MIMS Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 24 (2), 2024, 110 – 122
eISSN 2722-9886 pISSN 1411-6669
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Hubungan antara latis distributif dan aljabar median

(The relation between distributive lattices and median algebras)

Novita Dahoklory*, Henry W. M. Patty

Program Studi Matematika, Universitas Pattimura

*korespondensi: novitadahoklory93@gmail.com

Received: 22-01-2024, accepted: 04-09-2024

Abstract

Let M be a non-empty set equipped by a ternary operation $m: M \times M \times M \to M$. The set M is called a median algebra if (M, m) satisfies these properties (1) majority: $m(a, a, b) = a$, associativity: $m(a, b, m(c, b, d) = m(m(a, b, c), b, d)$, and commutativity: $m(a, b, c) = m(a, c, b) = m(b, a, c)$ for every $a, b, c, d \in M$. In this paper, we will relate a median algebra and a distributive lattice; every distributive lattice is a median algebra. Moreover, we will study an interval $[a, b]$ in a median algebra (M, m) motivated by closed intervals in $\mathbb{R}$. We will also investigate the basic properties of the interval $[a, b]$ in a median algebra. Furthermore, using these properties, we will show that every interval in a median algebra is conversely a distributive lattice.

Keywords: Median algebra, distributive lattices, interval

MSC2020: 06D99

---

1. Pendahuluan

Struktur aljabar merupakan kajian matematika yang melibatkan himpunan tak kosong, operasi, dan aksioma-aksioma yang berlaku di dalamnya. Salah satunya adalah aljabar median yang termotivasi dari latis distributif [1]. Suatu latis distributif $(L, \wedge, \vee)$ merupakan himpunan tak kosong L yang dilengkapi dengan dua operasi biner meet " $\wedge$ " dan join " $\vee$ " yang memenuhi aksioma tertentu [2].

Sebagaimana grup yang termotivasi dari sifat penjumlahan pada $\mathbb{Z}$, latis distributif termotivasi dari sifat urutan dalam $\mathbb{R}$. Dalam hal ini, operasi biner meet $\wedge$ dan join $\vee$ didefinisikan dengan memanfaatkan urutan dalam $\mathbb{R}$ yaitu $x \wedge y = \min\{x, y\}$ dan $x \vee y = \text{maks}\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Dengan memanfaatkan operasi biner tersebut, kemudian dikonstruksikan suatu operasi ternari dalam $\mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$m: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dengan $m(a, b, c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain, operasi ternari m menghasilkan median (nilai tengah) dari $\{a, b, c\}$. Dengan menggunakan sifat median pada bilangan, diperoleh beberapa sifat pada $(\mathbb{R}, m)$ diantaranya: (1) sifat mayoritas : $m(a, a, b) = a$; (2) sifat komutatif: $m(a, b, c) =$

$m(a,c,b) = m(b,a,c)$; dan (3) sifat asosiatif $m(a,b,m(c,b,d)) = m(m(a,b,c),b,d)$ untuk setiap $a,b,c,d \in M$.

Fenomena dalam himpunan $\mathbb{R}$ tersebut kemudian digeneralisasi pada sebarang himpunan tak kosong dan memotivasi munculnya struktur yang disebut sebagai aljabar median. Suatu himpunan tak kosong M yang dilengkapi dengan operasi ternari $m: M \times M \times M \to M$ disebut sebagai aljabar median jika (M,m) memenuhi aksioma mayoritas, komutatif, dan asosiatif [3].

Sebagai struktur aljabar, sifat dan karakteristik suatu aljabar median telah dibahas pada beberapa penelitian sebelumnya [4-6]. Kajian struktur median terus dikembangkan dan dihubungkan dengan kajian penelitian lainnya diantaranya latis distributif, ruang metrik, dan teori graf [7-12]. Namun, dalam penelitian ini pembahasan akan dibatasi pada hubungan antara latis distributif dan aljabar median.

Diberikan suatu latis distributif $(L,\wedge,\vee)$. Sama halnya dengan operasi median yang diinduksi dengan operasi biner meet $\wedge$ dan join $\vee$ dalam $\mathbb{R}$, operasi ternari juga dikonstruksikan dalam sebarang $(L,\wedge,\vee)$ yaitu

$$m: L \times L \times L \to L$$

dengan $m(a,b,c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ untuk setiap $a,b,c \in L$. Dalam penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa (L,m) merupakan aljabar median. Dengan kata lain, dari suatu latis distributif $(L,\wedge,\vee)$ dapat dibentuk suatu aljabar median (L,m) dengan memanfaatkan operasi biner dalam latis L.

Hal ini memunculkan pertanyaan apakah dari sebarang aljabar median juga dapat dibentuk suatu latis distributif. Untuk itu, dalam penelitian ini akan dibahas struktur interval dalam suatu aljabar median yang dibentuk dengan memanfaatkan operasi median di dalamnya [13,14]. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa himpunan interval dalam suatu aljabar median merupakan latis distributif. Lebih lanjut, dalam penelitian ini juga akan dibahas sifat-sifat dasar yang berlaku dalam interval suatu aljabar median.

2. Metodologi

Adapun tahapan penelitian ini yaitu:

(1) Menjelaskan aljabar median meliputi definisi dan beberapa contoh serta menyelidiki sifat-sifat dasar suatu aljabar median;
(2) Menyelidiki hubungan antara suatu aljabar median dan latis distributif;
(3) Mengkonstruksi himpunan interval dalam suatu aljabar median;
(4) Menyelidiki sifat-sifat interval dalam aljabar median.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pembahasan meliputi aljabar median meliputi definisi, contoh, dan sifat-sifat dasar yang berlaku di dalamnya. Selanjutnya, akan dijelaskan hubungan antara latis dan aljabar median dan dibahas himpunan interval dalam suatu aljabar median serta beberapa sifatnya.

3.1 Aljabar Median

Sama halnya dengan operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ yang memotivasi munculnya struktur grup, operasi ternari median pada $\mathbb{R}$ juga memotivasi struktur aljabar median. Adapun definisi aljabar median diberikan pada definisi berikut.

Definisi 3.1. [3]
Diberikan himpunan tak kosong M yang dilengkapi operasi ternari

$$m: M \times M \times M \to M$$

Himpunan (M, m) disebut sebagai aljabar median jika

(i) $m(a, a, b) = a$ (sifat mayoritas)

(ii) $m(a, b, c) = m(a, c, b) = m(b, a, c) = m(b, c, a) = m(c, a, b) = m(c, b, a)$ (sifat komutatif)

(iii) $m(a, b, m(c, b, d)) = (m(a, b, c), b, d)$ (sifat asosiatif).

Diberikan suatu aljabar median (M, m), selanjutnya $m(a, b, c)$ cukup dituliskan dengan abc untuk setiap $a, b, c \in M$.

Contoh 3.2.
Himpunan $(\mathbb{R}, m)$ dengan abc merupakan median dari $\{a, b, c\}$ merupakan aljabar median. Diberikan himpunan $\mathbb{R}$. Diketahui bahwa dapat dibentuk interval tutup $[a, b]$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{R}$. Misalkan $I\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua interval tertutup $[a, b]$ yaitu

$$I\mathbb{R} = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dengan memanfaatkan median pada $\mathbb{R}$, didefinisikan suatu operasi ternari pada yaitu

$$m': I\mathbb{R} \times I\mathbb{R} \times I\mathbb{R} \to I\mathbb{R}$$

dengan $[a_1, b_1]\ [a_2, b_2]\ [a_3, b_3] = [m(a_1, a_2, a_3), m(b_1, b_2, b_3)]$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(I\mathbb{R}, m')$ merupakan aljabar median yang disajikan dalam contoh berikut.

Contoh 3.3.
Himpunan semua interval tutup $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ merupakan aljabar median. Pada himpunan $I\mathbb{R}$ kemudian didefinisikan operasi ternari di dalamnya dengan

$$m': I\mathbb{R} \times I\mathbb{R} \times I\mathbb{R} \to I\mathbb{R}$$

dengan $[a_1, b_1]\ [a_2, b_2]\ [a_3, b_3] = [m(a_1, a_2, a_3), m(b_1, b_2, b_3)]$. Pada himpunan $(I\mathbb{R}, m)$ berlaku

i. Sifat mayoritas:

$$[a_1, b_1]\ [a_1, b_1]\ [a_2, b_2] = [m(a_1, a_1, a_2), m(b_1, b_1, b_2)] = [a_1, b_1].$$

ii. Sifat komutatif

Jelas, dengan menggunakan sifat komutatif pada $m(a_1, a_2, a_3)$ dan $m(b_1, b_3, b_3)$ di $\mathbb{R}$.

iii. Sifat asosiatif

$$\begin{aligned}[a_1, a_2][b_1, b_2]([c_1, c_2][b_1, b_2][d_1, d_2]) &= [a_1, a_2][b_1, b_2[c_1 b_1 d_1, c_2 b_2 d_2] \\ &= [a_1 b_1 (c_1 b_1 d_1), a_2 b_2 (c_2 b_2 d_2)] \\ &= [(a_1 b_1 c_1) b_1 d_1, (a_2 b_2 c_2) b_2 d_2] \\ &= [a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2][b_1, b_2][d_1, d_2] \\ &= ([a_1, a_2][b_1, b_2][c_1, c_2])[b_1, b_2][d_1, d_2].\end{aligned}$$

Untuk setiap $[a_1, a_2], [b_1, b_2], [c_1, c_2], [d_1, d_2] \in I\mathbb{R}$. Himpunan $(I\mathbb{R}, m')$ merupakan aljabar median.

Selanjutnya, akan diberikan beberapa sifat dasar terkait struktur aljabar median yang disajikan dalam Lema di bawah ini.

Lema 3.4. [15]
Diberikan aljabar median (M, m). Jika $a, b, c \in M$ maka

(i) $ab(abc) = abc$;

(ii) $a(abc)(dbc) = abc$.

Bukti.
Diketahui aljabar median (M, m) dengan $a, b, c \in M$.

(i)
$$\begin{aligned} ab(abc) &= (aba)bc && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= (aab)bc && \text{(sifat komutatif)} \\ &= abc. && \text{(sifat mayoritas)} \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} a(abc)(dbc) &= a((aab)bc)(dbc) && \text{(sifat mayoritas)} \\ &= a((ab)abc)(dbc) && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= \big((abc)ab\big)a(dbc) && \text{(sifat komutatif)} \\ &= \big((abc)a\big)(ab(cbd)) && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= a(abc)((abc)bd) && \text{(sifat asosiatif dan komutatif)} \\ &= (a(abc)b)(abc)d && \text{(sifat asosiatif)} \\ &= \big(ab(abc)\big)(abc)d && \text{(sifat komutatif)} \\ &= (abc)(abc)d && \text{(Lema 3.4. (i))} \\ &= abc. \square && \text{(sifat mayoritas)} \end{aligned}$$

Lema 3.5. [15]
Diberikan aljabar median (M, m) dengan $a, b, c, d \in M$. Jika $abd = d, bcd = d = cad = d$ maka $abc = d$.

Bukti.
Misalkan (M, m) merupakan aljabar median. Diketahui $abd = d, bcd = d = cad = d$. Akan dibuktikan $abc = d$.
Diperhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(abc)ad &= (bac)ad && \text{(sifat komutatif)}\\
&= ba(cad) && \text{(sifat asosiatif)}\\
&= bad\\
&= abd && \text{(sifat komutatif)}\\
&= d.
\end{aligned}
$$

Jadi, didapatkan

$$(abc)da = d. \qquad (*)$$

Dengan cara yang sama dapat juga ditunjukkan bahwa

$$(abc)db = d. \qquad (**)$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$
\begin{aligned}
d &= (abc)db\\
&= (abc)\big((abc)da\big)b && (*)\\
&= (d(abc)a)(abc)b && \text{(sifat komutatif)}\\
&= d(abc)(a(abc)b) && \text{(sifat asosiatif)}\\
&= d(abc)(ab(abc)) && \text{(sifat komutatif)}\\
&= d(abc)(abc) && \text{(Lema 3.4. (i))}\\
&= abc.
\end{aligned}
$$

Terbukti, $d = abc$. □

Pada aksioma asosiatif aljabar median M diketahui bahwa untuk setiap $a, b, c, d \in M$ berlaku

$$ab(cbd) = (abc)bd.$$

Hal ini kemudian memunculkan pertanyaan bentuk dari $ab(cde)$ untuk setiap $a, b, c, d \in M$. Sifat tersebut akan dijelaskan namun sebelumnya diperlukan lema berikut ini.

Lema 3.6. [15]
Misalkan (M, m) merupakan aljabar median. Berlaku
(i) $(oxy)(axy)c = (oxy)(axy)\big((oxy)ac\big)$
(ii) $(axy)(bxy)(cxy) = a(bxy)(cxy)$
(iii) $\big((abc)xy\big)(axy)c = (abc)xy$
untuk setiap $o, a, b, c, x, y \in M$.

Bukti.
Diketahui (M, m) merupakan aljabar median dengan $o, a, b, c, x, y \in M$. Untuk menyederhanakan notasi, misalkan $A = axy, B = bxy, O = oxy,\ U = abc,$ dan $H = Uxy$
Diperoleh,
(i) pertama-tama, akan ditunjukkan terlebih dahulu

$(oxy)(axy)c = (oxy)(a(axy)(oxy))c$ (Lema 3.4.(ii))
$= c(oxy)(a(oxy)(axy))$ (sifat komutatif)
$= (c(oxy)a)(oxy)(axy)$ (sifat asosiatif)
$= (oxy)(axy)\big(ac(oxy)\big).$ (sifat komutatif)

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(axy)(bxy)(cxy) = a(bxy)(cxy)$ yaitu $ABC = aBC$. Diperhatikan juga bahwa

$A = axy$
$= a(axy)(bxy)$ (Lema 3.4.(ii))
$= (axy)a(bxy)$ (sifat komutatif)
$= \big(a(axy)(cxy)\big)a(bxy)$ (Lema 3.4. (ii))
$= (aAC)aB.$

Jadi, diperoleh

$ABC = \big((aAC)aB\big)BC$
$= \big((aAC)Ba\big)BC$ (sifat komutatif)
$= (aAC)B(aBC)$ (sifat asosiatif)
$= B(BCa)(ACa)$ (sifat komutatif)
$= BCa$ (Lema 3.4. (ii))
$= aBC.$

(iii) Lebih lanjut, akan ditunjukkan $\big((abc)xy\big)(axy)c = (abc)xy$ yaitu $HAc = H$.

$HAc = (\big((abc)xy\big)(axy)c$
$= (Uxy)(axy)((Uxy)ac)$ (sifat (i))
$= HA(HAc).$

Diperhatikan bahwa

$$Hac = H(Hac)(bac = (Hac)HU \qquad (*)$$

sehingga diperoleh

$HAc = HA(Hac)$
$= HA((Hac)HU)$ (berdasarkan (*))
$= AH(UH(Hac))$ (sifat komutatif)
$= AHU(H(Hac))$

Diperhatikan juga bahwa

$AHU = UHA$
$= U(Uxy)(axy)$
$= Uxy$ (Lema 3.4. (ii))
$= (abc)xy$
$= H.$

Dapat disimpulkan juga bahwa

$$HAc = AHU(H(Hac)) = HH(HaC) = H.$$

Terbukti, (i), (ii), dan (iii). □

Teorema 3.7. [15]
Diberikan aljabar median (M, m). Jika $a, b, c, x, y \in M$ maka $(abc)xy = (axy)(bxy)c$.

Bukti.
Untuk menyederhanakan notasi, misalkan $A = axy, B = bxy, O = oxy, U = abc$, dan $HU = Uxy$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $HAB = H$.

$HAB = ABH$ (sifat komutatif)
$= (axy)(bxy)(Uxy)$
$= a(bxy)(Uxy)$ (Lema 3.6.(ii))
$= aBH$
$= HBa$ (sifat komutatif)
$= \big((abc)xy\big)(bxy)a$
$= (abc)xy$ (Lema 3.6. (iii))
$= H.$

Berdasarkan Lema 3.6, didapatkan $HAc = H$ dan $HBc = H$. Dapat disimpulkan bahwa

$$HAc = HBc = HAB = H.$$

sehingga menurut Lema 3.5 diperoleh $H = ABc$. Dengan kata lain, $(abc)xy = (axy)(bxy)c$. □

3.2 Latis Distributif dan Aljabar Median

Pada bagian ini akan dijelaskan latis distributif meliputi definisi dan beberapa contoh. Selanjutnya akan diberikan hubungan antara latis distributif dan aljabar median.

Definisi 3.8. [2]
Diberikan himpunan tak kosong L dengan operasi biner meet $(\wedge)$ dan join $(\vee)$. Himpunan $(L,\wedge,\vee)$ disebut sebagai latis distributif jika memenuhi

1. Komutatif: $(\forall x, y \in L)\ [x \wedge y = y \wedge x$ dan $x \vee y = y \vee x]$;
2. Asosiatif: $(\forall x, y, z \in L)\ [(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ dan $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)]$;
3. Absorbsi: $(\forall x, y \in L)\ [x \vee (x \wedge y) = x$ dan $x \wedge (x \vee y) = x\ ]$;
4. Idempoten: $(\forall x \in L)\ [x \vee x = x$ dan $x \wedge x = x\ ]$;
5. Distributif: $(\forall x, y, z \in L)\ [(x \wedge y) \vee z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ dan $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Contoh 3.9.
Diberikan aljaba Boolean $B = \{0,1\}$ dengan operasi biner meet $(\wedge)$ dan join $(\vee)$ yang disajikan dalam tabel berikut

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Aljabar Boolean $(L,\wedge,\vee)$ merupakan latis distributif.

Diberikan latis distributif $(L,\wedge,\vee)$. Dengan memanfaatkan operasi $\wedge$ dan $\vee$, didefinisikan operasi ternari di dalam L yang didefinisikan sebagai

$$m: L \times L \times L \to L$$

dengan $abc = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Dengan memanfaatkan sifat latis distributif, akan ditunjukkan (L, m) merupakan aljabar median pada teorema berikut.

Teorema 3.10.
Suatu latis distributif $(L,\wedge,\vee)$ merupakan aljabar median dengan operasi ternari yang didefinisikan sebagai

$$m: L \times L \times L \to L$$

dengan $abc = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Bukti.
Diketahui $(L,\wedge,\vee)$ merupakan latis distributif. Akan ditunjukkan (L, m) merupakan aljabar median.

i. (L, m) mayoritas.
Diambil sebarang $a, b \in L$. Dengan memanfaatkan sifat idempoten dan absorbsi pada latis L, diperoleh

$$\begin{aligned} aab &= (a \vee a) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b) \\ &= a \wedge (a \vee b) && \text{(sifat idempotent latis)} \\ &= a && \text{(sifat absorbsi latis)} \end{aligned}$$

ii. (L, m) komutatif.
Jelas, karena sifat komutatif pada latis L.

iii. (L, m) asosiatif .
Diambil sebarang $a, b, c, d \in L$.

$$\begin{aligned} ab(cbd) &= (a \vee b) \wedge (a \vee cbd) \wedge (b \vee cbd) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee cbd) \wedge (b \vee cbd) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee [(c \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (b \vee d)]) \\ &\qquad \wedge (b \vee [(c \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (b \vee d)]) \\ &= (a \vee b \vee b) \wedge (a \vee c \vee b) \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee d) \wedge (b \vee c \\ &\qquad \vee b) \wedge (b \vee c \vee d) \wedge (b \vee b \vee d) \\ &= [(a \vee b \vee b) \wedge (a \vee c \vee b) \wedge (b \vee c \vee b)] \wedge [(a \vee b \vee d) \\ &\qquad \wedge (a \vee c \vee d) \wedge (b \vee c \vee d)]) \wedge (b \vee d) \\ &= [((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \vee b] \wedge [((a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ &\qquad \wedge (b \vee c)) \vee d] \wedge (b \vee d) \\ &= (abc \vee b) \wedge (abc \vee d) \wedge (b \vee d) \\ &= (abc)bd. \end{aligned}$$

Berdasarkan (i), (ii), dan (iii), dapat disimpulkan (L, m) merupakan aljabar median. ▫

3.3. Himpunan Interval dalam Aljabar Median

Sama halnya dengan himpunan interval tutup dalam bilangan real yaitu $[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$. Dengan kata lain, elemen di dalam himpunan interval $[a, b]$ merupakan median dari $\{a, b, x\}$. Hal ini kemudian memotivasi pembentukan interval dalam suatu aljabar median dengan memanfaatkan operasi median di dalamnya. Diberikan aljabar median (M, m) dengan $a, b \in M$. Suatu interval $[a, b]$ di dalam M didefinisikan sebagai

$$[a, b] = \{x \in M | abx = x\}.$$

Selanjutnya akan diberikan sifat interval $[a, b]$ pada aljabar median. Namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu definisi subaljabar median.

Definisi 3.12. [15]

Diberikan suatu aljabar median (M, m). Suatu $N \subseteq M$ disebut sebagai subaljabar median jika (N, m) merupakan aljabar median.

Lema 3.13. [15]

Diberikan aljabar median (M, m). Himpunan interval $[a, b] \subseteq M$ merupakan subaljabar median.

Bukti.

Diketahui (M, m) merupakan aljabar median. Himpunan interval $[a, b] \subseteq M$ yaitu

$$[a, b] = \{x \in M | abx = x\}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $[a, b]$ merupakan subaljabar median. Diperhatikan bahwa sifat mayoritas, simetris, dan asosiatif pada M diwariskan pada interval $[a, b]$ sehingga hanya perlu dibuktikan $([a, b], m)$ tertutup. Diambil sebarang $x, y, z \in [a, b]$. Artinya, $abx = x, aby = y$, dan $abz = z$. Menurut Teorema 3.7, didapatkan

$$ab(xyz) = (xyz)ab = (xab)(yab)z = (abx)(aby)z = xyz.$$

Terbukti, $[a, b]$ merupakan subaljabar median. □

Selanjutnya, diberikan sifat interval $[a, b]$ pada lema berikut.

Lema 3.14. [15]

Diberikan aljabar median (M, m) dengan $a, b \in M$. Berlaku $[a, b] = \{abx | x \in M\}$.

Bukti.

Tulis $N = \{abx | x \in M\}$. Pertama-tama akan dibuktikan $[a, b] \subseteq N$. Diambil sebarang $x \in [a, b]$ yang berarti $abx = x$. Jadi, $x = abx \in N$. Sebaliknya, diambil sebarang $abx \in N$ Jadi, $ab(abx) = (aba)bx = abx$ yaitu $abx \in [a, b]$. □

Diberikan aljabar median (M, m) dengan suatu interval $[a, b]$ di M. Kemudian pada interval $[a, b]$ didefinisikan operasi biner meet $\wedge$ dan join $\vee$ sebagai berikut

$$\wedge: [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

dan

$$\vee: [a, b] \times [a, b] \to [a, b]$$

dengan $x \wedge y = axy$ dan $x \vee y = bxy$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $([a, b], \wedge, \vee)$ merupakan latis distributif dalam lema berikut.

Lema 3.15.
Diberikan aljabar median (M, m) dengan suatu interval $[a, b]$ di M. Interval $([a, b], \wedge, \vee)$ merupakan latis distributif.
Bukti.

1. Komutatif
   Diambil sebarang $x, y \in [a, b]$. Dengan menggunakan sifat komutatif pada M, didapatkan, $x \wedge y = axy = ayx = y \wedge x$ dan $x \vee y = bxy = byx = y \vee x$.
2. Asosiatif
   Diambil sebarang $x, y, z \in [a, b]$. Dengan menggunakan sifat komutatif pada M, didapatkan,

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge z &= (axy) \wedge z \\ &= a(axy)z \\ &= (xay)az \\ &= xa(yaz) \\ &= ax(ayz) \\ &= ax(y \wedge z) \\ &= x \wedge (y \wedge z).\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= (bxy) \vee z \\ &= b(bxy)z \\ &= (xby)bz \\ &= xb(ybz) \\ &= bx(byz) \\ &= bx(y \vee z) \\ &= x \vee (y \vee z).\end{aligned}$$

3. Absorbsi
   Diambil sebarang $x, y \in [a, b]$. Berlaku
$$x \wedge (x \vee y) = x \wedge (bxy) = ax(bxy) = (abx)xy = xxy = x$$
   dan
$$x \vee (x \wedge y) = x \vee (axy) = bx(axy) = (bxa)xy = xxy = x.$$
4. Idempoten
   Diambil sebarang $x \in [a, b]$. Dengan menggunakan sifat mayoritas pada M, didapatkan, $x \wedge x = axx = x$ dan $x \vee x = bxx = x$.
5. Distributif
   Diambil sebarang $x, y \in [a, b]$. Berlaku

$$\begin{aligned}x \wedge (y \vee z) &= x \wedge (byz) \\ &= ax(byz) \\ &= ax(yzb) \\ &= (axy)(axz)b \\ &= axy \vee axz \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x \vee (y \wedge z) &= x \vee (ayz) \\ &= bx(ayz) \\ &= bx(ayz) \\ &= (bxy)(bxz)a \\ &= bxy \wedge bxz \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z).\end{aligned}$$

Terbukti, $[a, b]$ merupakan latis distributif. □

Berikut akan diberikan sifat-sifat dasar interval dalam suatu median yang disajikan dalam lema berikut.

Lemma 3.16. [15]
Diberikan aljabar median (M, m). Untuk setiap $x, y \in M$, berlaku
(i) $[x, x] = \{x\}$
(ii) $x, y \in [x, y]$

Bukti.
Misalkan $x, y \in M$.
(i) Diambil sebarang $a \in [x, x]$. Diperoleh $a = axx = x$. Jadi, $[x, x] = \{x\}$.
(ii) Berdasarkan sifat mayoritas aljabar median M, diperoleh $xxy = x$ dan $xyy = y$. Artinya, $x, y \in [x, y]$. □

Dalam sifat interval bilangan pada $\mathbb{R}$ berlaku jika $c, d \in [a, b]$ maka $[c, d] \subseteq [a, b]$. Hal ini juga berlaku dalam interval median yang disajikan dalam lema berikut.

Lema 3.17. [15]
Diberikan aljabar median (M, m) dengan suatu interval median $[a, b]$. Jika $c, d \in [a, b]$ maka $[c, d] \subseteq [a, b]$.
Bukti.
Diketahui interval median $[a, b]$ dengan $c, d \in [a, b]$. Artinya, $abc = c$ dan $abd = d$. Kemudian dibentuk interval $[c, d]$. Akan ditunjukkan $[c, d] \subseteq [a, b]$. Diambil sebarang $cde \in [c, d]$. Jadi,

$$ab(cde) = (abc)(abd)e = cde.$$

diperoleh $cde \in [a, b]$. Dengan menggunakan Lema 3.14**,** didapatkan $[c, d] \subseteq [a, b]$. □

Adapun beberapa sifat dalam interval yang berlaku berdasarkan lema sebelumnya.

Teorema 3.18. [15]
Diberikan aljabar median (M, m) dengan $[x, y]$ interval di dalam M. Berlaku
(i) $[x, y] \cap [x, z] = [x, xyz]$;
(ii) Jika $y \in [x, z]$ maka $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$;
(iii) $[x, y] \cap [y, z] \cap [z, x] = \{xyz\}$.

Bukti.
Misalkan $x, y, z \in M$.

(i) Berdasarkan Lema 3.14, diperoleh $xyz \in [x, y]$ dan $xyz \in [x, z]$ yang berarti $xyz \in [x, y] \cap [x, z]$. Selanjutnya menurut Lema 3.17, diperoleh $[x, xyz] \subseteq [x, y] \cap [x, z]$. Sebaliknya, diambil sebarang $u \in [x, y] \cap [x, z]$. Artinya, $u = xyu$ dan $u = xzu$. Jadi, diperoleh
$$x(xyz)u = ux(yxz) = (uxy)xz = uxz = u.$$
Didapatkan, $u \in [x, xyz]$ sehingga $[x, y] \cap [x, z] \subseteq [x, xyz]$.

Dengan demikian, diperoleh $[x,y] \cap [x,z] = [x,xyz]$.

(ii) Diketahui $y \in [x,z]$ yang berarti $xzy = y$. Berdasarkan (i), didapatkan $[x,y] \cap [y,z] = [y,xyz] = [y,y]$. Menurut Lema 3.16, diperoleh $[x,y] \cap [y,z] = [y,y] = \{y\}$.

(iii) Diperhatikan bahwa

$$[x,y] \cap [y,z] \cap [z,x] = [y,xyz] \cap [z,xyz].$$

Diketahui juga bahwa $xyz \in [y,z]$. Oleh karena itu, berdasarkan (ii), diperoleh $[y,xyz] \cap [z,xyz] = \{xyz\}$.

Terbukti, (i),(ii), dan (iii). □

4. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini, meliputi

1. Setiap latis distributif $(L,\wedge,\vee)$ merupakan aljabar median.
2. Setiap interval $[a,b]$ dalam suatu aljabar median (M,m) merupakan latis distributif.
3. Beberapa sifat interval $[a,b]$ dalam suatu aljabar median (M,m) diantaranya sebagai berikut:
   (i) $[a,a] = \{a\}$
   (ii) $x,y \in [x,y]$
   (iii) Jika $c,d \in [a,b]$ maka $[c,d] \subseteq [a,b]$.
   (iv) $[x,y] \cap [x,z] = [x,xyz]$;
   (v) Jika $y \in [x,z]$ maka $[x,y] \cap [y,z] = \{y\}$;
   (vi) $[x,y] \cap [y,z] \cap [z,x] = \{xyz\}$.

Daftar Pustaka

[1] J.R. Isbell, “Median algebra,” *Transactions of The American Mathematical Society*, vol. 260, no. 2, 319-362, 1980. [GreenVersion]

[2] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amerika Serikat: American Mathematical Society, 1967. [CrossRef]

[3] D. Knuth, “The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions (Art of Computer Programming),” 2008. [CrossRef]

[4] M. Couceiro, S. Foldes, G.C. Meletiou, “On homomorphisms between products of median algebras,” *Algebra Universalis*, vol. 78, no. 4, pp. 545–553, 2017. [CrossRef]

[5] M. Roller, “PocSets, median algebras and group actions an extended study of Dunwoody’s construction and Sageev’s Theorem background and motivation”, 2016. [CrossRef]

[6] M. Couceiro, G.C. Meletiou, “On the number of essential arguments of homomorphisms between products of median algebras,” *Algebra Universalis*, vol. 79, no. 4, 2018. [CrossRef]

[7] B.H. Bowditch, “Some properties of median metric spaces,” *Groups, Geometry, and Dynamics*, vol. 10, no. 1, pp. 279-317, 2016. [CrossRef]

[8] D. Ye, Y. Yang, B. Mandal, D.J. Klein, “Graph invertibility and median eigenvalues,” *Linear Algebra Appl*, vol. 513, pp. 304-323, 2017. [CrossRef]

[9] B.H. Bowditch, “Embedding median algebras in products of trees,” *Geom Dedic*, vol. 170, no. 1, pp. 157-176, 2014. [CrossRef]

[10] M. Couceiro, J.L. Marichal, B. Teheux, “Conservative median algebras and semilattices,” *Order*, vol. 33, no. 1, pp. 121-132, 2016. [CrossRef]

[11] E. Fioravanti, “Superrigidity of actions on finite rank median spaces,” *Adv Math (N Y)*, vol. 352, pp. 1206-1252, 2019. [CrossRef]

[12] G.A. Niblo, N. Wright, J. Zhang, “Coarse median algebras: the intrinsic geometry of coarse median spaces and their intervals,” *Selecta Mathematica, New Series*, vol. 27, no. 2, 2021. [CrossRef]

[13] S.P. Adam, G.C. Meletiou, M.N. Vrahatis, “An interval median algebra a new algebraic structure on intervals-Why?,” 2018. [CrossRef]

[14] A. Gély, M. Couceiro, L. Miclet, A. Napoli, “Steps in the representation of concept lattices and median graphs,” 2020. [CrossRef]

[15] B.H. Bowditch, “Median Algebras.” Accessed: Jan. 22, 2024. [GreenVersion]