 \le i \le n + 1$ dan $1 \le j \le 4$.

Bukti: Barisan bobot sisi pada Lema 1 dapat dikonversikan menjadi barisan bobot total sisi pada pelabelan total sisi irregular $Btr_{n,4}$. Sehingga diperoleh bobot total sisi minimal 3 dan berurutan, dengan barisan bobot total sisi $\omega = \{3, 4, 5, \dots, 30n + 17\}$.

Adapun rumus pelabelan total sisi irregular pada graf Segitiga Bermuda $Btr_{n,4}$, dengan $1 \le j \le 4$, adalah sebagai berikut:

1. Label Titik

$$\lambda(x_i) = \lambda(y_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i - 4, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(z_i) = 10i - 4, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda(x_{i,j}) = \lambda(y_{i,j}) = \lambda(z_{i,j}) = \begin{cases} i + j, & i = 1 \\ 10i - 4, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

2. Bobot Total Sisi

$$\omega(x_i y_i) = 30i - 27, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(y_i z_i) = 30i - 22, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(x_i z_i) = 30i - 17, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(y_i x_{i+1}) = 30i - 12, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(z_i y_{i+1}) = 30i - 7, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(x_i z_{i+1}) = 30i - 2, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(y_i y_{i,j}) = 30i + j - 27, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(z_i z_{i,j}) = 30i + j - 22, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(x_i x_{i,j}) = 30i + j - 17, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(y_{i+1} y_{i,j}) = 30i + j - 12, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(z_{i+1} z_{i,j}) = 30i + j - 7, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega(x_{i+1} x_{i,j}) = 30i + j - 2, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Label Sisi

$$\lambda(x_i y_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i - 19, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(y_i z_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i - 14, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(x_i z_i) = \begin{cases} 6, & i = 1 \\ 10i - 9, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(x_i z_{i+1}) = \begin{cases} 11, & i = 1 \\ 10i - 4, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(z_i y_{i+1}) = 10i - 9, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda(y_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i - 14, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i,j}) = \begin{cases} 11, & i = 1 \\ 10i + j - 9, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(y_i y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i + j - 19, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(z_i z_{i,j}) = \lambda(y_{i+1} y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 10i + j - 14, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(z_{i+1} z_{i,j}) = \begin{cases} 6, & i = 1 \\ 10i + j - 9, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\lambda(x_{i+1} x_{i,j}) = \begin{cases} 11, & i = 1 \\ 10i + j - 4, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

Berdasarkan rumus bobot total sisi diatas, bobot terendah terletak pada $\omega(x_1 y_1)$ dan bobot tertinggi terletak pada $\omega(x_n x_{n,4})$. Dalam hal tersebut, terlihat bahwa himpunan bobot yang diperoleh, yaitu $\omega = \{3, 4, 5, \dots, 30n + 17\}$.

Teorema 2: Nilai ketakteraturan total sisi dari graf Segitiga Bermuda tunggal adalah $tes(Btr_{n,4}) = \left\lceil \frac{30n+17}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$.

Bukti: Batas bawah $tes(Btr_{n,4})$ diperoleh dari hasil substitusi $|E(Btr_{n,4})|$ ke dalam Teorema 1. Sedangkan batas atas $tes(Btr_{n,4})$ diperoleh dengan cara melabeli setiap titik dan sisi pada graf Segitiga Bermuda $Btr_{n,4}$ seperti yang telah ditunjukkan pada Lema 2. Pada Lema 2 tersebut, nilai label terbesarnya yaitu, $10i - 4 = tes(Btr_{n,4}) = \left\lceil \frac{30n+17}{3} \right\rceil$, dengan $i = 2, 3, \dots, n$. Maka batas atas $tes(Btr_{n,4})$ = batas bawah $tes(Btr_{n,4})$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $tes(Btr_{n,4}) = \left\lceil \frac{30n+17}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$.

Teorema 3: Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf Segitiga Bermuda isomorfis adalah $tes(sBtr_{n,4}) = \left\lceil \frac{s(30n+15)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $s \geq 2$.

Bukti: Batas bawah $tes(sBtr_{n,4})$ diperoleh dari hasil substitusi $|E(sBtr_{n,4})|$ ke dalam Teorema 1. Sedangkan batas atas $tes(sBtr_{n,4})$ diperoleh dengan cara melabeli setiap titik dan sisi pada sebanyak s gabungan graf Segitiga Bermuda isomorfis $(sBtr_{n,4})$ dimana $2 \leq k \leq s$ dan $1 \leq j \leq 4$, dengan mengikuti formulasi berikut:

1. Label Titik

$\beta(x_i{}^k) = \lambda(x_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_i{}^k) = \lambda(y_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(z_i{}^k) = \lambda(z_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(x_{i,j}{}^k) = \lambda(x_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_{i,j}{}^k) = \lambda(y_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(z_{i,j}{}^k) = \lambda(z_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

