NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF TUNAS KELAPA

Moch. Zaenal A.[3], Slamin[4], Susi Setiawani[5]

Abstract. *A total edge irregular labeling on a graph G which has |E| edges and |V| vertices is an assignment of positive integer number as labels to both vertices and edges so that the weights calculated at every edges are distinct. The weight of an edge xy in G is defined as the sum of the label of xy and the labels of two vertices x and y, that is w(xy) = λ(x)+ λ(xy)+ λ(y). The total edge irregularity strength of G, denoted by tes(G), is the smallest positive integer k for which G has an edge-irregular total k-labelling. In this paper, we determine the exact value of the total edge (vertex) irregularity strength of Coconut Sprout Graph ($CR_{n,m}$) and the union of isomorphic and non-isomorphic Coconut Sprout Graph.*

Key Words : *total edge irregular labeling, total edge irregularity strength, coconut sprout graph.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu dasar yang memiliki berbagai cabang ilmu dan dapat dimanfaatkan dalam kehidupan untuk memecahkan masalah. Oleh karena itu, matematika sering digunakan untuk menemukan jawaban terhadap masalah yang dihadapi oleh manusia. Salah satu cabang matematika yang cukup populer yaitu teori graf. Sebuah graf *G* merupakan himpunan *{V (G); E(G)}*, dimana *V (G)* adalah himpunan titik berhingga dan tidak boleh kosong, dan *E(G)* adalah sebuah himpunan sisi (boleh kosong) dari pasangan tak terurut (*u, v)* dari titik-titik u, v Є *V(G). V (G)* disebut himpunan titik dari *G* dan *E(G)* disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009: 11). Salah satu topik teori graf yang menarik yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf adalah sebuah pemetaan satu-satu dan onto yang memetakan himpunan bilangan bulat positif ke elemen suatu graf *G* (titik dan sisi).

Ada beberapa jenis pelabelan graf, salah satu diantaranya pelabelan total sisi irregular (*edge irregular total labelling*). Pelabelan total sisi irregular adalah pemberian label titik dan sisi pada graf *G* dengan menggunakan bilangan bulat positif yang seminimal mungkin sedemikian sehingga bobot total di setiap sisinya berbeda, label maksimal yang paling kecil tersebut disebut nilai ketakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength)* dan dinotasikan dengan *tes(G)*. Aturan pada pelabelan ini memperbolehkan adanya pengulangan label (angka) akan tetapi bobot di setiap sisinya

[3] Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[4] Dosen Prodi Sistem Informasi Universitas Jember
[5] Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

harus berbeda. Penentuan nilai *tes(G)* tersebut mengacu pada teorema yang sudah ada yaitu milik Bača, Jendroľ, Miller dan Ryan, 2002, yaitu:

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Dalam penelitian ini akan dicari pelabelan total sisi irregular pada graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ dengan mencari nilai *tes* dari graf tersebut. Tunas kelapa yang akan diteliti berupa tunas kelapa tunggal dan gabungannya yang isomorfis dan non-isomorfis. Adapun beberapa rumusan masalah dari penelitian ini adalah: (1) berapakah nilai ketakteraturan total sisi *tes* dalam pelabelan total sisi irregular pada graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ tunggal?, (2) berapakah nilai ketakteraturan total sisi *tes* dalam pelabelan total sisi irregular pada gabungan graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ isomorfis?, dan (3) berapakah nilai ketakteraturan total sisi *tes* dalam pelabelan total sisi irregular pada gabungan graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ non-isomorfis?.

Tunas Kelapa merupakan graf yang dikembangkan dari graf siklus (*Cycle Graph*) pada bagian kelapa dan graf lintasan pada bagian daun. Graf tunas kelapa memiliki jumlah titik sebanyak *2n* dan jumlah sisi $n+2m$, digambarkan seperti tunas kelapa dan dilambangkan dengan $CR_{n,m}$. Graf tunas kelapa mempunyai himpunan titik $V(CR_{n,m}) = \{x_i, y_j, z \,;\, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(CR_{n,m}) = \{x_n x_i \,; i = 1\} \cup \{x_i x_{i+1} \,; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_j \,; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1} \,; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_n z \,; 1 \leq j \leq m-1\}$. Pada penelitian ini peneliti akan membatasi pada $3 \leq n$ dan $m = n - 1$ (Isnawati, 2013:26).

