

Indeks Padmakar-Ivan dan indeks Randic pada graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo

(Padmakar-Ivan and Randic Indices of Non-Coprime Graph of Modulo Integer Groups)

Lalu Hasan Ghoffari, I Gede Adhitya Wisnu Wardhana*, Abdurahim

Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Mataram, 83125, Indonesia

*korespondensi: adhitya.wardhana@unram.ac.id

Received: 04-01-2024, accepted: 18-03-2024

Abstract

Graph theory, introduced by the Swiss mathematician Leonhard Euler in 1736, has played a pivotal role in solving real-world problems since its inception, notably exemplified by Euler's solution to the Königsberg Bridge problem. Its applications extend to various domains, including scheduling, shortest path routing, and chemical structure representation. In chemistry, graphs are extensively used to depict molecular structures and chemical compounds, aiding in visualizing atomic connections and overall compound configurations. Topology indices, such as the Padmakar-Ivan (PI) and Randic indices, provide numerical values capturing chemical bonding relationships. Beyond chemical structures, these indices find applications in abstract algebraic graph representations. Recent research, exemplified by Husni et al.'s work on the harmonic and Gutman indices, explores these indices in coprime graphs of integer groups modulo prime power orders. Additionally, studies on non-coprime graphs of integer groups modulo reveal unique characteristics and invariants, shedding light on their structure. The non-coprime graph is a graph with two vertices said to be adjacent if the greatest common divisor (GCD) of their orders is not equal to one. This paper aims to investigate the topological indices, specifically the Padmakar-Ivan and Randic indices, in non-coprime graphs of integer groups modulo, adding depth to our understanding of their applicability and significance in abstract algebraic representations.

Keywords: Graph theory, padmakar-ivan index, randic index, non-coprime graphs

MSC2020: 05C09

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang dikenalkan oleh matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736. Sejak pengenalannya melalui pemecahan masalah jembatan Königsberg, teori graf telah berkontribusi dalam menyelesaikan beberapa masalah dunia nyata, seperti masalah penjadwalan, masalah rute terpendek, dan masalah representasi struktur kimia [1]. Dalam kimia, graf digunakan secara luas untuk merepresentasikan struktur molekuler dan senyawa kimia. Representasi ini memberikan

pandangan visual yang jelas tentang bagaimana atom-atom dalam molekul terhubung satu sama lain, serta struktur keseluruhan dari senyawa kimia. Beberapa aplikasi utama dari graf dalam representasi struktur kimia melibatkan penggunaan teori graf dan indeks topologi [2].

Indeks topologi adalah nilai numerik yang terkait dengan ikatan kimia, yang mengekspresikan hubungan antara struktur kimia [3]. Terdapat berbagai jenis indeks topologi yang telah dikenalkan dalam matematika, seperti indeks Wiener, indeks Szeged, indeks Padmakar-Ivan, dan indeks Randic [4]. Indeks Padmakar-Ivan (PI) diperkenalkan oleh Padmakar et. al (2001), sebagai generalisasi dari konsep Indeks Wiener [5]. Indeks PI memiliki peran penting dalam studi hubungan struktur-aktivitas kuantitatif untuk model klasifikasi yang digunakan dalam ilmu kimia. Penggunaan indeks PI mampu membantu menganalisis dan mengklasifikasikan sifat-sifat molekuler yang dapat memengaruhi aktivitas biologis atau kimia suatu senyawa. Indeks PI dinyatakan sebagai $PI(G) = \sum_{uv \in E(G)} n_u(uv|G) + n_v(uv|G)$. Untuk suatu $n_u(uv|G)$ yaitu banyaknya simpul dari G yang lebih dekat ke simpul u dari pada ke simpul v dan $n_v(uv|G)$ adalah banyaknya simpul dari G yang lebih dekat ke simpul v dari pada ke simpul u [6]. Sementara itu, Indeks Randic adalah indeks topologi yang ditemukan pada tahun 1975 oleh Milan Randic [7]. Indeks ini banyak diteliti dan telah menjadi salah satu indeks topologi yang paling banyak digunakan dalam bidang kimia dan farmakologi. Indeks Randic didefinisikan sebagai, $R(G) = \sum_{uv \in E(G)} (deg_G(u) \cdot deg_G(v))^{-\frac{1}{2}}$ dengan $deg_G(u)$ dan $deg_G(v)$ masing-masing adalah derajat dari simpul u dan v di G [8].

