

PEWARNAAN TITIK TOTAL ANTIAJAIB LOKAL PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Safira Izza Ghafrina^{1*}, Slamir², Dafik³, Arif Fatahillah⁴, Antonius Cahya Prihandoko⁵

^{1,3,4}Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Jember, Indonesia)

^{2,5}Program Studi Informatika, Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Jember, Indonesia)

***Abstract:** This research is a development of a paper entitled "Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph" by Arumugam et al. Regarding vertex coloring with edge labeling on a special graph which aims to determine the coloring of the local magic total vertex on the graph resulting from the corona operation. The study will also analyze the relationship between local antimagic total vertex coloring and the local antimagic vertex coloring of corona product graphs; And Analyzing the relationship of high-level thinking skills in determining the local antimagic total vertex coloring on the graphs of corona product studied using Revised Taxonomy Bloom. In this study, a validation instrument was used to determine the achievement of high thinking skills. As a result, a new theorem found that prove that Arumugam's local antimagic chromatic number χ_{la} is greater than the local antimagic total chromatic number χ_{lat} . In this study also resulted in a link between high-level thinking skills in determining the coloration of local magic vertexes in the graph of the results of the corona surgery studied.*

***Key Word:** Vertex coloring; Local Antimagic Total Labeling; Corona Product graf; High Order Thinking.*

PENDAHULUAN

Pada era globalisasi ini, ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang seiring dengan kebutuhan manusia. Akibatnya, manusia dituntut untuk memiliki kualitas berpikir yang lebih baik dari sebelumnya dalam menyelesaikan masalah di kehidupan sehari-hari. Dalam menyelesaikan permasalahan dibutuhkan keterampilan berpikir agar diperoleh solusi yang tepat dan logis. Keterampilan berpikir terdiri dari keterampilan berpikir tingkat dasar (*Lower Order Thinking Skills*) dan keterampilan berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking Skills*). Anderson L, dan Krathwohl (2001) dalam bukunya yang berjudul "*Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy*" merevisi tingkatan taksonomi ini menjadi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi dan mencipta.

Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang menginterpretasikan graf sebagai titik dan sisi serta

¹ e-mail: safira.izza@gmail.com

P-ISSN: 1411-5433

E-ISSN: 2502-2768

© 2018 Saintifika; Jurusan PMIPA, FKIP, Universitas Jember

<http://jurnal.unej.ac.id/index.php/STF>

himpunan bilangan cacah yang disebut label. Topik terbaru dari teori graf yaitu dengan mengkaitkan pewarnaan graf dengan pelabelan antiajaib yang dikenal dengan pewarnaan titik antiajaib lokal. Pelabelan antiajaib graf dapat diartikan graf yang memiliki bobot titik atau bobot sisi yang tidak sama (Dwi, 2011). Terdapat beberapa pembahasan mengenai pewarnaan titik antiajaib lokal, diantaranya pewarnaan titik dengan pelabelan titik, pewarnaan titik dengan pelabelan sisi, pewarnaan titik dengan pelabelan total.

Penelitian ini merupakan pengembangan dari paper yang berjudul “*Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph*” yang diteliti oleh Arumugam et al. (2017) mengenai pewarnaan titik dengan pelabelan sisi pada graf khusus. Penelitian pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona belum diteliti sehingga peneliti tertarik untuk meneliti.

Dalam artikel Arumugam et al. (2017), telah ditemukan bilangan kromatik anti-ajaib lokal dari beberapa keluarga graf diantaranya graf sikel, graf pohon, graf lintasan, graf persahabatan, graf dua partisi lengkap, graf roda dan graf kipas. Sementara itu, Arumugam et al. (2018) meneliti keberadaan bilangan kromatik anti-ajaib lokal pada graf hasil operasi korona dengan hasil sebagai berikut.

- Untuk graf $P_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \geq 4$, $\chi_{la}(P_n \odot \overline{K_1}) = n + 2$.
- Untuk graf $P_n \odot \overline{K_m}$ dengan $n \geq 2$, $m \geq 2$, $\chi_{la}(P_n \odot \overline{K_m}) = mn + 2$.
- Untuk graf $C_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \geq 4$, $\chi_{la}(C_n \odot \overline{K_1}) = n + 2$.
- Untuk graf $C_n \odot \overline{K_m}$ dengan n ganjil, $n \geq 5$, $m \geq 2$, $\chi_{la}(C_n \odot \overline{K_m}) = mn + 3$.
- Untuk graf $K_n \odot \overline{K_1}$ dengan $n \geq 3$, $\chi_{la}(K_n \odot \overline{K_1}) = 2n - 1$.
- Untuk graf $K_n \odot \overline{K_m}$ dengan $n \geq 3$, $m \geq 2$, $\chi_{la}(K_n \odot \overline{K_m}) = mn + n$.

Peneliti juga akan mengkaitkan enam tahapan Taksonomi Bloom revisi dalam pembahasan penelitian ini antara lain mengingat (*remember*), memahami (*understand*), menerapkan (*apply*), menganalisis (*analysis*), mengevaluasi (*evaluate*), dan menciptakan/mengkreasi (*create*)(Dafik, 2015:17-18)..

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona; Menganalisis keterkaitan antara pewarnaan titik dengan pelabelan sisi antiajaib lokal dan pewarnaan titik dengan pelabelan total antiajaib lokal; dan menganalisis kaitan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menentukan pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk jenis penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan untuk menjadikan suatu topik baru lebih dikenal oleh masyarakat luas, memberikan gambaran dasar mengenai topik bahasan, menggeneralisasikan gagasan dan mengembangkan teori yang bersifat dapat dirubah, membuka kemungkinan akan diadakannya penelitian lanjutan terhadap topik yang dibahas, serta menentukan teknik dan arah yang akan digunakan dalam penelitian berikutnya.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif Aksiomatik, metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona. Metode selanjutnya adalah pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang digunakan untuk mencari pola dan bilangan kromatik total antiajaib lokal χ_{lat} seminimum mungkin pada pewarnaan titik dengan pelabelan total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona.

Pertama, peneliti menentukan pewarnaan titik total antiajaib lokal serta menentukan pola pelabelan pada graf hasil operasi korona yang akan diteliti yaitu graf korona. Kemudian peneliti mengaitkan pewarnaan dan pola pelabelan total antiajaib lokal yang telah ditemukan dengan proses berpikir tingkat tinggi dengan beberapa tahapan beserta kaitannya berdasarkan Taksonomi Bloom Revisi.

Dalam penelitian ini digunakan instrument validasi untuk mengetahui pencapaian tingkat keterampilan berpikir tinggi. Instrumen yang harus divalidasi adalah keterkaitan dari proses pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona dengan kemampuan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G); E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang elemennya disebut titik dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $(u; v)$ dimana $u; v \in V(G)$ yang disebut sisi (Slamin, 2009:11-12). Sebelum menentukan bilangan kromatik total anti-ajaib lokal dari graf hasil operasi korona, terlebih dahulu dijelaskan operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona. Harsya et al., mendefinisikan operasi

korona dari dua buah graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan duplikat $|V(G_1)|$ dari G_2 yaitu $G_i, i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari G_1 ke setiap titik di G_2 . Selanjutnya, menyajikan sebuah observasi yang diberikan oleh Putri et al. sebagai batas bawah bilangan kromatik total anti-ajaib lokal dari graf G .

Observation 1 [4] Untuk setiap graf G , berlaku $\chi_{lat}(G) \geq \chi(G)$.

Teorema berikut menyajikan nilai bilangan kromatik total anti-ajaib lokal dari graf matahari. Graf matahari yang dinotasikan dengan $C_n \odot \overline{K_1}$ adalah suatu graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n dimana setiap simpul pada graf lingkaran C_n diberi tambahan satu simpul berderajat satu $\overline{K_1}$ sedemikian hingga setiap simpul pada matahari memiliki 3 derajat, kecuali pada simpul ujung-ujungnya yang hanya memiliki 1 derajat.

Theorem 1 Untuk graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka didapatkan

(i) $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 3$, untuk n genap m ganjil

(ii) $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 4$, untuk n ganjil m genap:

Bukti. Misalkan $C_n \odot \overline{K_m}$ adalah graf korona yang memiliki himpunan titik $V(C_n \odot \overline{K_m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $(C_n \odot \overline{K_m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, sehingga $|V(C_n \odot \overline{K_m}) \cup E(C_n \odot \overline{K_m})| = 2(n + nm)$.

Kasus 1. Graf $C_n \odot \overline{K_m}$ untuk n genap m ganjil

Labeli titik-titik dan sisi-sisi dari $C_n \odot \overline{K_m}$ berdasarkan fungsi berikut

$$\begin{aligned}
 f(x_i) &= 2n - i + 1 \\
 f(y_{i,j}) &= 2nm + 4n + 1 - f(x_i y_{i,j}) \\
 f(x_i x_{i+1}) &= i \\
 f(x_1 y_{1,j}) &= \begin{cases} 2n + 2, & \text{untuk } j = 1 \\ nm + 5n - nj, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ nj + n + 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases} \\
 f(x_i y_{i,j}) &= \begin{cases} 3n - i + 1, & \text{untuk } i \text{ genap } j = 1 \\ \frac{4n+i+2nm}{2} - nj + 2n, & \text{untuk } i \text{ genap } j \text{ ganjil} \\ nj + 2n - \frac{i-2}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap } j \text{ genap} \end{cases} \\
 f(x_i y_{i,j}) &= \begin{cases} 3n - i + 3, & \text{untuk } i \text{ ganjil } j = 1 \\ \frac{5n+i-1+2nm}{2} - nj + 2n, & \text{untuk } i \text{ ganjil } j \text{ ganjil} \\ nj + 2n - \frac{n+i-3}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil } j \text{ genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dengan pelabelan tersebut, maka bobot dari titik-titiknya adalah

$$w(x_i) = \begin{cases} \frac{m^2n + 4mn + 5n + m + 5}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \frac{m^2n + 4mn + 5n + m + 1}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = 2mn + 4n + 1$$

Dengan demikian $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \leq 3 \cdot 4$ untuk n genap m ganjil. Berdasarkan Observasi 1 diperoleh batas bawah $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \geq \chi(C_n \odot \overline{K_m}) \geq 2$ untuk n genap m ganjil. Akan dibuktikan $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \neq 2$.

Ambil titik x_1 , $y_{n,1}$, $y_{n,2}$ dan $y_{n,3}$ pada graf $C_n \odot \overline{K_m}$ yang tidak saling bertetangga, sehingga dapat memiliki bobot yang sama. Padahal titik x_1 bersisian dengan 5 sisi sehingga

$$w(x_1) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_1x_n) + f(x_1y_{1,1}) + f(x_1y_{1,2}) + f(x_1y_{1,3})$$

sedangkan titik $y_{n,1}$, $y_{n,2}$ dan $y_{n,3}$ hanya bersisian dengan 1 sisi sehingga

$$w(y_{n,1}) = f(x_ny_{n,1}) + f(y_{n,1})$$

$$w(y_{n,2}) = f(x_ny_{n,2}) + f(y_{n,2})$$

$$w(y_{n,3}) = f(x_ny_{n,3}) + f(y_{n,3})$$

mengakibatkan $w(x_1) \neq w(y_{n,1}) \neq w(y_{n,2}) \neq w(y_{n,3})$ dan graf $C_n \odot \overline{K_m}$ untuk n genap m ganjil memiliki warna lebih dari 2, sehingga terbukti $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \neq 2$.

Jadi $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 3$ untuk n genap m ganjil.

Kasus 2. Graf $C_n \odot \overline{K_m}$ untuk n ganjil m genap

Labeli titik-titik dan sisi-sisi dari $C_n \odot \overline{K_m}$ berdasarkan fungsi berikut

$$f(x_i) = \begin{cases} 2n - i, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2n - i + 2, & \text{untuk } i \text{ genap} \\ 2n, & \text{untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = 2nm + 4n + 1 - f(x_iy_{i,j})$$

$$f(x_nx_1) = \frac{n+1}{2}$$

$$f(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \frac{n+i+1}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_iy_{i,j}) = \begin{cases} nm + i - nj + n, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ nj - i + 1 + 2n, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan pelabelan tersebut, maka bobot dari titik-titiknya adalah

$$(x_i) = \begin{cases} \frac{m^2n + 4mn + 5n + m + 3}{2}, & \text{untuk } i = 1 \\ \frac{m^2n + 4mn + 5n + m + 5}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \frac{m^2n + 4mn + 5n + m + 1}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = 2mn + 4n + 1$$

Dengan demikian $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \leq 4$ untuk n ganjil m genap. Berdasarkan Observasi 1 diperoleh batas bawah $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \geq \chi(C_n \odot \overline{K_m}) \geq 3$ untuk n ganjil m genap. Akan dibuktikan $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \neq 3$.

Ambil titik $x_1, y_{n,1}, y_{n,2}, y_{2,1}$ dan $y_{2,2}$ pada graf $C_n \odot \overline{K_m}$ yang tidak saling bertetangga, sehingga dapat memiliki bobot yang sama. Padahal titik x_1 bersisian dengan 6 sisi sehingga

$$w(x_1) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_1x_n) + f(x_1y_{1,1}) + f(x_1y_{1,2}) + f(x_1y_{1,3}) + f(x_1y_{1,4})$$

sedangkan titik $y_{n,1}, y_{n,2}, y_{2,1}$ dan $y_{2,2}$ hanya bersisian dengan 1 sisi sehingga

$$\begin{aligned} w(y_{n,1}) &= f(x_ny_{n,1}) + f(y_{n,1}) \\ w(y_{n,2}) &= f(x_ny_{n,2}) + f(y_{n,2}) \\ w(y_{2,1}) &= f(x_2y_{2,1}) + f(y_{2,1}) \\ w(y_{2,2}) &= f(x_2y_{2,2}) + f(y_{2,2}) \end{aligned}$$

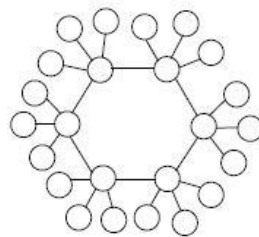
mengakibatkan $w(x_1) \neq w(y_{n,1}) \neq w(y_{n,2}) \neq w(y_{2,1}) \neq w(y_{2,2})$ dan graf $C_n \odot \overline{K_m}$ untuk n ganjil m genap memiliki warna lebih dari 3, sehingga terbukti $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \neq 3$.

Jadi $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 4$ untuk n ganjil m genap.

Keterkaitan antara pewarnaan titik dengan pelabelan sisi antiajaib lokal dan pewarnaan titik dengan pelabelan total antiajaib lokal dapat dilihat dengan membandingkan bilangan kromatik antiajaib lokal yaitu χ_{la} dengan bilangan kromatik total antiajaib lokal yaitu χ_{lat} . Berdasarkan paper Arumugam et al. (2018) yang menghasilkan bilangan kromatik antiajaib lokal χ_{la} dan teorema 1 yang menghasilkan bilangan kromatik total antiajaib lokal χ_{lat} pada graf matahari dan graf korona, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik antiajaib lokal χ_{la} lebih besar dibandingkan