Adapun batasan dari penelitian ini adalah: (1) pada kasus pelabelan total sisi irregular pada graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ tunggal, untuk $3 \leq n$, $m = n - 1$, (2) pada kasus pelabelan total sisi irregular pada gabungan *s* komponen graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ isomorfis $sCR_{n,m}$, untuk $2 \leq s$, (3) pada kasus pelabelan total sisi irregular pada gabungan graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ non-isomorfis $CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s}$ dimana $3 \leq n$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan pada graf tunas kelapa dan gabungan saling lepas graf tunas kelapa yang isomorfis, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total sisi irregular maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Teknik penelitian pada graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$)dengan pelabelan total sisi irregular adalah sebagai berikut: (1) menghitung batas bawah dan batas atas dari *tes(G)* graf tunas kelapa (*tes*($CR_{n,m}$)) dengan menggunakan teorema $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$, (2) menggunakan metode pendeteksian pola dalam melabeli titik-titik pada bagian kelapa (*cycle*) dan tunas. (3) menggunakan metode pendeteksian pola dalam melabeli sisi-sisi bagian *cycle* ($x_i\, x_{i+1}$) dan sisi bagian tunas ($y_j\, y_{j+1}$), serta sisi bagian akar ($x_n z$) dari graf tunas kelapa, (4) mengecek bobot sisi pada masing-masing sisi dari graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$) dengan cara menjumlahkan label sisi dan label dua titik yang mengapit sisi tersebut, (5) menentukan formulasi dari pelabelan graf tunas kelapa yang sudah dilakukan, formulasi ini berupa fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi pada bilangan bulat, (6) menentukan nilai $tes(CR_{n,m})$, untuk $3 \leq n$ dan $m = n - 1$ dengan menggunakan batas bawah dan batas atas yang sudah diperoleh, (7) melakukan langkah yang sama seperti di atas untuk menentukan nilai *tes* pada gabungan graf tunas kelapa isomorfis dan non-isomorfis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal menentukan pelabelan total sisi irregular adalah menentukan jumlah sisi pada graf yang diteliti, menentukan batas bawah, menentukan label titik dan label sisi sehingga didapat bobot sisi yang berbeda pada graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$) dan gabungan graf tunas kelapa yang isomorfis dan non-isomorfis.

Teorema 1*: Nilai ketakteraturan total sisi dari graf tunas kelapa tunggal adalah $tes(CR_{n,m}) = n$, untuk untuk $3 \leq n$ dan $m = n - 1$.*

Bukti: Dengan mensubstitusikan jumlah sisi graf tunas kelapa yaitu $|E(CR_{n,m})| = n + 2m$ ke dalam teorema $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$ maka didapat batas bawah $\left\lceil \frac{n+2m+2}{3} \right\rceil \leq tes(G)$. Karena $m=n-1$ maka didapat $\lceil n \rceil \leq tes(G)$ Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $tes(G) \leq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$ yaitu dengan melabeli titik dan sisi pada $CR_{n,m}$ dengan mengikuti rumus di bawah ini:

- Label titik dan sisi pada bagian cycle.

  $\lambda(x_i) = \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor$, $\qquad i = 1, 2, \ldots, n - 1$

  $\lambda(x_n) = 2$

$\lambda(x_i x_{i+1}) = 1$

$\lambda(x_{r-1}^{r} x_r^{r}) = \left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$

$\lambda(x_n x_1) = m$

- Label titik dan sisi pada bagian tunas.

$\lambda(y_j) = n$ $\quad j=1, 2, . . . ,m$

$\lambda(z) = n$

$\lambda(x_n y_j) = j,$ $\quad j=1, 2, . . . ,m$

$\lambda(x_n z) = j + 2$ $\quad j = 1, 2, . . ., m-1$

$\lambda(y_j^{r} y_{j+1}^{r}) = (3n-2)+ \ldots +(3r-2) + 4 - r - 2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil + j,$

$j=1,2, ...,s-1$

Dari rumus label titik dan sisi di atas, dapat dihitung bobot total di setiap sisi graf tunas kelapa yaitu dengan menjumlahkan nilai label sisi dan nilai label titik yang dihubungkan oleh sisi yang tersebut. Berikut merupakan formulasi bobot total sisi dari graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$):

