MIMS Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 24 (1), 2024, 1 – 11
eISSN 2722-9886 pISSN 1411-6669
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Penyelesaian khusus persamaan diferensial biasa ordo dua linier tak homogen dengan koefisien konstan untuk fungsi bagian demi bagian

(Particular solution of 2nd order linier non homogeneous ordinary differential equations with constant coefficients for piecewise functions)

Gani Gunawan
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Bandung, Bandung, Indonesia

korespondensi: ggani9905@gmail.com

Received: 28-02-2023, accepted: 05-02-2024

Abstract

Spring mechanical vibration motion system with a damped degree of freedom and influenced by external forces is mathematically expressed as an ordinary differential equation of order of two linear constant coefficients that are not homogeneous. If an external force acts on a stationary system describe as a continuous function $f(t)$ for any time *t*, then the system will experience mechanical vibrational motion , which mathematically the equation of motion can be expressed as a superposition. The equation consists of $y_h(t)$ as a solution to a homogeneous form with mechanical vibrations $y_p(t)$ as a solution to a particular form. In terms of the particular solution $y_p(t)$ this article will show a mathematical way when *f*(*t*) is a continuous function section by the part which is defined at an interval, such that the mechanical vibration motion equation $y_p(t)$ is at the same time a complete solution $y_c(t)$ of the equation the mechanical vibration system.

Keywords: Vibration, impulse functions, convolution

MSC2020: 34A37

1. Pendahuluan

Bentuk umum dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) ordo dua linier tak homogen koefisien konstan ditulis

$$my'' + cy' + ky = f(t) \tag{1}$$

dengan m, c, k adalah konstanta, dan $f(t) \neq 0$. Adapun Penyelesaian lengkap dari PDB (1) seperti yang dinyatakan dalam kepustakaan [1], [2], [3] ditulis $y_c(t)$ adalah berupa fungsi superposisi, yaitu

$$y_c(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{2}$$

dengan $y_h(t)$ adalah penyelesaian umum dari persamaan (1) dalam bentuk homogen, dan $y_p(t)$ adalah penyelesaian partikular. Dalam hal penyelesaian partikular $y_p(t)$ dari

persamaan (1), selama ini dilakukan untuk fungsi $f(t)$ tertentu seperti fungsi bentuk polynomial, eksponensial, trigonometri sinus dan cosinus, dimana penyelesaian partikular $y_p(t)$ ditentukan melalui metoda koefisien tak tentu dan metoda variasi parameter, seperti yang dinyatakan dalam kepustakaan [4] atau bahkan dapat ditentukan dengan pembentukan fungsi Green [5].

Permasalahan muncul ketika menentukan penyelesaian partikular y_p dari PDB (1) dengan $f(t)$ terdefinisi pada suatu interval dan merupakan fungsi bagian demi bagian pada interval tersebut. Dimotivasi dari hasil penelitian sebelumnya pada kepustakaan [6], artikel ini menyajikan suatu uraian pembahasan yang berkaitan dengan masalah tersebut. Hasil penelitian akan dinyatakan dalam sebuah Proposisi 3.1.

Dalam aspek rekayasa teknik [7], sistem gerak getaran mekanis pegas dengan konstanta pegas k diikatkan sebuah benda bermassa m pada pegas tersebut (sebuah derajat kebebasan) dengan peredam c dan dipengaruhi gaya luar $f(t)$, secara matematis dapat dinyatakan sebagai Persamaaan Diferensial Biasa (PDB) (1). Pada saat $t = 0$, sistem dalam keadaan tidak bekerja. Sistem akan bekerja untuk waktu yang sangat singkat pada interval $0 < t < \varepsilon$ ketika ada gaya luar $f(t)$ beraksi pada sistem sebesar F Selama gaya luar tersebut beraksi, kecepatan benda bergerak $v(t)$ akan timbul secara singkat dari 0 ke $v(t)$, kemudian sistem bergerak dengan kecepatan konstan $v(\varepsilon)$ dan tidak ada gaya luar berikutnya yang beraksi pada sistem tersebut. Dalam hal ini, kecepatan $v(\varepsilon)$ dapat dinyatakan dalam F, ε, dan m.

Menurut hukum Newton, gaya sebesar F yang beraksi pada benda bermassa m yang terikat kuat pada pegas akan sebanding dengan percepatan gerak getar benda pada sistem tersebut yang konstan sebesar a sedemikian sehingga $F = ma$ dan $v(t) = at$ untuk $0 \le t \le \varepsilon$, akibatnya $v(\varepsilon) = a\varepsilon = \frac{F\varepsilon}{m}$ (lihat [8] dan [9]). Oleh karena itu, ketika sistem dalam keadaan belum mulai bekerja namun ada gaya luar yang beraksi pada sistem saat itu, maka secara matematis dapat dinyatakan sebagai PDB (1) dengan masalah nilai awal sebagai berikut

$$my'' + cy' + ky = f(t);\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \tag{3}$$

Sedangkan saat benda mulai bergerak setelah ada gaya luar yang beraksi pada sistem dan tidak ada gaya aksi berikutnya pada sistem, secara matematis dinyatakan oleh

$$my'' + cy' + ky = 0;\ y(0) = 0, y'(0) = \frac{F\varepsilon}{m}. \tag{4}$$

Jika diasumsikan $\frac{F\varepsilon}{m} = 1$, maka persamaan (3) ditulis

$$my'' + cy' + ky = 0;\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \tag{5}$$

Selanjutnya, karena PDB pada persamaan (3) bersifat linier, sehingga jika penyelesaian dari persamaan (5) untuk $t > 0$ adalah $w(t)$, yaitu $y(t) = w(t)$ dan $w(t) = 0$ selain untuk $t > 0$, maka penyelesaian (4) untuk $t > 0$ dapat ditulis

$$y(t) = \frac{F\varepsilon}{m} w(t). \tag{6}$$

Dalam rekayasa teknik [10], penyelesaian $w(t)$ pada (6) dapat dipandang sebagai *fungsi bobot* dari PDB tersebut yang selanjutnya dinamakan *respon input satuan* dari sistem. Dalam aspek mekanika [11], [12], [13], besaran $F\varepsilon$ disebut *impulse* dari gaya ($\frac{F\varepsilon}{m}$ adalah impulse per satuan massa), sehingga jika diasumsikan $\frac{F\varepsilon}{m} = 1$, maka fungsi $w(t)$ adalah respon sistem terhadap impulse satuan pada saat $t = 0$. Sebagai ilustrasi matematis dapat diperlihatkan bahwa PDB $y'' + \omega^2 y = 0$ dengan syarat awal $y(0) = 0, y'(0) = 1$, mempunyai respon impulse satuan $w(t)$ adalah

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \sin\omega t, & t > 0, \\ 0, & \text{untuk } t \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Dalam hal ini fungsi respon impulse satuan dapat ditentukan melalui penyelesaian homogen dari PDB ilustrasi tersebut, yaitu $y_h(t) = a \cos\omega t + b \sin\omega t$ setelah syarat awal disubstitusikan. Namun bagaimanakah bila PDB pada ilustrasi yang diberikan di atas adalah $y'' + \omega^2 y = f(t)$ dengan $f(t)$ adalah fungsi sembarang yang terdefinisi pada suatu interval terbatas, sedemikian sehingga $f(t)$ dapat berupa fungsi tangga, fungsi kontinu bagian demi bagian atau bahkan fungsi periodik.

Untuk menjawab persoalan yang telah disebutkan di atas, pembahasan dapat dilakukan dengan berdasar kepada *prinsip superposisi*, *operator polynomial* L , *operator diferensial* D , dan *formula Leibniz*. Dalam hal ini $D = \frac{d}{dx}$ dan $L = mD^2 + cD + k$ sedemikian sehingga PDB (1) dapat dinyatakan dalam operator L sebagai berikut, yaitu

$$L(y) = f(t). \tag{7}$$

Selanjutnya persamaan matematis sistem gerak getaran mekanis pegas dengan gaya luar sembarang $f(t)$ akan dinyatakan oleh (7). Berdasarkan prinsip superposisi dalam kepustakaan [14], terdapat suatu fakta seperti yang dinyatakan pada Teorema 2.1.

Teorema 2.1 Jika $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$ dan y_i adalah penyelesaian particular dari $L(y_i) = f_i(t)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka $y_p = y_1 + y_2 + \cdots y_n$ adalah penyelesaian partikular dari persamaan (3).

Dalam hal ini $f(t)$ bukan merupakan jumlah berhingga dari beberapa fungsi sederhana, namun atas interval berhingga. Fungsi $f(t)$ dapat diaproksimasi oleh sejumlah fungsi yang demikian.

Adapun pembuktian dari hasil penelitian dalam arikel ini, dapat ditunjukan dengan mengunakan *formula Leibniz* sebagai akibat dari Teorema 2.2.

Teorema 2.2 Misal $f(x,y)$ adalah fungsi pada $\mathrm{P}^2 = [a,b] \times [c,d]$ dan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ kontinu pada P, maka

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt. \tag{8}$$

Bukti. Dalam kepustakaan [15], [16] dinyatakan bahwa aturan integral Leibniz ditulis

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f\big(x,b(x)\big)\frac{d}{dx}b(x) - f\big(x,a(x)\big)\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt \tag{9}$$

dengan $-\infty < a(x), b(x) < \infty$**.** Dalam kasus fungsi $a(x)$ dan $b(x)$ adalah konstan, yaitu $a(x) = a$ dan $b(x) = b$ dengan a dan b suatu kontanta, maka dari persamaan (9) diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt. \qquad \square$$

Akibat dari Teorema 2.2, jika ditetapkan $a(x) = a$ dan $b(x) = x$ maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,t)\,dt\right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt \tag{10}$$

yang merupakan *formula Leibniz* [17].

2. Metodologi

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur (*literature study*) yang mengkolaborasikan antara teori vibrasi pada aspek fisika dan dinamika, serta teori persamaan diferensial biasa pada aspek matematika teknik. Adapun tujuan dari penenlitian ini untuk menentukan penyelesaian khusus atau penyelesaian lengkap dari PDB pada persamaan (3) melalui Proposisi 3.1. Proposisi 3.1 yang dinyatakan dalam penelitian ini dimotivasi hasil penelitian pada kepustakaan [18], dengan $f(t)$ adalah fungsi bagian demi bagian (*piecewise function*) yang terdefinisi pada suatu interval yang terbatas.

Tahapan untuk menentukan penyelesaian khusus dari PDB pada persamaan (3) adalah sebagai berikut:

1. Konstruksi $f(t)$ yang terdefinisi untuk interval waktu $t \in [0,x]$ sedemikian sehingga untuk $t = x$, $f(t)$ menjadi fungsi bagian demi bagian yaitu

$$f(t) = \begin{cases} F_1(t), & \text{jika } 0 \le t < t_1, \\ F_2(t), & \text{jika } t \ge t_1; \end{cases}$$

2. Menentukan fungsi respon impulse satuan $w(t)$ melalui penyelesaian homogen dari PDB pada persamaan (5) dengan syarat awal $y(0) = 0, y'(0) = 1,$ sedemikian sehingga $h(t) = w(t)$;

3. Menggunakan konvolusi $(f * w)(t)$ sebagai penyelesaian partikular $y_p(t)$ yaitu
$$(f * w)(t) = \int_0^x f(t)\, w(x-t)dt$$
sedemikian sehingga $y(t) = y_p(t)$, yakni
$$y(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} F_1(\tau)h(t-\tau)d\tau\,, & \text{jika } 0 \le t < t_1, \\ \int_0^{t_1} F_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} F_2(\tau)h(t-\tau)d\tau, & \text{jika } t \ge t_1; \end{cases}$$
4. Menentukan parameter ω_d, ω_n, dan ξ melalui $y_h(t)$ dari Persamaan (3);
5. Menetapkan nilai konstanta m, c dan k untuk memvalidasi $y(t)$ dengan grafik sebagai penyelesaian khusus persamaan (3) yang merupakan persamaan gerak getaran mekanis pegas dengan satu derajat kebebasan yang dipengaruhi gaya luar .