Tidak hanya graf yang merepresentasikan struktur kimia, indeks topologi ini juga dapat diterapkan untuk mendapatkan karakteristik dari graf yang merepresentasikan konsep aljabar abstrak [9]. Beberapa penelitian telah dilakukan mengenai indeks topologi dalam konsep representasi graf aljabar abstrak, seperti penelitian yang berjudul "The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power". Dalam penelitian tersebut, dijelaskan tentang indeks harmonic dan indeks gutman pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo berorde prima berpangkat. Hasil yang diperoleh adalah $H(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)$ dan $Gut(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = (n-1)(2n-3)$ [10].

Selain dari graf koprima dari grup bilangan bulat modulo, dikenal juga graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo [11]. Graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo atau yang dinotasikan dengan $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ adalah representasi graf dari grup bilangan bulat modulo, di mana simpul merepresentasikan elemen dari grup bilangan bulat modulo kecuali elemen identitas. Dua simpul u, v di $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ bertetangga jika dan hanya jika $(|u|, |v|) \neq 1$ [12]. Graf non-koprima ini menunjukkan karakteristik unik dalam strukturnya. Nurhabibah (2022) memberikan karakterisasi dan invarian numerik dari graf non-koprima untuk grup kuaternion umum [13]. Masriani, et al. (2020) menjelaskan karakteristik graf jika grup bilangan bulat modulo berorde prima berpangkat atau

perkalian dua bilangan prima. Dalam penelitiannya, ia menemukan bahwa untuk graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo dengan orde $n = p^m$ yaitu bilangan prima berpangkat adalah graf lengkap K_{n-1} [14]. Dalam hal yang sama, Misuki, et al. memberikan penjelasan tentang karakteristik graf non-koprima tetapi untuk grup yang berbeda yang disebut grup Dihedral [15]. Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya tentang graf non-koprima, menarik untuk mempelajari bagaimana indeks topologi pada graf tersebut, khususnya indeks topologi Padmakar-Ivan dan indeks Randic [16]. Dalam penelitian ini, graf non-koprima yang diamati adalah graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo berorde bilangan prima berpangkat dan hasil perkalian dua bilangan prima berbeda.

2. Metodologi

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur terkait dengan topik yang akan diteliti. Prosedur yang dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Melakukan tinjauan pustaka untuk mengeksplorasi sumber-sumber yang relevan yang membantu dalam memahami masalah penelitian. Ini melibatkan studi tentang teori graf, teori grup, dan teori indeks topologi melalui literatur.
2. Mengamati pola dengan menganalisis pembentukan indeks Padmakar-Ivan dan Randic dalam graf non-koprima atas grup bilangan bulat modulo. Pola ini diperoleh dari observasi yang dilakukan pada beberapa contoh terkait dengan topik yang diselidiki.
3. Merumuskan dugaan, atau hipotesis sementara, mengenai karakteristik indeks Padmakar-Ivan dan Randic dalam graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo berdasarkan observasi sebelumnya. Selanjutnya, dugaan tersebut dibuktikan secara ketat untuk menentukan karakteristik sebenarnya dari indeks tersebut melalui bukti matematis. Jika sebuah dugaan terbukti salah, proses ini kembali ke langkah dua. Setelah dikonfirmasi, dugaan tersebut ditranskripsikan menjadi teorema atau karakteristik definitif dari indeks Padmakar-Ivan dan Randic pada graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo.
4. Menarik kesimpulan dengan merangkum hasil yang muncul dari penelitian yang dilakukan.

3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan studi literatur yang telah dilakukan, beberapa teorema dalam Indeks Padmakar-ivan dan Randic pada graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo diperoleh, yaitu sebagai berikut.

Teorema 3.1 Diberikan \mathbb{Z}_n dengan n merupakan bilangan prima berpangkat, indeks Padmakar-Ivan dari \mathbb{Z}_n adalah $PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (n - 1)(n - 2)$.

Bukti. Berdasarkan [14], $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf lengkap K_{n-1} . Oleh karena itu untuk setiap $x, y \in V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, banyaknya simpul yang lebih dekat ke x dari pada ke y adalah 1, yaitu simpul x itu sendiri, begitupun sebaliknya. Oleh karena itu, $n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = 2$. Selanjutnya, karena $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki $n - 1$ simpul berbeda, maka $PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = 2C_2^{n-1} = (n - 1)(n - 2)$. □

Contoh 3.1 Diberikan $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}$ sebagai berikut.



Gambar 1. Representasi $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}$

Maka, indeks Padmakar-Ivan dari $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}$ adalah :

$$\begin{aligned}
 PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) &= \sum_{uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4})} n_u(uv|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) + n_v(uv|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) \\
 &= [n_1(12|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) + n_2(12|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4})] + [n_1(13|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) + n_3(13|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4})] \\
 &\quad + [n_2(23|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) + n_3(23|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4})] \\
 &= (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.1 maka akan didapatkan indeks PI yang sama, yaitu :

$$\begin{aligned}
 PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) &= (n - 1)(n - 2) \\
 &= (4 - 1)(4 - 2) \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Teorema 3.2 Diberikan \mathbb{Z}_n dengan n merupakan bilangan prima berpangkat, indeks Randic dari \mathbb{Z}_n adalah $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{n-1}{2}$

Bukti. Berdasarkan [14], $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf lengkap K_{n-1} , maka untuk setiap $x \in V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, $deg(x) = n - 2$. Oleh karena itu, $(deg(u) \cdot deg(v))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n-2}$. Selanjutnya, Karena $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki $n - 1$ simpul berbeda, maka $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{c_2^{n-1}}{n-2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2(n-2)}$. Dengan demikian, diperoleh $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{n-1}{2}$ □

Contoh 3.2 Berdasarkan Gambar 1, maka indeks Randic dari $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}$ adalah :

$$\begin{aligned} R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) &= \sum_{uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4})} (deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(u) \cdot deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(v))^{-\frac{1}{2}} \\ &= [deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(1) \cdot deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(2)]^{-\frac{1}{2}} + [deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(1) \cdot deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(3)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + [deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(2) \cdot deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}}(3)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.2 maka akan didapatkan indeks Randic yang sama, yaitu:

$$\begin{aligned} R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) &= \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{4-1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Teorema 3.3 Diberikan $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo n . Jika $n = p_1 p_2$ yaitu perkalian dua bilangan prima berbeda, maka untuk setiap $u, v \in V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, dengan $u \notin \langle p_1 \rangle$ dan $v \notin \langle p_2 \rangle$ atau sebaliknya, $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Bukti. Partisi $V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ menjadi beberapa subhimpunan, yaitu $A = \{p_1, 2p_1, \dots, n - p_1\}$, $B = \{p_2, 2p_2, \dots, n - p_2\}$, dan $C = \mathbb{Z}_n \setminus (A \cup B \cup \{0\})$. Selanjutnya ketetangaan untuk setiap $u, v \in V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ dibagi dalam enam kasus.

Kasus 1. Untuk $u, v \in A$. Karena $n = p_1 p_2$, maka $|u| = |v| = p_2$. Oleh karena itu, diperoleh $(|u|, |v|) = p_2$. Dengan demikian, $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Kasus 2. Untuk $u, v \in B$, Karena $n = p_1 p_2$, maka $|u| = |v| = p_1$. Oleh karena itu, diperoleh $(|u|, |v|) = p_1 \neq 1$. Dengan demikian, $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Kasus 3. Untuk $u, v \in C$. Misalkan n adalah orde dari u . Karena p_1 dan p_2 tidak membagi orde u ataupun orde v , maka berakibat $|u| = |v| = n$ dan $(|u|, |v|) = n \neq 1$. Dengan demikian, $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Kasus 4. Untuk $u \in A$ dan $v \in C$. Sama seperti Kasus 1 dan Kasus 3, diperoleh $(|u|, |v|) = p_2$. Jadi $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Kasus 5. Untuk $u \in B$ dan $v \in C$. Mengikuti pembuktian pada Kasus 2 dan Kasus 3, diperoleh $(|u|, |v|) = p_1$. Jadi $uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$.

Kasus 6. Jika $u \in A$ dan $v \in B$, maka $(|u|, |v|) = (p_2, p_1) = 1$. Karena p_1 dan p_2 merupakan dua bilangan prima berbeda, maka $uv \notin E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$. \square

Hasil pada Teorema 3.3 mempermudah perhitungan rumus umum dari indeks Padmakar-Ivan pada graf yang diteliti.

Teorema 3.4 Misalkan \mathbb{Z}_n merupakan grup bilangan bulat modulo dengan $n = p_1 p_2$, yaitu perkalian dua bilangan prima berbeda, maka $PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (p_2 - 1)(p_2 - 2) + (p_1 - 1)(p_1 - 2) + (n - p_2 - p_1 + 1)(n - p_2 - p_1) + (p_1 + 1)(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1) + (p_2 + 1)(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)$.

Bukti. Misalkan \mathbb{Z}_n merupakan grup bilangan bulat modulo dengan $n = p_1 p_2$, yaitu perkalian dua bilangan prima berbeda, maka $V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ merupakan gabungan dari subhimpunan-subhimpunan $A = \{p_1, 2p_1, \dots, n - p_1\}$, $B = \{p_2, 2p_2, \dots, n - p_2\}$, dan $C = \mathbb{Z}_n \setminus (A \cup B \cup \{0\})$. Dalam pembuktian ini, diasumsikan bahwa $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$. Selanjutnya permasalahan dalam pembuktian akan dibagi ke dalam lima kasus. Perhatikan,

Kasus 1. Untuk $x, y \in A$. Banyaknya simpul yang lebih dekat ke x dari pada ke y adalah 1, yaitu simpul x itu sendiri dan sebaliknya. Oleh karena itu, $(n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})) = 2$. Karena A memiliki $p_2 - 1$ elemen, maka indeks PI dalam kasus ini adalah $2C_2^{p_2-1}$.

Kasus 2. Untuk $x, y \in B$. Sama seperti kasus sebelumnya, $(n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})) = 2$. Karena B memiliki $p_1 - 1$ elemen, maka indeks PI dalam kasus ini adalah $2C_2^{p_1-1}$.

Kasus 3. Untuk $x, y \in C$. Sama seperti kasus 1 dan kasus 2, $(n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})) = 2$. Karena C memiliki $n - p_2 - p_1 + 1$ elemen, maka indeks PI dalam kasus ini adalah $2C_2^{n-p_2-p_1+1}$.

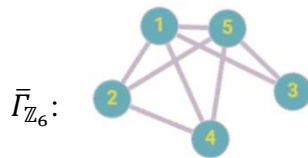
Kasus 4. Untuk $x \in A$ and $y \in C$. Berdasarkan Teorema 3.3, $n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ adalah 1, yaitu simpul x itu sendiri, dan $n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ adalah p_1 , yaitu y dan semua elemen di B . Oleh karena itu. $(n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})) = p_1 + 1$. Karena A memiliki $p_2 - 1$ elemen dan C memiliki $n - p_2 - p_1 + 1$ elemen, maka dalam kasus ini $PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (p_1 + 1)(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)$

Kasus 5. Untuk $x \in B$ and $y \in C$. Berdasarkan Teorema 3.3, didapatkan $n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ adalah 1, yaitu simpul x itu sendiri, dan $n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ adalah p_2 , yaitu y dan semua elemen di B . Oleh karena itu. $(n_x(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) + n_y(xy|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})) = p_2 + 1$. Karena B memiliki $p_1 - 1$ elemen dan C memiliki $n - p_2 - p_1 + 1$ elements, maka dalam kasus ini $PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (p_2 + 1)(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)$

Dengan menjumlahkan indeks PI dari setiap kasus maka diperoleh.

$$PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (p_2 - 1)(p_2 - 2) + (p_1 - 1)(p_1 - 2) + (n - p_2 - p_1 + 1)(n - p_2 - p_1) + (p_1 + 1)(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1) + (p_2 + 1)(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1) \quad \square$$

Contoh 3.3 Diberikan $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}$ sebagai berikut.



Gambar 2. Representasi $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}$

Maka, indeks Padmakar-Ivan dari $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah :

$$\begin{aligned}
 PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) &= \sum_{uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})} n_u(uv|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_v(uv|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) \\
 &= [n_1(15|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_5(15|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] + [n_2(24|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_4(24|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] \\
 &\quad + [n_1(12|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_2(12|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] + [n_1(14|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_4(14|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] \\
 &\quad + [n_5(52|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_4}) + n_2(52|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] + [n_5(54|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_4(54|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] \\
 &\quad + [n_1(13|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_3(13|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] + [n_5(53|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) + n_3(53|\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})] \\
 &= (1 + 1) + (1 + 1) + (2 + 1) + (2 + 1) \\
 &\quad + (2 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) + (3 + 1) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.4 dan memisalkan $p_1 = 2$ dan $p_2 = 3$, maka akan didapatkan indeks PI yang sama, yaitu :

$$\begin{aligned}
 PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) &= (3 - 1)(3 - 2) + (2 - 1)(2 - 2) \\
 &\quad + (6 - 3 - 2 + 1)(6 - 3 - 2) + (2 + 1)(3 - 1) \\
 &\quad + (6 - 3 - 2 + 1) + (3 + 1)(2 - 1)(6 - 3 - 2 + 1) \\
 &= 2 + 0 + 2 + 12 + 8 \\
 &= 24.
 \end{aligned}$$

Hasil dari Teorema 3.3 juga diperlukan dalam pencarian rumus umum indeks Randic dari graf yang diteliti.

Teorema 3.5 Misalkan \mathbb{Z}_n merupakan grup bilangan bulat modulo dengan $n = p_1 p_2$, yaitu perkalian dua bilangan prima berbeda, maka

$$\begin{aligned}
 R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) &= \frac{(p_2 - 1)(p_2 - 2)}{2(n - p_1 - 1)} + \frac{(p_1 - 1)(p_1 - 2)}{2(n - p_2 - 1)} + \frac{(n - p_2 - p_1 + 1)(n - p_2 - p_1)}{2(n - 2)} \\
 &\quad + \frac{(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_1 - 1)}} + \frac{(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_2 - 1)}}
 \end{aligned}$$

Bukti. Misalkan \mathbb{Z}_n merupakan grup bilangan bulat modulo dengan $n = p_1 p_2$, yaitu perkalian dua bilangan prima berbeda, maka $V(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$ merupakan gabungan dari subhimpunan-subhimpunan $A = \{p_1, 2p_1, \dots, n - p_1\}$, $B = \{p_2, 2p_2, \dots, n - p_2\}$, dan $C = \mathbb{Z}_n \setminus (A \cup B \cup \{0\})$. Dalam pembuktian ini, akan dibagi perhitungannya ke dalam lima kasus. Perhatikan,

Kasus 1. Untuk $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jika $x, y \in A$. Berdasarkan Teorema 3.3, maka $\deg(x) = \deg(y) = n - p_1 - 1$. Oleh karena itu, dalam kasus ini $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{c_2^{p_2-1}}{n-p_1-1}$.

Kasus2. Untuk $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jika $x, y \in B$. Berdasarkan Teorema 3.3, maka $\deg(x) = \deg(y) = n - p_2 - 1$. Oleh karena itu dalam kasus ini $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{C_2^{p_1-1}}{n-p_2-1}$.

Kasus 3. Untuk $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jika $x, y \in C$. Berdasarkan teorema 3.3, maka $\deg(x) = \deg(y) = n - 2$. Oleh karena itu dalam kasus ini $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{C_2^{n-p_2-p_1+1}}{n-2}$.

Kasus 4. Untuk $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jika $x \in A$ and $y \in C$. Berdasarkan teorema 3.3, maka $\deg(x) = n - p_1 - 1$ dan $\deg(y) = n - 2$. Oleh karena itu dalam kasus ini $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{(p_2-1)(n-p_2-p_1+1)}{\sqrt{(n-2)(n-p_1-1)}}$.

Kasus 5. Untuk $xy \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n})$, jika $x \in B$ and $y \in C$. Berdasarkan teorema 3.3, maka $\deg(x) = n - p_2 - 1$ dan $\deg(y) = n - 2$. Oleh karena itu dalam kasus ini $R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{(p_1-1)(n-p_2-p_1+1)}{\sqrt{(n-2)(n-p_2-1)}}$.

Dengan menjumlahkan indeks Randic dari setiap kasus maka diperoleh.

$$R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{(p_2 - 1)(p_2 - 2)}{2(n - p_1 - 1)} + \frac{(p_1 - 1)(p_1 - 2)}{2(n - p_2 - 1)} + \frac{(n - p_2 - p_1 + 1)(n - p_2 - p_1)}{2(n - 2)} + \frac{(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_1 - 1)}} + \frac{(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_2 - 1)}}. \quad \square$$

Contoh 3.4 Berdasarkan Gambar 2, maka indeks Randic dari $\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah :

$$\begin{aligned} R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) &= \sum_{uv \in E(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6})} \left(\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(u) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(v) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(1) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(5) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(2) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(4) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(1) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(2) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(1) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(4) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(5) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(2) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(5) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(4) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(1) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(3) \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(5) \cdot \deg_{\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}}(3) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{7 + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{12}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.5 dan memisalkan $p_1 = 2$ dan $p_3 = 3$, maka akan didapatkan indeks Randic yang sama, yaitu:

$$\begin{aligned}
 R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_6}) &= \frac{(3-1)(3-2)}{2(6-2-1)} + \frac{(2-1)(2-2)}{2(6-3-1)} \\
 &= \frac{(6-3-2+1)(6-3-2)}{2(6-2)} + \frac{(3-1)(6-3-2+1)}{\sqrt{(6-2)(6-2-1)}} \\
 &\quad + \frac{(2-1)(6-3-2+1)}{\sqrt{(6-2)(6-3-1)}} \\
 &= \frac{2}{6} + 0 + \frac{2}{8} + \frac{4}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{8}} \\
 &= \frac{7 + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{12}.
 \end{aligned}$$

4. Kesimpulan

Penelitian ini memperoleh beberapa kesimpulan terkait indeks Padmakar-Ivan dan indeks Randic pada graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo.

1. Indeks Padmakar-Ivan dari graf non-koprime \mathbb{Z}_n dengan n adalah bilangan per pangkat prima adalah

$$PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = (n-1)(n-2).$$

2. Indeks Randic dari graf non-koprime \mathbb{Z}_n dengan n adalah bilangan per pangkat prima adalah

$$R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{n-1}{2}.$$

3. Indeks Padmakar-Ivan dari grup non-koprime \mathbb{Z}_n dengan $n = p_1 p_2$ dan p_1, p_2 adalah bilangan prima berbeda adalah

$$\begin{aligned}
 PI(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) &= (p_2-1)(p_2-2) + (p_1-1)(p_1-2) \\
 &\quad + (n-p_2-p_1+1)(n-p_2-p_1) \\
 &\quad + (p_1+1)(p_2-1)(n-p_2-p_1+1) + (p_2+1)(p_1-1)(n-p_2-p_1+1).
 \end{aligned}$$

4. Indeks Randic dari grup non-koprime \mathbb{Z}_n dengan $n = p_1 p_2$ dan p_1, p_2 adalah bilangan prima berbeda adalah

$$R(\bar{\Gamma}_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{(p_2-1)(p_2-2)}{2(n-p_1-1)} + \frac{(p_1-1)(p_1-2)}{2(n-p_2-1)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(n - p_2 - p_1 + 1)(n - p_2 - p_1)}{2(n - 2)} + \frac{(p_2 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_1 - 1)}} \\
 & + \frac{(p_1 - 1)(n - p_2 - p_1 + 1)}{\sqrt{(n - 2)(n - p_2 - 1)}}.
 \end{aligned}$$

Penelitian ini memberikan gambaran tentang bagaimana konsep indeks topologi dalam kimia dapat diterapkan secara substansial dalam kerangka aljabar abstrak. Tidak hanya itu, dalam penelitian ini, karakteristik indeks Padmakar-Ivan dan indeks Randic dapat diaplikasikan dalam pemahaman representasi struktur kimia yang serupa, misalnya dalam kasus graf lengkap. Dengan demikian, hasil penelitian ini tidak hanya memperdalam keterhubungan antara matematika dan kimia, tetapi juga memberikan landasan yang kokoh untuk penerapan praktis dalam analisis struktur dan sifat-sifat molekuler yang lebih kompleks.

Daftar Pustaka

- [1] N. Deo, *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Courier Dover Publications, 2017.
- [2] S. Delen, R. H. Khan, M. Kamran, N. Salamat, A. Q. Baig, I. N. Cangul, M. K. Pandit, "Ve-Degree, Ev-Degree, and Degree-Based Topological Indices of Fenofibrate," *Journal of Mathematics*, 2022. [[CrossRef](#)]
- [3] B. Z. Yatin, M. R. Gayatri, I. G. A. W. Wardhana, B. D. A. Prayanti, "Indeks hyperwiener dan indeks padmakar-ivan dari graf koprima dari grup dihedral,". *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, vol. 7 no. 2, pp. 138-147, 2023. [[CrossRef](#)]
- [4] E. Mohammadinasab, M. Goodarzi, "Theoretical study of the relationship between Wiener, Padmakar-Ivan, and Szeged topological indices in contrast to energy, electric moments and partition coefficient of armchair polyhex carbon nanotubes with various circumference and fixed lengths," *Fullerenes, Nanotubes, and Carbon Nanostructures*, vol. 19, no. 6, pp. 550-563, 2011. [[CrossRef](#)]
- [5] Y. Shi, "Note on two generalizations of the Randić index," *Applied mathematics and computation*, vol. 265, pp. 1019-1025, 2015. [[CrossRef](#)]
- [6] P.V.H. Khadikar, S. Karmakar, V. K. Agarwal, "A Novel PI index and its applications to QSPR/QSAR studies," *Journal of chemical information and computer sciences*. vol. 41, no. 4, pp. 934-949, 2001. [[CrossRef](#)]
- [7] S. Amin, M. A. Rehman, A. Naseem, I. Khan, N. Alshammari, N. N. Hamadneh, "Analysis of complex networks via some novel topological indices," *Mathematical Problems in Engineering*, 2022. [[CrossRef](#)]

- [8] M. Randic, "On Characterization of Molecular Branching. Journal of The American Chemical Society," vol. 97, no. 23, pp. 6609-6615, 1975. [[CrossRef](#)]
- [9] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, I. G. A. W. Wardhana, "The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513-520, 2023. [[CrossRef](#)]
- [10] M. N. Husni, H. Syafitri, A. M. Siboro, A. G. Syarifudin, Q. Aini, I. G. A. W. Wardhana, "The harmonic index and the gutman index of coprime graph of integer group modulo with order of prime power," *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 3, pp. 961-966, 2022. [[CrossRef](#)]
- [11] F. Mansoori, A. Erfanian, B. Tolve, "Non-coprime graph of a finite group" In *AIP Conference Proceedings*, vol. 1750, no. 1, AIP Publishing, 2016. [[CrossRef](#)]
- [12] S. A. Kathirvel, P. J. Cameron, T. T. Chelvam, "Generalized non-coprime graphs of groups," *arXiv preprint arXiv:2208.01900*, 2022. [[CrossRef](#)]
- [13] N. Nurhabibah, D. P. Malik, H. Syafitri, I. G. A. W. Wardhana, "Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n," In *AIP Conference Proceedings*, vol. 2641, no. 1, 2022. [[CrossRef](#)]
- [14] M. Masriani, R. Juliana, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, I. Irwansyah, N. W. Switrayni, "Some result of non-coprime graph of integers modulo n group for n a prime power," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no.2, pp. 107-111, 2020. [[CrossRef](#)]
- [15] W. U. Misuki, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, I. Irwansyah, "Some results of non-coprime graph of the dihedral group D_{2n} for na prime power," In *AIP Conference Proceedings* vol. 2329, no. 1, 2021. [[CrossRef](#)]
- [16] M. N. Husni, I. G. A. W. Wardhana, P. K. Dewi, and I. N. Suparta, "Szeged Index and Padmakar-Ivan Index of Nilpotent Graph of Integer Modulo Ring with Prime Power Order", *J*, vol. 20, no. 2, pp. 332-339, 2023. [[CrossRef](#)]