$\omega(x_i x_{i+1}) = 2+i,$ $\quad i = 1, 2, . . . , n-1$

$\omega(x_n y_j) = 2+n+j$ $\quad j = 1, 2, . . . , n-1$

$\omega(x_n z) = 2+2n$

$\omega(y_j y_{j+1}) = 2+2n+j,$ $\quad j=1, 2, . . . , n-2$

Dari rumus bobot total sisi di atas, maka didapat interval:

- Untuk sisi $x_i x_{i+1}$, bobot berada pada interval [3, n+2],
- Untuk sisi $x_n y_j$, bobot berada pada interval [n+3, 2n+1],
- Untuk sisi $x_n z$, memiliki bobot sisi 2n+2,
- Untuk sisi $y_j y_{j+1}$, bobot berada pada interval [2n+3, 3n].

Berdasarkan rumus interval di atas terlihat jelas bahwa bobot di setiap sisinya berbeda dan berada dalam himpunan $\{3,4, . . . , 3n\}$. Perhatikan label titik y_j ($\lambda(y_j)$) dan z ($\lambda(z)$) serta label sisi $x_n z$ ($\lambda(x_n z)$) dan sisi $y_{m-1} y_m$ ($\lambda(y_j y_{j+1})$ untuk $j=m-1$) yang nilainya sama dengan $tes(CR_{n,m}) = n$, karena titik-titik dan sisi-sisi tersebut merupakan label terbesar dari $CR_{n,m}$ maka dapat dikatakan $tes(CR_{n,m}) \leq n$. Sehingga dapat disimpulkan batas atas $tes(CR_{n,m})$ = batas bawah $tes(CR_{n,m})$, sehingga dapat disimpulkan pula bahwa

$tes(CR_{n,m}) = n$, untuk $3 \leq n$ dan $m = n\text{-}1$. Selanjutnya teorema yang dihasilkan berikut ini merupakan pengembangan dari teorema *tes* graf tunas kelapa tunggal.

Teorema 2 :*Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf tunas kelapa isomorfis adalah* $tes(sCR_{n,m}) = \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$, *untuk* $2 \leq s$, $3 \leq n$, *dan* $m=n\text{-}1$.

Bukti: Sekarang akan dibuktikan batas bawah atau $\left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil < tes(sCR_{n,m})$. Berdasarkan teorema yang menyatakan bahwa $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$. Karena $|sE(CR_{n,m})| = s(n+2m)$, maka $\left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil \leq tes(sCR_{n,m})$. Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari $tes(sCR_{n,m})$ yakni. $tes(sCR_{n,m}) \leq \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$. Untuk menentukan batas atas $sCR_{n,m}$ diawali dengan melabeli semua titik dan sisi, berikut ini adalah rumus untuk melabeli titik dan sisi pada gabungan graf tunas kelapa isomorfis dimana $1 \leq k \leq s$.

- Label titik dan sisi pada bagian cycle

$$\lambda(x_i^k) = \left\lfloor \frac{2\left(\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil - (n-2)\right) - 3 + i}{2} \right\rfloor, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

$$\lambda(x_n^k) = \left\lceil \frac{k(n+2m)+.2}{3} \right\rceil - (n-2)$$

$$\lambda(x_i^k x_{i+1}^k) = k(3n-2) + 3 - n - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\text{-}2$$

$$\lambda(x_{r-1}^r x_r^r) = k(3n-2) + 3 - n - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

$$\lambda(x_r^r x_1^r) = k(3n-2) + 3 - n - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$$

- Label titik dan sisi pada bagian tunas

$$\lambda(y_j^k) = \left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\lambda(z^k) = \left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil$$

$$\lambda(x_n^k y_j^k) = k(3n-2) + 2 - r - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil + j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\lambda(x_n^k z^k) = k(3n-2) + 2 - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil$$

$$\lambda(y_j^k y_{j+1}^k) = k\,(3n-2) + 4 - r - 2\left\lceil \frac{k(n+2m)+2}{3} \right\rceil + j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m\text{-}1$$

Berdasarkan rumus label titik dan sisi di atas, maka dapat dihitung bobot total di setiap sisi dari gabungan isomorfis graf tunas kelapa ($sCR_{n,m}$):