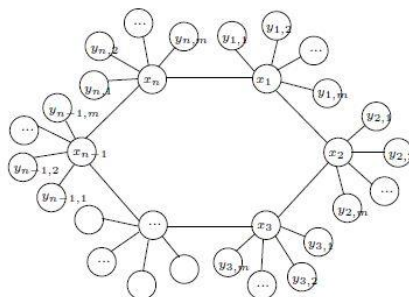
bilangan kromatik total antiajaib lokal χ_{lat} . Hal ini terjadi karena bobot titik pada pewarnaan titik antiajaib lokal hanya dipengaruhi oleh pelabelan sisi yang mengakibatkan bobot titik berbeda, sedangkan bobot titik pada pewarnaan titik total antiajaib lokal dipengaruhi oleh pelabelan sisi dan titik sehingga memungkinkan bobot titiknya sama. Sehingga didapatkan keterkaitannya yaitu $\chi(C_n \odot \overline{K_m}) \leq \chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \leq \chi_{la}(C_n \odot \overline{K_m})$.

Proses penemuan bilangan kromatik χ_{lat} pada graf hasil operasi korona berkaitan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Peneliti melakukan tahapan-tahapan berpikir sampai tercipta teorema baru. Tahapan pertama adalah mengingat dan mengenali jenis-jenis graf yang akan digunakan dan mendefinisikan pewarnaan titik total antiajaib lokal. Graf korona merupakan graf hasil operasi korona dari graf C_n dan graf K_m yaitu dengan menambahkan m titik berderajat satu, $m, 2$, pada titik ke- i dari graf lingkaran.



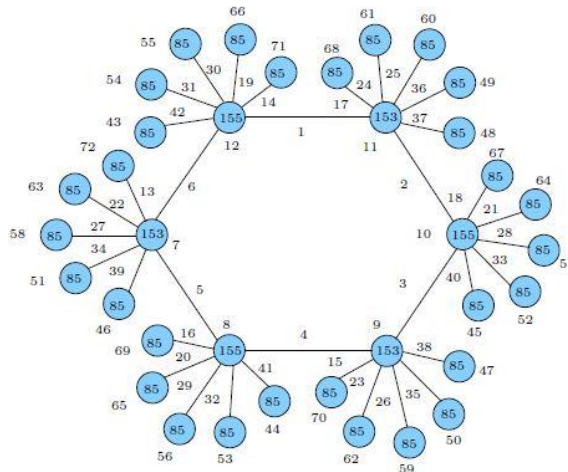
Gambar 1 Contoh Graf Korona $(C_6 \odot \overline{K_3})$

Tahapan kedua memahami dengan membangun himpunan titik dan sisi kemudian menentukan kardinalitas setiap graf. Kardinalitas dilakukan pada graf korona yang diteliti. Graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ memiliki himpunan titik $V(C_n \odot \overline{K_m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \odot \overline{K_m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, sehingga $|V(C_n \odot \overline{K_m}) \cup E(C_n \odot \overline{K_m})| = 2(n + nm)$.



Gambar 2 Kardinalitas Graf Korona $C_n \odot \overline{K_m}$

Tahap ketiga menerapkan konsep pewarnaan titik dengan pelabelan total antiajaib lokal pada graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ yang akan diteliti. pelabelan total antiajaib lokal tersebut dimulai dengan melabeli setiap sisi pada graf yang diteliti, dilanjutkan dengan melabeli setiap titiknya, kemudian menjumlahkan label dari sisi-sisi yang bersisian dengan titik v dan label titik v itu sendiri. Warna yang dihasilkan harus seminimal mungkin. Banyaknya warna minimal yang diperoleh disebut bilangan kromatik total antiajaib lokal (χ_{lat}).



Gambar 3 Pelabelan Total Antiajaib Lokal pada Graf $C_6 \odot \overline{K}_5$

Tahap keempat yaitu menganalisis pola pelabelan total antiajaib lokal yang digunakan dalam pewarnaan titik merupakan pola pelabelan yang tepat untuk graf hasil operasi korona yang diteliti. Pada Gambar 3, dapat dilihat bahwa pola yang digunakan untuk melabeli titik dan sisi pada graf $C_6 \odot \overline{K}_5$ menghasilkan warna yang berbeda di setiap dua titik bertetangga dan keseluruhan warna yang dihasilkan minimum, sehingga dapat disimpulkan pelabelan tersebut merupakan pelabelan yang tepat untuk graf korona karena menghasilkan bilangan kromatik yang minimum. Pola pelabelan yang digunakan pada graf korona tersebut dimulai dengan melabeli sisi dan titik pada lingkaran, kemudian melabeli sisi di luar lingkaran yang bersisian dengan setiap titik pada lingkaran dan dilanjut dengan melabeli titik-titik di luar lingkaran. Dengan memilih pola tersebut memudahkan peneliti dalam mencari fungsinya dan menghasilkan bilangan kromatik total antiajaib lokal yaitu $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 3$ untuk n genap.

Tahap kelima yaitu mengevaluasi batas bawah bilangan kromatik antiajaib lokal, fungsi titik, fungsi sisi dan fungsi bobot titik dari pewarnaan titik total antiajaib lokal sesuai dengan teorema yang dibentuk. Pada Pewarnaan titik graf korona, terdapat perbedaan nilai batas bawah dan batas atas bilangan kromatik yang dihasilkan. Batas

bawah bilangan kromatik total antiajaib lokal pada graf korona adalah $\chi(C_n \odot \overline{K_m}) \geq 3$, sedangkan batas atas bilangan kromatik total antiajaib lokal pada graf korona adalah $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \leq 4$. Kemudian dibuktikan bahwa $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \neq 3$, karena graf korona memiliki titik yang berderajat tinggi yaitu titik pada lingkaran yang ditambahkan sisi sebanyak jumlah titik dari graf yang diduplikat (sesuai definisi operasi korona).

Tahapan tertinggi dari proses berpikir tingkat tinggi yaitu menciptakan teorema baru serta menyusun pembuktian dari pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona. Teorema yang dihasilkan dari penelitian ini adalah Untuk graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ dimana $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka didapatkan $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 3$, untuk n genap m ganjil dan $\chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) = 4$, untuk n ganjil m genap.

Selama proses penelitian mengenai pewarnaan titik total antiajaib lokal, peneliti melakukan refleksi dan evaluasi diri terhadap munculnya proses berpikir tingkat tinggi. Selanjutnya dilakukan penilaian oleh beberapa validator yang ahli dalam topik pewarnaan titik total antiajaib lokal yaitu dua dosen CGANT (Combinatorics Graph Theory and Network Topology 120 Research Group) dengan menggunakan sebuah lembar penilaian. Setelah mendapat hasil penilaian, kemudian dianalisis pencapaian setiap aspeknya dengan metode analisis validasi dan dibandingkan secara teoritis. Terdapat perbedaan dari Proses berpikir untuk menemukan teorema secara teoritis dengan fakta penilaian dari validator. Proses berpikir peneliti secara faktual mencapai 92,72%. Hasil capaian setiap tahapannya tidak berbeda jauh dengan capaian yang diharapkan yaitu sekitar 4%. Secara keseluruhan selisih perbedaan proses berpikir kurang dari 8%. Berdasarkan hasil analisis tingkat kevalidan instrumen yaitu $V_a = 4,6$ dan dapat disimpulkan bahwa kaitan pewarnaan titik total antiajaib lokal dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi menunjukkan hasil yang valid.

SIMPULAN

Bilangan kromatik total anti-ajaib lokal dari graf hasil operasi korona yang meliputi graf korona telah disajikan dalam artikel ini. Dari penyajian diatas, dapat disimpulkan bahwa kromatik total anti-ajaib lokal dari graf korona $(C_n \odot \overline{K_m})$ adalah 3 jika n genap m ganjil dan 4 jika n ganjil m genap.

Berdasarkan bilangan kromatik antiajaib lokal χ_{la} pada paper Arumugam et al. (2018) dan bilangan kromatik total antiajaib lokal χ_{lat} hasil dari penelitian ini pada graf

matahari dan graf korona, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik antiajaib lokal χ_{la} lebih besar dibandingkan bilangan kromatik total antiajaib lokal χ_{lat} . Hal ini terjadi karena bobot titik pada pewarnaan titik antiajaib lokal hanya dipengaruhi oleh pelabelan sisi yang mengakibatkan bobot titik berbeda, sedangkan bobot titik pada pewarnaan titik total antiajaib lokal dipengaruhi oleh pelabelan sisi dan titik sehingga memungkinkan bobot titiknya sama. Sehingga didapatkan keterkaitannya yaitu $\chi(C_n \odot \overline{K_m}) \leq \chi_{lat}(C_n \odot \overline{K_m}) \leq \chi_{la}(C_n \odot \overline{K_m})$.

Keterkaitan pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yaitu mengingat (mengingat dan mengenali jenis-jenis graf yang akan digunakan dan mendefinisikan pewarnaan titik total antiajaib lokal), memahami (membangun himpunan titik dan sisi graf kemudian menentukan kardinalitasnya dan memberikan contoh graf yang diteliti), menerapkan (menerapkan konsep pewarnaan titik dengan pelabelan total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona yang akan diteliti sedemikian hingga dua titik yang bertetangga memiliki warna berbeda), menganalisis (menganalisis pola pelabelan total antiajaib lokal yang digunakan dalam pewarnaan titik merupakan pola pelabelan yang tepat untuk graf hasil operasi korona yang diteliti), mengevaluasi (mengevaluasi batas bawah bilangan kromatik antiajaib lokal, fungsi titik, fungsi sisi dan fungsi bobot titik dari pewarnaan titik total antiajaib lokal sesuai dengan teorema yang dibentuk), dan mencipta (menciptakan teorema baru mengenai keberadaan bilangan kromatik χ_{lat} serta menyusun pembuktian dari pewarnaan titik total antiajaib lokal pada graf hasil operasi korona).

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, L. W., et al. 2001. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Blooms Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.
- Arumugam, S., Premalatha, K., Ba-ca, M, dan Semani-cov¶a-Fe-nov-c¶kov¶a, A. 2017. *Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph*. Graph and Combinatorica, 33(2):275-285.
- Arumugam, S., Yi-Chun, L., Premalatha, K., dan Tao-Ming, W. 2018. *On Local Antimagic Vertex Coloring for Corona Products of Graphs*. Graph and Combinatorica.
- Chartrand, G., Lesniak, L., Ping, Z. 2011. *Graph and Digraph (5th ed)*. Boca Raton: CRC Press.
- Dafik. 2015. *Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi*. Jember: Universitas Jember.

- Dafik, Putri, D.F., Agustin, I.H., dan Alfarisi, R. 2018. *On the Local Vertex Antimagic Total Coloring of Some Families Tree*. In Journal of Physics Conference Series. IOP Publishing, 1008.
- Dwi, N. 2011. *Pelabelan Total (a; d) Sisi Antiajaib Pada Graf Bintang*. Skripsi. Padang: Universitas Andalas.
- Grimaldi, R.P. 2004. *Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied Introduction Fifth edition*. New York: Pearson Addison Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., and Dafik. 2014. *Pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf sikle dan graf bintang*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika FMIPA UNEJ, 1 No. 1:498-505.
- Hobri. 2010. *Metodologi Penelitian Pengembangan Aplikasi pada Penelitian Pendidikan Matematika*. Jember: Pena Salsabila.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Yero, I. 2011. On The Metric Dimension of Corona Product Graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(9):2793-2798.