2. Label Sisi

$\beta(x_i{}^k y_i{}^k) = \lambda(x_i y_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_i{}^k z_i{}^k) = \lambda(y_i z_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(x_i{}^k z_i{}^k) = \lambda(x_i z_i) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(x_i{}^k z_{i+1}{}^k) = \lambda(x_i z_{i+1}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(z_i{}^k y_{i+1}{}^k) = \lambda(z_i y_{i+1}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_i{}^k x_{i+1}{}^k) = \lambda(y_i x_{i+1}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(x_i{}^k x_{i,j}{}^k) = \lambda(x_i x_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_i{}^k y_{i,j}{}^k) = \lambda(y_i y_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(z_i{}^k z_{i,j}{}^k) = \lambda(z_i z_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(y_{i+1}{}^k y_{i,j}{}^k) = \lambda(y_{i+1} y_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(z_{i+1}{}^k z_{i,j}{}^k) = \lambda(z_{i+1} z_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\beta(x_{i+1}{}^k x_{i,j}{}^k) = \lambda(x_{i+1} x_{i,j}) + (k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

3. Bobot Total Sisi

$\omega(x_i{}^k y_i{}^k) = 30i - 27 + 3(k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\omega(y_i{}^k z_i{}^k) = 30i - 22 + 3(k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$\omega(x_i{}^k z_i{}^k) = 30i - 17 + 3(k-1)(10n+5),$ $\quad i = 1,2,\dots,n$

$$\omega(y_i{}^k x_{i+1}{}^k) = 30i - 12 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega(z_i{}^k y_{i+1}{}^k) = 30i - 7 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega(x_i{}^k z_{i+1}{}^k) = 30i - 2 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(y_i{}^k y_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 27 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(z_i{}^k z_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 22 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(x_i{}^k x_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 17 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(y_{i+1}{}^k y_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 12 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(z_{i+1}{}^k z_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 7 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega\left(x_{i+1}{}^k x_{i,j}{}^k\right) = 30i + j - 2 + 3(k-1)(10n+5), \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Dari formulasi diatas, nilai label terbesarnya, adalah $\left\lceil\frac{s(30n+15)+2}{3}\right\rceil$, dimana nilai tersebut merupakan nilai $tes\left(sBtr_{n,4}\right)$. Jadi batas atas $tes\left(sBtr_{n,4}\right)$ = batas bawah $tes\left(sBtr_{n,4}\right)$, sehingga terbukti bahwa $tes\left(sBtr_{n,4}\right) = \left\lceil\frac{s(30n+15)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $s \geq 2$.

Teorema 4: Nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf Segitiga Bermuda non-isomorfis adalah $tes\left(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}\right) = \left\lceil\frac{(30n+15)+(3mn+15)+2}{3}\right\rceil$, untuk $1 \leq n < m$.

Bukti: Batas bawah $tes\left(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}\right)$ diperoleh dari hasil substitusi $\left|E(Btr_{n,4} \cup Btr_{n,4})\right|$ ke dalam Teorema 1. Sedangkan batas atas $tes\left(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}\right)$ diperoleh dengan cara melabeli setiap titik dan sisi pada gabungan graf $Btr_{n,4} \cup Btr_{n,4}$. Untuk pelabelan titik dan sisi pada gabungan non-isomorfis bagian $Btr_{n,4}$ menggunakan formulasi seperti pada pelabelan graf $Btr_{n,4}$ tunggal. Sedangkan formulasi pelabelan bagian $Btr_{m,4}$ dengan $1 \leq n < m$, dan $1 \leq j \leq 4$ adalah sebagai berikut:

1. Label Titik

$$\gamma(x_i{}^m) = \gamma(y_i{}^m) = \begin{cases} 10n+6, & i = 1 \\ 10(i+n)+1, & i = 2,3,\dots,n \end{cases}$$
$$\gamma(z_i{}^m) = 10(i+n)+1, \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\gamma\left(x_{i,j}{}^m\right) = \gamma\left(y_{i,j}{}^m\right) = \gamma\left(z_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+i+j+5, & i = 1 \\ 10(i+n)+1, & i = 2,3,\dots,n \end{cases}$$

2. Label Sisi

$$\gamma(x_i{}^m y_i{}^m) = \begin{cases} 10n+6, & i = 1 \\ 10(i+n)-14, & i = 2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma(y_i{}^m z_i{}^m) = \begin{cases} 10n+6, & i=1 \\ 10(i+n)-9, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma(x_i{}^m z_i{}^m) = \begin{cases} 10n+11, & i=1 \\ 10(i+n)-4, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma(x_i{}^m z_{i+1}{}^m) = \begin{cases} 10n+16, & i=1 \\ 10(i+n)+1, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma(z_i{}^m y_{i+1}{}^m) = 10(i+n)-4, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\gamma(y_i{}^m x_{i+1}{}^m) = \begin{cases} 10n+6, & i=1 \\ 10(i+n)-9, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\left(x_i{}^m x_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+16, & i=1 \\ 10(i+n)+j-4, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\left(y_i{}^m y_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+6, & i=1 \\ 10(i+n)+j-14, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\left(z_i{}^m z_{i,j}{}^m\right) = \gamma\left(y_{i+1}{}^m y_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+6, & i=1 \\ 10(i+n)+j-9, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\left(z_{i+1}{}^m z_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+11, & i=1 \\ 10(i+n)+j-4, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

$$\gamma\left(x_{i+1}{}^m x_{i,j}{}^m\right) = \begin{cases} 10n+16, & i=1 \\ 10(i+n)+j+1, & i=2,3,\dots,n \end{cases}$$

3. Bobot Total Sisi

$$\omega(x_i{}^m y_i{}^m) = 30(i+n)-12, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega(y_i{}^m z_i{}^m) = 30(i+n)-7, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega(x_i{}^m z_i{}^m) = 30(i+n)-2, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega(y_i{}^m x_{i+1}{}^m) = 30(i+n)+3, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega(z_i{}^m y_{i+1}{}^m) = 30(i+n)+8, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega(x_i{}^m z_{i+1}{}^m) = 30(i+n)+13, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(y_i{}^m y_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j-12, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(z_i{}^m z_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j-7, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(x_i{}^m x_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j-2, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(y_{i+1}{}^m y_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j+3, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(z_{i+1}{}^m z_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j+8, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$\omega\left(x_{i+1}{}^m x_{i,j}{}^m\right) = 30(i+n)+j+13, \qquad i=1,2,\dots,n$$

Dari formulasi diatas, nilai label terbesarnya adalah $\left\lceil \frac{(30n+15)+(3mn+15)+2}{3} \right\rceil$, dimana nilai tersebut merupakan nilai $tes\left(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}\right)$. Jadi batas atas

$tes(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4})$ = batas bawah $tes(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4})$, sehingga terbukti bahwa $tes(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}) = \left\lceil\frac{(30n+15)+\,(3mn+15)+\,2}{3}\right\rceil$, untuk $1 \leq n < m$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika graf $Btr_{n,4}$ memiliki pelabelan titik (7, 1)-sisi *antimagic* maka graf $Btr_{n,4}$ memiliki pelabelan total sisi irregular dengan bobot total sisi irregular dengan bobot total sisi minimal 3 dan berurutan, dengan barisan bobot total sisi $\omega = \{3, 4, 5, \ldots, 30n + 17\}$, untuk $1 \leq i \leq n + 1$ dan $1 \leq j \leq 4$.
2. Nilai ketakteraturan total sisi dari graf Segitiga Bermuda tunggal adalah $tes(Btr_{n,4}) = \left\lceil\frac{30n+17}{3}\right\rceil$, untuk $n \geq 1$.
3. Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf Segitiga Bermuda isomorfis adalah $tes(sBtr_{n,4}) = \left\lceil\frac{s(30n+15)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $s \geq 2$.
4. Nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf Segitiga Bermuda non-isomorfis adalah $tes(Btr_{n,4} \cup Btr_{m,4}) = \left\lceil\frac{(30n+15)+\,(3mn+15)+\,2}{3}\right\rceil$, untuk $1 \leq n < m$.

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka terdapat beberapa saran, yaitu:

1. Pembaca dapat melakukan penelitian $tes(Btr_{n,4} \cup \ldots \cup Btr_{m,4})$ untuk $1 \leq i \leq n + 1$ dan $1 \leq j \leq 4$.
2. Pembaca dapat melakukan penelitian $tes(Btr_{n,4})$ untuk $1 \leq i \leq n + 1$ dan $1 \leq j \leq n$.
3. Pembaca dapat menjadikan hasil penelitian ini sebagai acuan dalam melakukan penelitian mengenai *tes* dari graf khusus lain, baik tunggal maupun gabungannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ahmad, A., Bača, M., Jendroľ, dan Numan, M. 2013. *On Irregularity Strength of Disjoint Union of Friendship Graphs*. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. Vol. 1 (2): 100-108.

[2] Bača, M., Jendroľ, Miller, M., dan Ryan, J. 2007. *On Irregular Total Labelling*. *Discrete Mathematics*, 307(1): 1378:1388.

[3] Munawwir, Z. 2013. *Pelabelan Total Super* (*a*, *d*)-*Sisi Antimagic pada Graf Segitiga Bermuda* ($Btr_{i,4}$). Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

[4] Rajasingh, I., Rajan, B., dan Arockiamary, S., T. 2012. *Total Edge Irregularity Strength of Butterfly Networks*. *International Journal of Computer Application*. Vol. 49 (3).

[5] Wijaya, K., Slamin, dan Miller, M. 2011. *On Total Vertex Irregularity Strength of Cocktail Party Graphs*. *Jurnal Ilmu Dasar*. Vol. 12 (2): 148-151.