$\omega(x_i^k x_{i+1}^k)=2+(3n-2)(k-1)+i,\qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$

$\omega(x_n^k y_j^k) = 2+(3n-2)(k-1)+n+j\qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$

$\omega(x_n^k z^k) = 2+(3n-2)(k-1)+2n$

$\omega(y_j^k y_{j+1}^k) = 2+(3n-2)(k-1)+2n+j,\qquad j=1, 2, \ldots, n-2$

Dari rumus bobot total sisi di atas, nilai bobot sisi terkecil yaitu pada $\omega(x_i^k x_{i+1}^k)$ dengan mensubstitusikan $i = 1$ dan $k = 1$ didapat $\omega(x_1^1 x_2^1) = 3$, kemudian untuk $i = 2$ dan $k = 1$ didapat $\omega(x_2^1 x_3^1) = 4$, dan seterusnya. Sedangkan untuk $k = s$, didapat interval bobot total sisi sebagai berikut:

- Untuk sisi $x_i^s x_{i+1}^s$, bobot berada pada interval $[(3n-2)(s-1)+3,(3n-2)(s-1)+n+2]$;
- Untuk sisi $x_n^s y_j^s$, bobot berada pada interval $[(3n-2)(s-1)+n+3,(3n-2)(s-1)+2n+1]$;
- Untuk sisi $x_n^s z^s$, memiliki bobot sisi $(3n-2)(s-1)+2n+2$;
- Untuk sisi $y_j^s y_{j+1}^s$, bobot berada pada interval $[(3n-2)(s-1)+2n+3,(3n-2)(s-1)+3n]$.

Berdasarkan interval di atas terlihat bahwa bobot sisi terbesar berada pada $\omega(y_{n-2}^s y_{n-1}^s)= (3n-2)(s-1)+3n$, dengan demikian dapat dikatakan bobot total sisi pada gabungan graf tunas kelapa membentuk barisan aritmatika dengan suku awal 3 dan beda 1 atau dapat dituliskan $\{3, 4, 5, \ldots, ((3n-2)(s-1)+3n)\}$. Dapat disimpulkan bahwa bobot sisi pada gabungan graf tunas kelapa memiliki nilai yang berbeda-beda. Perhatikan $\lambda(y_i^k)$ saat $k = s$, nilai $\lambda(y_i^s) = \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$ merupakan label terbesar. Karena nilai $\lambda(y_i^s)$ merupakan batas atas dari $tes(sCR_{n,m})$ maka dapat dikatakan $tes(sCRn,m) \le \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$, sehingga dapat disimpulkan batas atas $tes(sCR_{n,m})$ = batas bawah $tes(sCR_{n,m})$, sehingga dapat disimpulkan pula bahwa $tes(sCRn,m) = \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$

untuk $n \geq 3$, $m = n - 1$ dan $s \geq 2$.

Selanjutnya akan disajikan teorema tentang nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf tunas kelapa non-isomorfis.

Teorema 3 : *Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf tunas kelapa non-isomorfis adalah* $tes(CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s}) = \left\lceil \frac{(n+2m)+\cdots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil$, *untuk* $n \geq 3$, $m = n - 1$ $r \geq 3$, *dan* $s = r - 1$.

Bukti: Substitusikan jumlah sisi gabungan non-isomorfis graf tunas kelapa $|E(CR_{n,m} \cup . . . \cup CR_{r,s})| = (n+2m)+ . . . +(r+2s)$ ke dalam teorema $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$ maka didapat batas bawah $\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil \leq tes(CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s})$. Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari $tes(CR_{n,m} \cup . . . \cup CR_{r,s})$ yaitu $tes(CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s}) \leq \left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil$. Untuk menentukan batas atas dari gabungan graf tersebut, diawali dengan melabeli semua titik dan sisi, rumus titik dan sisi pada bagian $CR_{n,m}$ menggunakan rumus seperti pada pelabelan graf tunas kelapa tunggal. Sedangkan rumus pelabelan bagian $CR_{p,q}$ adalah sebagai berikut:

- Label titik dan sisi pada bagian *cycle*

$$\lambda(x_i^r) = \left\lfloor \frac{2\left(\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil - (r-2)\right) - 3 + i}{2} \right\rfloor \quad i=1, 2, . . . , r\text{-}1$$

$$\lambda(x_r^r) = \left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil - (r-2)$$

$$\lambda(x_i^r x_{i+1}^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+3-r-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil, \quad i= 1, 2, . . ., r\text{-}2$$

$$\lambda(x_{r-1}^r x_r^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+3-r-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r-3}{2} \right\rfloor$$

$$\lambda(x_r^r x_1^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+3-r-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r-3}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil$$

- Label titik dan sisi pada bagian tunas

$$\lambda(y_j^r) = \left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil, \qquad j=1,2, . . . ,s$$

$$\lambda(z^r) = \left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil$$

$$\lambda(x_r^r y_j^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+2-r-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil + j, \; j=1,2, . . . ,s$$

$$\lambda(x_r^r z^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+2-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil$$

$$\lambda(y_j^r y_{j+1}^r) = (3n-2)+\ldots+(3r-2)+4-r-2\left\lceil \frac{(n+2m)+\ldots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil + j, \quad j=1,2, ...,s\text{-}1$$

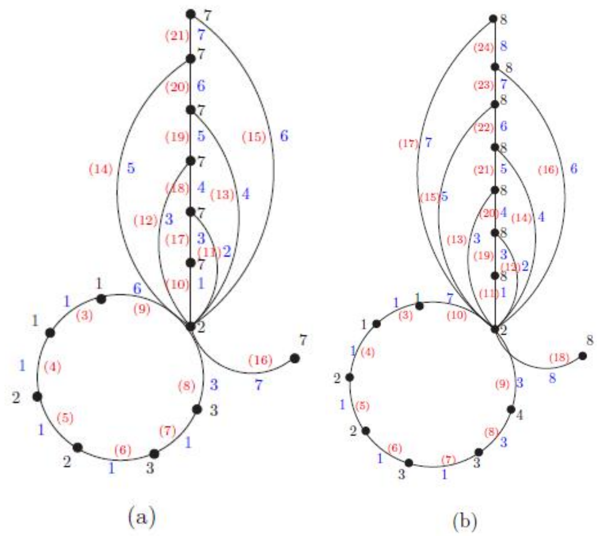
Berdasarkan rumus label titik dan sisi di atas, maka dapat dihitung bobot total di setiap sisi graf tunas kelapa. Untuk memudahkan mengidentifikasi apakah bobot total disetiap setiap sisi berbeda, maka digunakan sampel gabungan dua graf tunas kelapa non-isomorfis pertama, misalakan $CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$. Berikut ini merupakan formulasi bobot total sisi dari gabungan non-isomorfis graf tunas kelapa $CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$, rumus bobot total sisi pada bagian $CR_{n,m}$ mengikuti rumus bobot total sisi graf tunas kelapa tunggal sehingga bobot total sisi terkecil pada gabungan non-isomorfis graf tunas kelapa terdapat pada bagian $CR_{n,m}$ yaitu $CR_{n,m}$. Sedangkan pada bagian $CR_{p,q}$ formulasi bobot total sisi adalah sebagai berikut

$$\omega(x_i^p x_{i+1}^p) = 2 + (3n-2) + i, \qquad i=1,2,\ldots,p-1$$
$$\omega(x_n^p y_j^p) = 2 + (3n-2) + p + j, \quad j=1,2,\ldots,q$$
$$\omega(x_n^p z^p) = 2 + (3n-2) + 2p$$
$$\omega(y_j^p y_{j+1}^p) = 2 + (3n-2) + 2p + j, \qquad j=1,2,\ldots,q-1$$

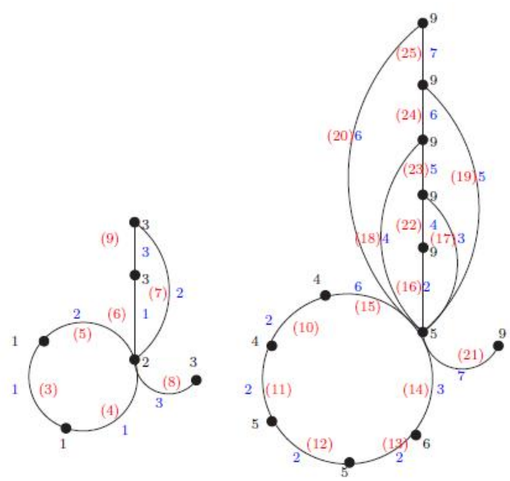
Dari rumus bobot total sisi di atas, dapat ditentukan interval bobot total sisi pada bagian $CR_{p,q}$ sebagai berikut:

- Untuk sisi $x_i^p x_{i+1}^p$, bobot berada pada interval $[(3n\text{-}2)+3,(3n\text{-}2)+p+2]$;
- Untuk sisi $x_n^p y_j^p$, bobot berada pada interval $[(3n\text{-}2)+p+3,(3n\text{-}2)+2+p+q]$;
- Untuk sisi $x_n^p z^p$, memiliki bobot sisi $(3n\text{-}2)+2p+2$;
- Untuk sisi $y_j^p y_{j+1}^p$, bobot berada pada interval $[(3n\text{-}2)+2p+3,3n+2p+q\text{-}1]$.

Berdasarkan rumus pelabelan dan interval di atas terlihat bahwa bobot sisi terbesar berada pada $\omega(y_{q-1}^p y_q^p) = 3n + 2p + q-1$, dengan demikian dapat dikatakan bobot total sisi pada gabungan non-isomorfis graf tunas kelapa membentuk barisan aritmatika dengan suku awal 3 dan beda 1 atau dapat dituliskan $\{3, 4, 5, \ldots s, (3n+2p+q-1)\}$. Dapat disimpulkan bahwa bobot sisi pada gabungan graf tunas kelapa memiliki nilai yang berbeda-beda. Perhatikan $\lambda(y_i^p)$, nilai $\lambda(y_i^p) = \left\lceil\frac{(n+2m)+(p+2q)}{3}\right\rceil$. Karena nilai $\lambda(y_i^p)$ merupakan batas atas dari tes(($CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$)) maka dapat dikatakan $tes(CR_{n,m} \cup CR_{p,q}) \le \left\lceil\frac{(n+2m)+(p+2q)}{3}\right\rceil$ sehingga dapat disimpulkan batas atas tes($CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$) = batas bawah tes ($CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$), sehingga dapat disimpulkan pula bahwa tes($CR_{n,m} \cup CR_{p,q}$) = $\left\lceil\frac{(n+2m)+(p+2q)}{3}\right\rceil$. Hasil tersebut juga berlaku untuk gabungan lebih dari dua graf tunas kelapa non-isomorfis yaitu tes($CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s}$) = $\left\lceil\frac{(n+2m)+\cdots+(r+2s)+2}{3}\right\rceil$.



Gambar 1: Gambar (a) $CR_{7,6}$ dan (b) $CR_{8,7}$



$te(CR_{3,2} \bigcup CR_{6,5}) = 9$

Gambar 2: Gabungan non-isomorfis $CR_{3,2} \bigcup CR_{6,5}$

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

- $tes(CR_{n,m}) = n$, untuk untuk $3 \leq n$ dan $m = n - 1$
- $tes(sCR_{n,m}) = \left\lceil \frac{s(n+2m)+2}{3} \right\rceil$, untuk $2 \leq s$, $3 \leq n$, dan $m=n-1$.
- $tes(CR_{n,m} \cup \ldots \cup CR_{r,s}) = \left\lceil \frac{(n+2m)+\cdots+(r+2s)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 3$, $r \geq 3$, $s = r - 1$, dan $m = n - 1$.

SARAN

Berdasarkan dari penelitian mengenai pelabelan total sisi irregular pada graf tunas kelapa baik tunggal maupun gabungannya, maka peneliti dapat memberikan saran antara lain:

- Pembaca dapat melanjutkan penelitian tentang pelabelan total sisi irregular pada graf tunas kelapa ($CR_{n,m}$) untuk $m \neq n-1$ serta gabungannya baik isomorfis maupun non-isomorfis;
- Pembaca dapat menjadikan hasil dari penelitian ini sebagai acuan dalam menentukan nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dari graf-graf khusus yang lain baik tunggal maupun gabungannya.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, M., Jendrol̀., Miller,M. dan Ryan, J. 2007. *On Irregular Total Labelling*. Discrete Mathematics,307(1): 1378-1388.

Isnawati, L. L. 2013. *Pelabelan Total Super (a-d)-Sisi Antimagic Graf Tunas Kelapa*. Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember