NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF TANGGA PERMATA

Hilmiyah Hanani[44], Slamin[45], Dafik[46]

Abstract. *Let graph G = (V,E) has V vertices and E edges. For every two different edges of graph G has total irregularity strength labelling of G if ωt(e) ≠ ωt(f) where graph G = (V,E) has V vertices and E edges. The weight edge of xy of a graph G is ωt(xy) =λ(x) +λ(xy) + λ(y) where λ(x) is the label vertex x and λ(y) is the label vertex y and λ(xy) is the label edge of the xy. The minimum value on the biggest labels make a graph G, has irregular labeling which is defined as total edge irregularity strength and denoted by tes(G). In this article, The total edge irregularity strength of diamond ladder graph and the union of diamond ladder graphs (isomorphic) are determined. The diamond ladder graph, denoted by Dl_n, is a graph consisting of n diamond (n ≥2) .*

Key Words : *Total edge irregularity strength, Diamond Ladder Graph* (Dl_n).

PENDAHULUAN

Perkembangan zaman yang semakin maju, menuntut manusia untuk mengembangkan ilmunya baik di bidang ilmu pengetahuan maupun teknologi. Sama halnyadengan matematika, aplikasi matematika yang luas juga selalu mengikuti kemajuanzaman. Hal ini dikarenakan, matematika merupakan dasar untuk setiap ilmu pengetahuan yang mana ilmu pengetahuan tersebut juga akan berkembang seiring denganperkembangan zaman. Matematika terdiri dari beberapa cabang, dan yang palingpopuler dikarenakan banyak aplikasinya yaitu matematika diskrit. Salah satu kajianteori dari matematika diskrit adalah teori graf. Teori graf sendiri memiliki beberapa pokok bahasan, diantaranya adalah pelabelan graf. Pelabelan pada suatu grafterdiri dari beberapa macam dan yangdigunakan oleh peneliti pada penelitian iniadalah pelabelan total sisi irregular pada suatu graf. Pada pelabelan total irregularsisi ini akan mengkaji tentang pelabelan suatu graf yang mana nilai label bilanganbulat positif terbesar pada sisi dan titik graf tersebut adalah minimum. Namun bobot untuk setiap sisinya berbeda. Dalam kasus ini, bilangan bulat positif terbesar yang dimaksud tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf *G*. Nilai ketakteraturan total sisi dari graf *G* biasa dinotasikan dengan *tes*(*G*). Graf yang digunakan oleh peneliti adalah graf tangga permata. Graf tangga

[44] Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[45] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[46] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

permata dinotasikan dengan *Dl* adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf tangga $L_n$dengan *L* sebanyak *n* titik. Graf tangga permata Dl_nmerupakan graf yang terdiri dari sejumlah *n* buah permata ($n \geq 2$).

Penelitian ini akan membahas tentang nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga permata (total edge irregularity strength of diamond ladder graphs) Dl_n karena belum pernah ada penelitian yang serupa sebelumnya pada graf ini. Beberapa rumusan masalah adalah: (1) berapakah nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dalam pelabelan total sisi irregular pada graf tangga permata tunggal, dan (2) berapakah nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dalam pelabelan total sisi irregular pada gabungan isomorfis graf tangga permata.

Penelitian dibatasi pada nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dari graf tangga permata tunggal (Dl_n) dan gabungannya mDl_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Dalam hal ini, *m* merupakan banyaknya graf tangga permata yang digabung yaitu minimal 2 graf tangga permata yang sama sedangkan *n* merupakan ketentuan dari jumlah permata sesuai dengan definisi graf tangga permata.

Pelabelan Total Sisi Irregular

Pelabelan total sisi irregular pada graf $G = (V,E)$ adalah pemberian label bilangan bulat positif pada himpunan titik *V* dan sisi *E* dimana label yang ditentukanboleh berulang dengan bobot untuk setiap sisinya memiliki perbedaan yang seminimum mungkin. Menurut Bača, Jendrol, Miller, Ryan (2007: 1379) nilai minimumpada label terbesar yang membuat sebuah graf *G* memiliki pelabelan total sisi irregular disebut sebagai nilai ketakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength*) dan dinotasikan dengan *tes*(*G*). Berikut adalah teorema tentang batas atas danbatas bawah dari *tes*(*G*) yang dapat digunakan sebagai acuan untuk menentukan nilai *tes*(*G*) dalam suatu pelabelan total sisi irregular pada graf *G*.

Teorema 1 *Jika G* = (*V*, *E*) *adalah sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E (tidak kosong), maka:*

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Bukti : Untuk memperoleh batas atas, misalkan sebuah graf *G* dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E*, jika kita melabeli setiap titik pada *G* dengan label 1dan sisi pada *G* secara berurutan dengan label 1, 2,... ,$|E|$. Jika nilai label dinotasikan dengan λ, maka nilai bobot untuk masing-masing sisi pada graf *G* adalah penjumlahan dari ketiga label:

$$\omega t(e_i) = \lambda(u) + \lambda(v) + \lambda(uv)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega t(e_i) = 1 + 1 + i = 2 + i \qquad untuk\ i = 1,2,3, \dots, |E|$$

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, maka teorema tersebut dapat digunakan untuk menentukan batas bawah dari nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga permata (Dl_n) yaitu *tes*(Dl_n) =$\left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil$.

Graf TanggaPermata (Diamond Ladder Graph)

Graf tangga permata yang dinotasikan dengan *Dl* adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata Dl_n merupakan graf yang terdiri dari *n* buah permata. Pada graf tangga, graf – grafnya tersusun seperti anak tangga yaitu keatas dan bentuk setiap tangganya adalah persegi panjang. Sedangkan graf tangga permata merupakan kumpulan permata yang berbentuk bujur sangkar tersusun kesamping. Penghubung antara 2 permata tersebut adalah 3 garis. Graf tangga permata memiliki himpunan titik *V* (Dl_n) = $\{x_i, y_i, z_j; 1 \le i \le n\ 1 \le j \le n\}$ dan himpunan sisi *E*(Dl_n) = $\{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \le i \le n-1\} \cup \{x_i y_i, 1 \le i \le n\} \cup \{z_j z_{j+1}, 2 \le j \le (2n-2) genap\} \cup \{x_i z_{2i}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}; 1 \le i \le n\}$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan pada graf tangga permata tunggal dan gabungan isomorfisnya, kemudian akan dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*) jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total sisi irregular. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut: (1) menentukan batas bawah dan batas atas dari *tes* (*G*) berdasarkan teorema 1. Dengan mensubstitusikan jumlah sisi pada graf tangga permata Dl_n pada formula sehingga diperoleh: $\left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil \le tes(G) \le (8n-3)$.Untuk gabungan graf tangga permata secara umum:$\left\lceil \frac{m(8n-3)+2}{3} \right\rceil \le tes(G) \le m(8n-3)$ untuk $n \ge 2$ dan $m \ge 2$; (2) melabeli graf Dl_n untuk $n \ge 2$ dengan label $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, sedangkan gabungan *m* Dl_n untuk $m \ge 2$ juga dilabeli dengan label $\{1, 2, 3, \dots, m(8n-3)\}$ sedemikian hingga bobot tiap sisinya berbeda; (3) menentukan formulasi yang berupa fungsi yang memetakan himpunan titik *V*(Dl_n) dan himpunan sisi *E*(Dl_n) pada bilangan bulat positif dari pelabelan yang telah pada bilangan bulat positif dari pelabelan yang telah dilakukan; (4) memeriksa kembali dengan menggunakan formulasi yang telah ditentukan pada langkah 3 untuk melihat apakah bobot setiap sisinya sudah berbeda; (5) menentukan nilai *tes* (Dl_n), untuk $n \geq 2$ dengan menggunakan batas atas dan batas bawah yang sudah diperoleh; (6) melakukan prosedur yang sama seperti langkah - langkah diatas untuk menentukan *tes* (mDl_n) untuk $n \geq 2$, dan $n \geq 2$ pada gabungan graf tangga permata isomorfis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Tangga Permata Tunggal

Berdasarkan definisi Graf tangga permata pada Bab 2, himpunan titik yang dimiliki Graf tangga permata adalah $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n\ 1 \leq j \leq n\}$ dimana label titik yang dimiliki adalah titik x_i, titik y_i dan titik z_j. Himpunan sisi pada Graf tangga permata adalah $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}, \cup \{x_i y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}, 2 \leq j \leq (2n-2) genap\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, -y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$, maka label sisi yang dimiliki adalah sisi $x_i x_{i+1}$, sisi $y_i y_{i+1}$, sisi $x_i y_i$, sisi $z_j z_{j+1}$, sisi $x_i z_{2i+1}$, sisi $x_i z_{2i}$, sisi $y_i z_{2i-1}$dansisi $y_i z_{2i}$. Berdasarkan himpunan titik dan himpunan sisi tersebut dapat diperoleh jumlah titik dan jumlah sisi dari graf tangga permata. Jumlah titik graf tangga permata $|V(Dl_n)|= 4n$ dan jumlah sisi graf tangga permata $|E(Dln)|= 8n - 3$. Dari jumlah titik dan jumlah sisi pada graf tangga permata, itu dapat digunakan untuk menentukan batas pelabelan total sisi irregular pada graf tangga permata. Oleh Karena itu akan dibuktikan bahwa $tes(Dl_n) = \left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil$

Teorema 2 *Nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga permata tunggal adalah* $tes(Dl_n) = \left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil$ *untuk* $n \geq 2$

Bukti : Menurut Teorema 1 $tes(G)$ dan karena $|E(Dl_n)| = 8n - 3$ maka $tes(Dl_n) \geq \left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas graf tangga permata dengan cara melabeli titik dan sisi pada graf tangga permata Dl_n. Pada pelabelan graf tangga permata tunggal akan dibagi menjadi 3 formula yang berlaku untuk i, j= 1, . . . , n sebagai berikut:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3}; & i \equiv 1 (mod\ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-4}{3}; & i \equiv 2 (mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0 (mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_j x_i) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-4}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_1 y_i) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-4}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_j) = \begin{cases} \frac{8i-8}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-7}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-9}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(x_i y_i) = \begin{cases} \frac{8i-8}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-4}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-6}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j x_i) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j y_i) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(y_i) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3)\ \ dan\ \ kecuali\ \ i = 1 \\ \frac{8i-1}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i-3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(z_j z_{j+1}) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3}; & i \equiv 1(mod\ \ 3) \\ \frac{8i+5}{3}; & i \equiv 2(mod\ \ 3) \\ \frac{8i+3}{3}; & i \equiv 0(mod\ \ 3) \end{cases}$$

Berdasarkan formula di atas, penghitungan bobot sisi dari setiap sisi Dl_n dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan dua label titik dengan label sisi yang dihubungkan oleh kedua titik tersebut. Berikut merupakan formula bobot sisi dari graf tangga permata:

$$\begin{aligned} \omega(z_j x_i) &= \lambda(z_j) + \lambda(x_i) + \lambda(z_j x_i) \\ &= \left(\frac{8i-8}{3}\right) + \left(\frac{8i-2}{3}\right) + \left(\frac{8i-5}{3}\right) \\ &= 8i - 5, & i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ \omega(z_j y_i) &= \lambda(z_j) + \lambda(y_i) + \lambda(z_j y_i) \\ &= \left(\frac{8i-8}{3}\right) + \left(\frac{8i+1}{3}\right) + \left(\frac{8i-5}{3}\right) \\ &= 8i - 4, & i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ \omega(x_i y_i) &= \lambda(x_i) + \lambda(y_i) + \lambda(x_i y_i) \\ &= \left(\frac{8i-2}{3}\right) + \left(\frac{8i+1}{3}\right) + \left(\frac{8i-8}{3}\right) \\ &= 8i - 3, & i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ \omega(x_i z_j) &= \lambda(x_i) + \lambda(z_j) + \lambda(x_i z_j) \\ &= \left(\frac{8i-2}{3}\right) + \left(\frac{8i+1}{3}\right) + \left(\frac{8i-5}{3}\right) \\ &= 8i - 2, & i = 1, 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(z_jy_i) &= \lambda(z_j)+\lambda(y_i)+\lambda(z_jy_i);\ Untuk\ j = bilangan\ genap\\
&= \left(\frac{8i+1}{3}\right)+\left(\frac{8i+1}{3}\right)+\left(\frac{8i-5}{3}\right)\\
&= 8i-1, \qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,3,\dots,n\\
\omega(x_ix_{i+1}) &= \lambda(x_i)+\lambda(x_{i+1})+\lambda(x_ix_{i+1});\ Untuk\ j = bilangan\ genap\\
&= \left(\frac{8i-2}{3}\right)+\left(\frac{8i-2}{3}\right)+\left(\frac{8i-2}{3}\right)\\
&= 8i, \qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,3,\dots,n\\
\omega(z_jz_{j+1}) &= \lambda(z_j)+\lambda(z_{j+1})+\lambda(z_jz_{j+1});\ Untuk\ j \geq 2\\
&= \left(\frac{8i+1}{3}\right)+\left(\frac{8i-8}{3}\right)+\left(\frac{8i+1}{3}\right)\\
&= 8i+1, \qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,3,\dots,n\\
\omega(y_iy_{i+1}) &= \lambda(y_i)+\lambda(y_{i+1})+\lambda(y_iy_{i+1});\ Untuk\ j = bilangan\ genap\\
&= \left(\frac{8i+1}{3}\right)+\left(\frac{8i+1}{3}\right)+\left(\frac{8i-2}{3}\right)\\
&= 8i+2, \qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,3,\dots,n
\end{aligned}$$

Dari formula diatas dapat diketahui bahwa bobot terkecil dari graf tangga permata adalah $\omega(z_jx_i)$ yaitu $8i$ -5. Apabila kita substitusikan nilai i = 1 pada $\omega(z_jx_i)$ maka diperoleh $\omega(z_jx_i)$ = 3 dan substitusikan i = 2 pada $\omega(z_jx_i)$ maka diperoleh $\omega(z_jx_i)$ = 4. Bobot terbesar dari graf tangga permata adalah $\omega(y_iy_{i+1})$ yaitu $8i+2$ namun pada graf tangga permata, bobot terbesar pada akhir graf adalah pada $\omega(z_jy_i)$. Apabila kita substitusikan nilai $i = n$ maka diperoleh $\omega(z_jy_i) = 8n - 1$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa bobot sisi dari graf tangga permata memiliki nilai yang berbeda.

Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Gabungan Isomorfis Graf Tangga Permata

Pada subbab ini akan dibuktikan nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan isomorfis graf tangga permata sebanyak m. Ini merupakan pengembangan dari *tes* graf tangga permata tunggal. Dalam penelitian ini akan dibatasi pada mDl_n untuk $m \geq 2$, $n \geq 2$, $n \equiv 2 (mod\ 3)$ dan $n \equiv 0 (mod\ 3)$.

Teorema 3 *Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf tanga permata isomorfis adalah tes* $(mDl_n) = \left\lceil \frac{m(8n-3)+2}{3} \right\rceil$, *untuk* $m \geq 2$, *dan* $n \geq 2$.

Bukti :Menurut Teorema 1 *tes* (mDl_n) ≥ $\left\lceil\frac{m|E|+2}{3}\right\rceil$ dan karena $|E(mDl_n)|$ = 8*n* - 3 maka *tes* (mDl_n) ≥ $\left\lceil\frac{m(8n-3)+2}{3}\right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas gabungan isomorfis graf tangga permata dengan cara melabeli titik dan sisi pada graf tangga permata mDl_n. Pada pelabelan gabungan isomorfis graf tangga permata akan dibagi menjadi 2 formula yang berlaku untuk 1 ≤i, j ≤ n dan k = sebarang bilangan sebagai berikut:

1. Untuk n ≡ 2 mod 3

$$\lambda(x_i^k)=\begin{cases}\frac{8i-2}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-2; & i\equiv 1(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-4}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-1; & i\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-3}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-2; & i\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}$$

$$\lambda(x_i^ky_i^k)=\begin{cases}\frac{8i-8}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil+mod\ \ (\frac{m}{3}); & i\equiv 1(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-4}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m}{3}); & i\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-6}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil+mod\ \ (\frac{m}{3}); & i\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda((z_j^kx_i^k)=\begin{cases} i\ \equiv 1(mod\ 3)\begin{cases}\frac{8i-5}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m}{3}); & m\equiv 1(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-5}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m+1}{3}); & m\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-5}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m-1}{3}); & m\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}\\ i\ \equiv 2(mod\ 3)\begin{cases}\frac{8i-4}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m}{3}); & m\equiv 1(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-4}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m+1}{3}); & m\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-4}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m-1}{3}); & m\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}\\ i\ \equiv 0(mod\ 3)\begin{cases}\frac{8i-3}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil; & m\equiv 1(mod3)\\ \frac{8i-3}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil+mod\ \ (\frac{m-1}{3}); & m\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-3}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-mod\ \ (\frac{m-2}{3}); & m\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}\end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_j^k)=\begin{cases}\frac{8i-8}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil; & i\equiv 1(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-7}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-1; & i\equiv 2(mod\ \ 3)\\ \frac{8i-9}{3}+\left\lceil\frac{((m-1)(8n-3))+2}{3}\right\rceil-1; & i\equiv 0(mod\ \ 3)\end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda((z_j^k y_i^k) = \begin{cases} i \equiv 1(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}); & m \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m+1}{3}); & m \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}); & m \equiv 0(mod\ 3) \end{cases} \\ i \equiv 2(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}); & m \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m+1}{3}); & m \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}); & m \equiv 0(mod\ 3) \end{cases} \\ i \equiv 0(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & m \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m-1}{3}); & m \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-2}{3}); & m \equiv 0(mod\ 3) \end{cases} \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k x_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m}{3}) - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ i \equiv 2(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m+1}{3}) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}) \end{cases} \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ \frac{m}{3} - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ i \equiv 2(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m+1}{3}) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}) \end{cases} \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 2; & i \equiv 1(mod3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m}{3}); & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-8}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m}{3}); & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}); & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-6}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m}{3}); & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} i \equiv 1(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}) \\ \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m+1}{3}) \\ \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}) \end{cases} \\ \frac{8i+5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ i \equiv 0(mod\ 3) \begin{cases} \frac{8i+3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m}{3}) \\ \frac{8i+3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil \\ \frac{8i+3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - mod\ (\frac{m-1}{3}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + mod\ (\frac{m}{3}); & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

2. Untuk m $\equiv$ 0 mod 3

$$\lambda(x_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-6}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_j^k x_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 2; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_1 y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 2; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(z_j^k) = \begin{cases} \frac{8i-8}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-7}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-9}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan ganjil

$$\lambda(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-4}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k x_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{8i-2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i+2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk j = bilangan genap

$$\lambda(z_j^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i-1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i+2}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i-3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil + 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

$$\lambda(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{8i+1}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 1(mod\ 3) \\ \frac{8i+5}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 2(mod\ 3) \\ \frac{8i+3}{3} + \left\lceil \frac{((m-1)(8n-3))+2}{3} \right\rceil - 1; & i \equiv 0(mod\ 3) \end{cases}$$

Berdasarkan formula di atas, penghitungan bobot sisi dari setiap sisi pada gabungan isomorfis graf tangga permata *mDl*$_n$ dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan dua label titik dengan label sisi yang dihubungkan oleh kedua titik tersebut. Berikut merupakan formula bobot sisi dari graf tangga permata dengan $m \geq 2$, $n \geq 2$ dani = 1, ...n:

$$\begin{aligned} \omega(z_j^k x_i^k) &= \lambda(z_j^k) + \lambda(x_i^k) + \lambda(z_j^k x_i^k) \\ &= \tfrac{8i-8}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil + \tfrac{8i-2}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i-5}{3} \\ &\quad + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - mod(\tfrac{m-2}{3}) \\ &= 8i - 9 + 3 * \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil \\ \omega(z_j^k x_i^k) &= \lambda(z_j^k) + \lambda(x_i^k) + \lambda(z_j^k x_i) \\ &= \tfrac{8i-8}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil + \tfrac{8i-2}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i-5}{3} \\ &\quad + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - mod(\tfrac{m-2}{3}) \\ &= 8i - 9 + 3 * \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(z_j^k y_i^k) &= \lambda(z_j^k) + \lambda(y_i^k) + \lambda(z_j^k y_i^k) \\ &= \tfrac{8i-8}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil + \tfrac{8i+1}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i-5}{3} \\ &\quad + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil + mod(\tfrac{m}{3}) \\ &= 8i - 8 + 3 * \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil \\ \omega(x_i^k y_i^k) &= \lambda(x_i^k) + \lambda(y_i^k) + \lambda(x_i^k y_i^k) \\ &= \tfrac{8i-2}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i+1}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i-8}{3} \\ &\quad + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - mod(\tfrac{m}{3}) \\ &= 8i - 7 + 3 * \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil \\ \omega(x_i^k z_j^k) &= \lambda(x_i^k) + \lambda(z_j^k) + \lambda(x_i^k z_j) \\ &= \tfrac{8i-2}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - 2 + \tfrac{8i-8}{3} + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil + \tfrac{8i-5}{3} \\ &\quad + \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil - mod(\tfrac{m}{3}) \\ &= 8i - 6 + 3 * \left\lceil \tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(z_jy_i) &= \lambda(z_j)+\lambda(y_i)+\lambda(z_jy_i);\, Untuk\ j\ =\ bilangan\ genap\\
&= \tfrac{8i-8}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil+\tfrac{8i+1}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-2+\tfrac{8i-5}{3}\\
&\quad+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil+mod(\tfrac{m}{3})\\
&= 8i-5+3*\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil\\
\omega(x_ix_{i+1}) &= \lambda(x_i)+\lambda(x_{i+1})+\lambda(x_ix_{i+1});\, Untuk\ j\ =\ bilangan\ genap\\
&= \tfrac{8i-2}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-2+\tfrac{8i-2}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-2+\tfrac{8i-2}{3}\\
&\quad+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil\\
&= 8i-4+3*\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil,\\
\omega(z_jz_{j+1}) &= \lambda(z_j)+\lambda(z_{j+1})+\lambda(z_jz_{j+1});\, Untuk\ j\ =\geq\ 2\\
&= \tfrac{8i-8}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil+\tfrac{8i+1}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-mod(m-23)\\
&\quad+\tfrac{8i-5}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-1\\
&= 8i-3+3*\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil,\\
\omega(y_iy_{i+1}) &= \lambda(y_i)+\lambda(y_{i+1})+\lambda(y_iy_{i+1});\, Untuk\ j\ =\ bilangan\ genap\\
&= \tfrac{8i+1}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-2+\tfrac{8i+1}{3}+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil-2+\tfrac{8i-2}{3}\\
&\quad+\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil\\
&= 8i-2+3*\left\lceil\tfrac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil,
\end{aligned}$$

Dari formula di atas dapat diketahui bahwa bobot terkecil dari gabungan isomorfis graf tangga permata adalah $\omega(z_jx_i)$ yaitu $8i-9+3*\left\lceil\frac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil$. Apabila kita substitusikan nilai i = 1 pada $\omega(z_jx_i)$ maka diperoleh $\omega(z_jx_i)$= 3 dan substitusikan i = 2 pada $\omega(z_jy_i)$ maka diperoleh $\omega(z_jy_i)$ = 4. Bobot terbesar dari gabungan isomorfis graf tangga permata adalah $\omega(y_iy_{i+1})$ yaitu $8i-2+3*\left\lceil\frac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil$ namun pada gabungan isomorfis graf tangga permata, bobot terbesar pada akhir graf adalah pada $\omega(z_jy_i)$. Apabila kita substitusikan nilai $i = n$ maka diperoleh$\omega(z_jy_i) = 8i-5+3*\left\lceil\frac{((m-1)(8n-1))+2}{3}\right\rceil$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa bobot sisi dari gabungan isomorfis graf tangga permata memiliki nilai yang berbeda.

Open problem 1 *Untuk gabungan isomorfis graf tangga permata mDl_n, apakah terdapat pelabelan total sisi irregular pada $m \equiv 1$ mod 3, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$.*

Open problem 2 *Graf tangga permata telah diteliti menggunakan pelabelan total super (a,d) - sisi antimagic dan pelabelan total sisi irregular, adakah keterkaitan antara kedua pelabelan tersebut pada graf tangga permata.*

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa *nilai ketakteraturan total sisi* (*tes*) dari graf tangga permata tungga lmaupun gabungannya adalah sebagai berikut:

1. *nilai ketakteraturan total sisi* dari graf tangga permata tunggal, *tes* (Dl_n) = $\left\lceil \frac{8n-1}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 2$;
2. *nilai ketakteraturan total sisi* dari gabungan isomorfis graf tangga permata, *tes* (mDl_n) = $\left\lceil \frac{m(8n-1)+2}{3} \right\rceil$, untuk $m \geq 2$, dan $n \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bača, M., Jendroĺ.,Miller,M. dan Ryan,J.2007. *On Irregular Total Labelling. Discrete Mathematics*, 307(1): 1378-1388.
[2] Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory, Electronic Edition 2005* [On Line].http://ftp.emis.de/pub/EMIS/monographs/Diestel/en/GraphTheoryIII.pdf.[26 November 2011]
[3] Gallian, J.A. 2009. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. [serial on line].http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf. [22 Januari 2013].
[4] Laelatus, S. 2011. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember:UniversitasJember.
[5] Nurdin, dkk. 2006. *The Total Edge Irregular Strength Of Union Graphs of K*(2, *n*). *Bandung: Bandung Institute of Technology. Artikel.*
[6] *Pfender, F. Total Edge Irregularity Strength Of Large Graphs. Artikel.*
[7] *Siddiqui, M. K. On Edge Irregularity Strength Of Subdivision Of star Sn.Lahore: GC University. Artikel.*
[8] *Slamin. 2009. DESAIN JARINGAN:PendekatanTeori Graf. Jember: Jember University Press.*