FUNGSI GELOMBANG DAN RAPAT PROBABILITAS PARTIKEL BEBAS 1D DENGAN MENGGUNAKAN METODE CRANK-NICOLSON

Rif'ati Dina Handayani[1)]

Abstract: Suatu partikel yang bergerak dengan momentum p, menurut hipotesa De-Broglie akan memiliki panjang gelombang λ, yang memiliki hubungan dengan bilangan gelombang k. Hipotesa De-Broglie juga berlaku untuk partikel bebas. Dalam hal ini partikel bebas merupakan suatu partikel yang bebas bergerak tanpa dipengaruhi oleh gaya apapun dalam suatu bagian ruang, $F = 0, V = 0$. Metode Crank-Nicolson merupakan salah satu dari beberapa metode beda hingga yang memiliki kestabilan tanpa syarat dan nilai errornya paling kecil dibandingkan dengan metode lainnya. Hasil simulasi dengan menggunakan metode Crank-Nicolson menunjukkan hasil yang cukup sesuai dengan teori. Dalam hal ini Partikel bebas merupakan representasi dari gelombang paket yang berosilasi di sekitar x=0 dalam suatu ruang yang berukuran Δx, dimana probabilitas terbesar terletak di sekitar x = 0, dikarenakan pada daerah tersebutlah amplitude maksimum terjadi.

Kata kunci: Partikel Bebas, Fungsi Gelombang, rapat probabilitas, metode Crank-Nicolson

PENDAHULUAN

Dalam fisika klasik hukum dasar fisika selalu digunakan untuk menurunkan persamaan gelombang. Salah satu persamaan atau hukum yang dipergunakan untuk menurunkan persamaan gelombang dari gelombang elektromagnetik yang menjalar dalam ruang vakum dalam tinjauan klasik adalah Persamaan Maxwell. Dalam hal ini gelombang selalu ditinjau dari sifat gelombang itu sendiri. Hal ini tentu saja bertolak belakang dengan tinjauan kuantum, dimana gelombang ditinjau tidak hanya dari sifat gelombangnya saja tetapi sifat partikel. Beberapa percobaan telah dilakukan untuk membuktikan sifat partikel dari suatu gelombang, seperti percobaan yang dilakukan oleh Einstein dalam percobaan efek fotolistrik, maupun hamburan Compton.

[1)] Rif'ati Dina Handayani merupakan staf pengajar Prodi Pendidikan Fisika Universitas Jember

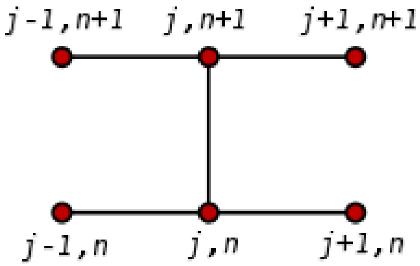
Suatu partikel yang bergerak dengan momentum p, menurut hipotesa De-Broglie akan memiliki panjang gelombang $\lambda = \frac{h}{p}$, dimana tampak juga bahwa gelombang De-Broglie memiliki hubungan dengan bilangan gelombang $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Hipotesa De-Broglie juga berlaku untuk partikel bebas. Dalam hal ini partikel bebas merupakan suatu partikel yang bebas bergerak tanpa dipengaruhi oleh gaya apapun dalam suatu bagian ruang, $F = 0, V = 0$, (Krane, 1992: 182). Gelombang De-Broglie yang menyatakan partikel bebas dalam tinjauan kuantum merupakan representasi dari gelombang paket. Gelombang paket ini terjadi karena superposisi dari gelombang sinus de gan rentang sangat pendek . Secara khusus, gelombang paket yang menjalar memiliki kecepatan grup yang sama dengan kecepatan partikel bermassa m dan momentum $p = \hbar k$, yaitu $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$. Apabila persamaan di atas diintegralkan maka akan didapatkan hubungan gelombang De-Broglie untuk partikel bebas bermassa m, adalah $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Dalam tinjauan kuantum, terdapat persamaan parsial orde dua yang dipergunakan untuk memecahkan solusi dari suatu fungsi gelombang, yaitu persamaan Schrodinger. Fungsi gelombang yang dihasilkan dari persamaan Schrodinger memberikan informasi tentang perilaku gelombang dari partikel. Adapun persamaan Schrodinger untuk partikel bebas yang bergerak dalam 1 arah sumbu x dinyatakan dalam persamaan $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ yang memiliki solusi dalam bentuk eksponensial kompleks $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ dengan energi $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Karena pemecahan atau solusi tidak memberi batasan pada k, maka energi potensial diperkenankan memiliki semua nilai (energi tak terkuantisasi). Pada dasarnya persamaan energi di atas merupakan persamaan energi kinetik dari suatu partikel yang bergerak dengan momentum $p = \hbar k$.

Secara klasik gelombang merupakan fungsi real dari ruang dan waktu, sedangkan hal sebaliknya terdapat pada fungsi gelombang yang merupakan solusi dari persamaan Schrodinger yang bukan merupakan fungsi real dari ruang dan waktu. Fungsi gelombang ini merupakan fungsi kompleks yang menggambarkan suatu perubahan perilaku gelombang sebagai suatu kuantum partikel.

Secara umum solusi gelombang dari suatu partikel bebas merupakan superposisi gelombang sinusional yang membentuk suatu gelombang paket yang memiliki semua kemungkinan frekuensi angular dan bilangan gelombang yakni $\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k')e^{i(k'x-\omega' t)}\,dk'$, dimana $\hbar\omega'^2 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$. Dalam hal ini superposisi $A(k')$ merupakan suatu kuantitas kompleks dari fungsi k' dan integralnya menyatakan jumlah semua kemungkinan dari nilai k'. Untuk posisi dan momentum dari fungsi gelombang dari partikel bebas yang bergerak 1 dimensi memenuhi prinsip ketidakpastian Heisenberg, yakni $\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Metode Crank-Nicolson sendiri merupakan salah satu dari beberapa metode beda hingga yang memiliki kestabilan tanpa syarat dan nilai errornya paling kecil dibandingkan dengan metode lainnya. Metode Crank-Nicolson menggunakan suatu titik untuk mencapai aproksimasi turunan kedua dalam waktu tanpa menggunakan lebih dari dua tingkat waktu, maka akan dilakukan aproksimasi beda pusat dengan menggunakan gagasan tingkat waktu pada (j+1/2).



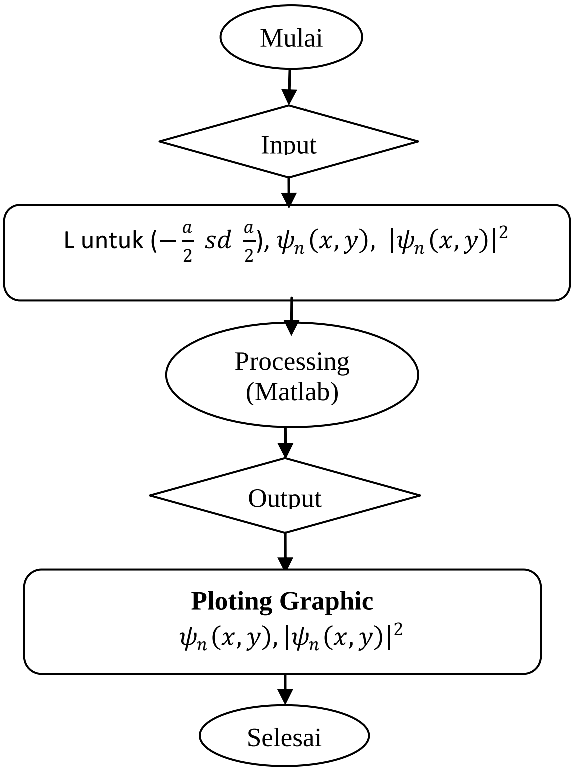
Gambar 1. Ilustrasi metode Crank Nicolson untuk kasus 1 D

Metode Crank Nicolson didasarkan pada pendekatan trapezium yang memberikan kekonvergenan, pada orde dua, yaitu $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$. Metode Crank-Nicolson adalah metode gabungan dari metode Forward Euler dan Bacward Euler, yakni $\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[F_i^{n+1}\left(u,x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + F_i^n\left(u,x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]$.

Secara umum metode Crank Nicolson cukup baik dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial orde dua seperti persamaan difusi panas, atau persamaan adveksi. Bertolak dari hal itulah, maka perlu dilakukan suatu simulasi dengan menggunakan metode Crank-Nicolson pada persamaan Schrodinger, dimana pada penelitian ini yang ditinjau adalah partikel bebas yang merupakan reperentasi dari gelombang paket.

METODE PENELITIAN

Dalam penelitian model partikel bebas 1D diselesaikan dengan menggunakan persamaan Schrodinger kemudian disimulasikan dengan menggunakan metode Crank-Nicolson. Metode Crank-Nicolson mensimulasikan fungsi gelombang dan distribusi rapat probabilitas dari partikel bebas 1 D dalam bentuk grafik dengan menggunakan Matlab R2008a . Adapun Flowchart dalam simulasi ini adalah sebagai berikut.



Gambar 2. *Flow chart* Program simulasi fungsi gelombang dan rapat probabilitas dari partikel bebas yang bergerak 1 arah (1D)

Secara eksplisit solusi dari fungsi dari partikel bebas 1D dengan menggunakan metode Crank-Nicolson adalah sebagai berikut:

Persamaan Shrodinger untuk partikel bebas 1 D

$$i\hbar\frac{\partial\psi\,(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

(1)

Dalam operator Hamiltonian dapat ditulis dengan

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

(2)

Dimana $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

Untuk setiap iterasi maka persamaan di atas dapat dituliskan dengan

$$i\hbar\frac{\psi_{j,n+1}-\psi_{j,n}}{\tau} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} H_{jk}\,(\psi_{k,n+1} - \psi_{k,n})$$

(3)

Dalam notasi matriks ditulis dengan

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \frac{i\tau}{2\hbar}H(\psi_{n+1}+\psi_n)$$

(4)

Dengan sedikit penyelesaian, maka akan didapatkan

$$\left(I + \frac{i\tau}{2\hbar}H\right)\psi_{n+1} = (I - \frac{i\tau}{2\hbar}H)\,\psi_n$$

(5)

Sehingga

$$\psi_{n+1} = \left(I + \frac{i\tau}{2\hbar}H\right)^{-1}(I - \frac{i\tau}{2\hbar}H)\,\psi_n$$

(6)

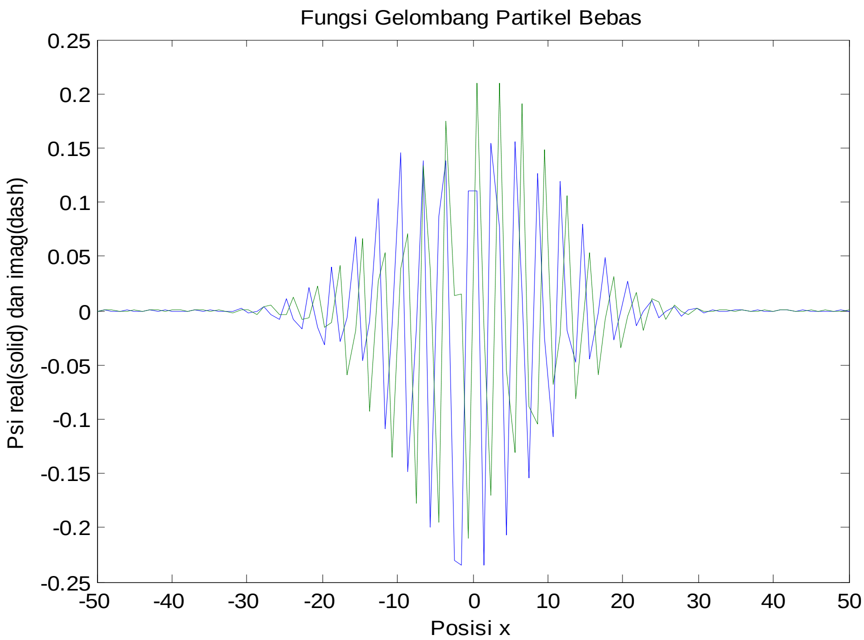
Persamaan diatas yang akan dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger untuk partikel bebas 1D. Untuk mensimulasikan fungsi gelombang dan rapat probabilitas dari partikel bebas maka diperlukan beberapa syarat batas. Pada kondisi ini dianggap bahwa sebuah partikel bebas yang dilokalisasi pada posisi x_o dengan paket gelombang selebar σ_o atau biasa dituliskan Δx , dengan momentum rata-rata $p_o = \hbar k_o$ (k_o adalah rata-rata bilangan gelombang). Dalam penelitian ini paket gelombang yang merupakan fungsi gelombang dari partikel bebas 1D berbentuk Gaussian, yaitu

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0\sqrt{\pi}}} e^{ik_0 x} e^{-(x-x_o)^2/2\sigma_0{}^2} \quad (7)$$

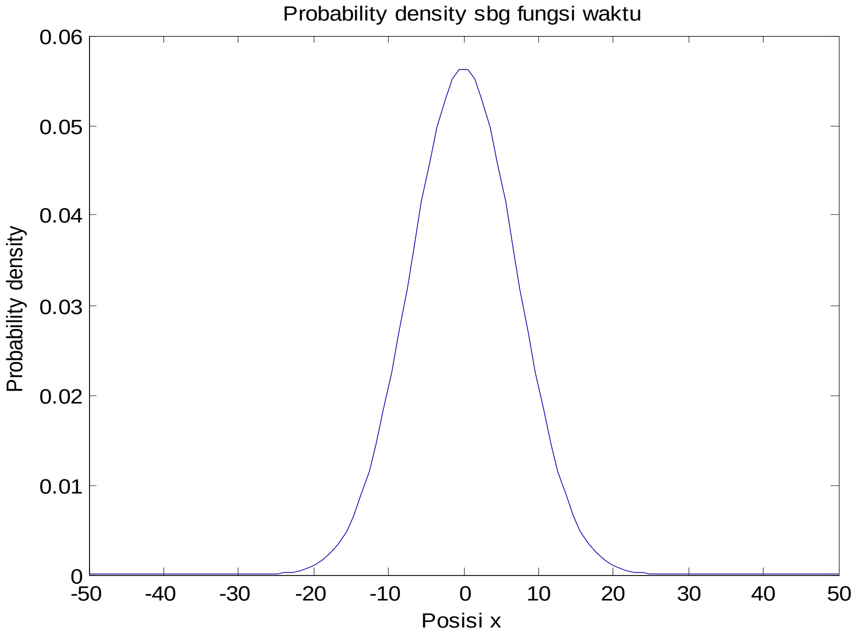
Fungsi gelombang di atas ternormalisasi sehingga $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Simulasi dengan menggunakan metode Crank-Nicolson untuk partikel bebas yang bergerak 1 arah (1D) ditampilakn hanya untuk fungsi gelombang dan rapat probabilitas untuk selang $-\frac{a}{2}\; sampai\; dengan\; \frac{a}{2}$. berikut adalah hasil simulasi fungsi gelombang dari partikel bebas dengan menggunakan metode Crank-Nicolson.



Gambar 2. Grafik fungsi gelombang dari partikel bebas dengan metode Crank-Nicolson



Gambar 2. Grafik rapat probabilitas dari partikel bebas dengan metode Crank-Nicolson

Gambar 2 merupakan hasil simulasi fungsi gelombang dari partikel bebas. Dari grafik tampak bahwa partikel bebas bergerak menyerupai gelombang group atau gelombang paket. Sebuah gelombang paket atau gelombang group yang terbentuk merupakan hasil superposisi sejumlah besar gelombang yang berinterferensi secara maksimum disekitar partikel, sehingga menghasilkan sebuah resultan gelombang dengan amplitude yang berubah-ubah. Gambar 2 merupakan sebuah paket gelombang yang ideal, dimana hal ini berkaitan dengan sebuah partikel yang kedudukannya terbatas dalam daerah berukuran Δx dan momentum Δp yang berkaitan dengan panjang gelombang De-Broglie tertentu. Gelombang paket ini hanya memiliki amplitude besar dalam daerah Δx. Komponen-komponen gelombang paket pada x = 0 bergetar dengan fase sama, sehingga resultan gelombangnya memiliki amplitude maksimal, sebaliknya pada saat menjauhi titik x = 0, selisih perbedaan panjang gelombang akan menyebabkan fase gelombang sinusiodal ini berlawanan sehingga resultan gelombangnya memiliki amplitude yang kecil dan mendekati nol. Berdasarkan gambar 2 juga tampak bahwa selubung gelombang paket bergerak dengan kecepatan yang berbeda dari masing-masing komponen gelombangnya yang dikenal dengan kecepatan group. Jadi sebuah partikel yang terbatasi kedudukannya pada suatu bagian ruang tertentu tidak hanya dinyatakan oleh suatu gelombang De-Broglie dengan energi dan frekuensi tertentu, tetapi oleh suatu paket gelombang yang merupakan superposisi dari sejumlah besar gelombang.

Gambar 3 merupakan grafik dari rapat probabilitas dari suatu partikel bebas. Sebelumnya sudah dibahas bahwa sebuah partikel bebas dalam tinjauan paket gelombang terbatasi kedudukannya. Apabila partikel tersebut dibatasi pada suatu ruang berukuran Δx, maka paket gelombang yang menyatakan partikel tersebut hanyalah memiliki amplitude yang besar dalam daerah yang berukuran Δx, sedangkan diluarnya amplitudonya kecil. Hal ini berarti bahwa amplitude gelombang De-Broglie dari suatu partikel pada sembarang titik berkaitan dengan probabilitas untuk menemukan partikel yang bersangkutan dalam titik tersebut. Analogi dari fisika klasik menunjukkan bahwa intensitas sebuah gelombang berbanding lurus dengankuadrat amplitudonya, maka probabilitas ini juga berbanding lurus dengankuadrat amplitude gelombang De-Broglie. Dari grafik probabilitas menunjukkan bahwa peluang terbesar untuk mendapatkan partikel dari suatu paket gelombang terletak disekitar x=0. Hal ini memang dikarenakan pada daerah tersebutlah amplitude terbesar atau maksimum terjadi.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa partikel bebas merupakan representasi dari gelombang paket yang berosilasi di sekitar x=0 dalam suatu ruang yang berukuran Δx, dimana probabilitas terbesar terletak di sekitar x = 0, dikarenakan pada daerah tersebutlah amplitude maksimum terjadi

DAFTAR PUSTAKA

Beiser, A. 2003. *Concepts of Modern Physics.* Sixht Edition. New York: McGraw-Hill.

Boas, M. L. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. Second Edition. New York: John Wiley and Sons.

Griffith, D. J. 1995. *Introduction to Quantum Mechanics.* New Jersey: Prentice Hall.

Kittel, C. 2005. *Introduction to solid Physics*. New York: John Wiley and Sons

Krane, K. S. 1992. *Fisika Modern.* Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Liboff, R. L. 1990. *Introductory Quantum Mechanics*. USA: Addison Wesley Publishing Company.

Phillips, A. C. 2003. *Introduction to Quantum Mechanics.* New York: John Wiley and Sons.

Purwanto, A. 2006. *Pengantar Fisika Kuantum*. Surabaya: Citra Media.

Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: Andi