3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan t termuat pada interval waktu $[0,x]$, untuk menentukan penyelesaian partikular $y_p(t)$ dari persamaan (7) pada saat $t = x$, selanjutnya interval $[0,x]$ dibagi menjadi n partisi dengan panjang partisi Δt, yaitu $0 = t_0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_i < t_{i+1} < t_n = x$ dengan $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Untuk partisi sembarang ke-i, yaitu $[t_i, t_{i+1}]$ dipunyai $f(t) = f(t) \approx f(t_i)$, selanjutnya jika dikonstruksi
$$f(t) = \begin{cases} f(t_i), & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases};\ i = 0, 1, .., n-1$$
maka
$$f(t) \approx f_0(t) + f_1(t) + \ldots + f_{n-1}(\mathrm{t}) \ \text{ untuk } 0 < t < x. \tag{9}$$
Karena $w(t)$ adalah respon sistem persamaan (7) terhadap impulse satuan pada saat $t = 0$, maka respon dari persamaan (6) terhadap impulse yang diberikan oleh $f(t)$ (dengan kata lain, penyelesaian partikular persamaan (7) yang bersesuaian dengan $f_i(t)$) menjadi
$$f(t_i)w(t-t_i)\Delta t. \tag{10}$$
Dalam hal ini $w(t)$ telah bergeser sejauh t_i satuan ke kanan karena impulse terjadi pada waktu t_i dari waktu awalnya pada saat $t = 0$. Perkalian dengan $f(t_i)\Delta t$ karena merupakan impulse yang terjadi sebenarnya, gaya $f_i(t)$ mempunyai besaran $f(t_i)$ dan digunakan atas interval waktu Δt.

Karena $f(t)$ dinyatakan dalam persamaan (9), dan persamaan (10) memberikan respon untuk setiap $f_i(t)$, maka berdasarkan prinsip superposisi penyelesaian partikular $y_p(t)$ dapat dinyatakan oleh

$$y_p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)w(t-t_i)\Delta t \ \ ; \ 0 \le t \le x.$$

Sehingga untuk $t = x$, diperoleh

$$y_p(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)w(t-t_i)\Delta t. \tag{11}$$

Dalam hal ini, Persamaan (11) merupakan jumlah yang mengaproksimasi definit integral. Jadi jika ditentukan nilai limit pada persamaan (11) untuk $n \to \infty$, yaitu $\Delta t \to 0$, maka diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)w(t-t_i)\Delta t \ = \int_0^x f(t)\, w(x-t)dt$$

atau

$$y_p(t) = \int_0^x f(t)\, w(x-t)dt \tag{12}$$

yang merupakan respon sistem untuk $f(t)$. Sehingga persamaan (12) ini dapat dipandang sebagai penyelesaian lengkap (2) dari persamaan (3) atau dengan kata lain persamaan (12) adalah $y_c(t)$ khusus (penyelesaian khusus) untuk persamaan (1) yang memenuhi syarat awal yang diberikan sedemikian sehingga $y_p(t)$ seperti pada (12) berlaku untuk syarat awal $y_p(0) = 0$ dan $y_p'(0) = 0$.

Dari uraian di atas didapat sebuah proposisi yang menunjukkan suatu kenyataan yang menguatkan terhadap proposisi dalam kepustakaan [18].

Proposisi 3.1 Konvolusi pada persamaan (12) adalah penyelesaian khusus dari persamaan (7) dengan syarat awal seperti yang dinyatakan pada persamaan (3).

Bukti. Konvolusi pada Persamaan (12) dinyatakan oleh

$$y_p(t) = \int_0^x f(t)\, w(x-t)dt.$$

Dengan menggunakan formula *Leibniz* diperoleh

$$y_p'(t) = f(x)w(x-x) + \int_0^x f(t)\, w'(x-t)dt.$$

Menurut persamaan (6), karena $\frac{F\varepsilon}{m}$ adalah faktor yang tidak nol sehingga untuk $y(0) = 0$ akan didapat $w(0) = 0$. Akibatnya suku pertama pada persamaan di atas adalah sama dengan nol. Selanjutnya dengan menggunakan formula *Lebniz* kembali, didapat

$$y_p''(t) = f(x)w'(x-x) + \int_0^x f(t)\, w''(x-t)dt.$$

Karena pada persamaan (6), diasumsikan $\frac{F\varepsilon}{m}$ = 1, maka untuk $y'(0) = 1$ diperoleh $w'(0)$ =1, sedemikian sehingga

$$y_p''(t) = f(x) + \int_0^x f(t)\, w''(x-t)dt.$$

Dengan mengambil $m = 1$ pada persamaan (7) dan mensubtitusikannya pada PDB tersebut diperoleh

$$y_p'' + cy_p' + ky_p = f(x) + \int_0^x f(t)[w''(x-t) + cw'(x-t) + kw(x-t)]dt.$$

Karena untuk setiap variabel bebas u dan $w(0) = 0, w'(0) = 1$ maka berlaku

$$w''(u) + cw'(u) + kw(u) = 0,$$

berlaku juga untuk $u = x - t$,

$$w''(x-t) + cw'(x-t) + kw(x-t) = 0.$$

Akibatnya

$$f(x) + \int_0^x f(t)[w''(x-t) + cw'(x-t) + kw(x-t)]dt = f(x).$$

Jadi

$$y_p'' + cy_p' + ky_p = f(x).$$ □

Proposisi 3.1 menunjukan bahwa integral konvolusi yang dinyatakan pada Persamaan (12) memenuhi PDB yang dinyatakan pada Persamaan (1) dengan syarat awal seperti yang dinyatakan pada Persamaan (3). Bukti ini menguatkan terhadap fakta proposisi pada artikel kepustakaan [18]. Oleh karena itu, jika $f(t)$ pada persamaan (7) adalah fungsi bagian demi bagian yang terdefinisi untuk interval, yaitu

$$f(t) = \begin{cases} F_1(t), & \text{jika } 0 \le t < t_1, \\ F_2(t), & \text{jika } t \ge t_1, \end{cases} \tag{13}$$

maka Persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$my_p'' + cy_p' + ky_p = \begin{cases} F_1(t), & \text{jika } 0 \le t < t_1, \\ F_2(t), & \text{jika } t \ge t_1. \end{cases} \tag{14}$$

Dengan menggunakan Proposisi 3.1, maka menurut artikel kepustakaan [6], penyelesaian Persamaan (14) dengan syarat awal $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ dapat dituliskan dengan Persamaan (15) sebagai berikut,

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} F_1(\tau)h(t-\tau)d\tau\,, & \text{jika } 0 \le t < t_1, \\ \int_0^{t_1} F_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} F_2(\tau)h(t-\tau)d\tau, & \text{jika } t \ge t_1. \end{cases} \tag{15}$$

Persamaan (15) mengiterpretasikan bahwa sistem gerak getaran mekasnis pegas dengan sebuah derajat kebebasan dengan syarat awal yang diberikan, seperti dinyatakan dalam Persamaan (3) merupakan sistem gerak getaran pegas dengan pengaruh gaya luar $f(t)$ terdenisi pada suatu interval yang terbagi saat t_i seperti dinyatakan dalam persamaan (14), dengan fungsi respon impulse satuan dari sistem dinyatakan oleh $h(t)$.

Sebagai ilustrasi, pada sistem yang dalam kondisi awal diam $(y(0) = 0,\ y'(0) = 0)$ ada aksi gaya luar $f(t)$ secara tiba-tiba dan konstan setelah waktu tertentu (t_0) dapat dinyatakan dalam Persamaan (16).

$$my'' + cy' + ky = \begin{cases} 0, & \text{jika } 0 \le t < t_0, \\ F_0(t), & \text{jika } t \ge t_0. \end{cases} \tag{16}$$

Sehingga menurut Proposisi 3.1 didapat

$$y(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{17}$$

dengan

$$h(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d t. \tag{18}$$

Parameter pada Persamaan (18), seperti yang telah ditetapkan pada kepustakaan [19] dapat dibentuk dari penyelesaian homogen persamaan (16), yaitu

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \tag{19}$$

dan

$$\omega_n = \frac{c}{2\xi m}, \tag{20}$$

dalam hal ini

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{21}$$

sedemikian sehingga

$$\omega_d^2 mk + \xi^2 k^2 = k^2, \tag{22}$$

dengan ξ merupakan konstanta faktor redaman yang nilainya sebanding dengan koefisien redaman c dan berbanding terbalik dengan akar kuadrat massa m dan konstanta pegas k. Oleh karena itu dengan mensubstitusi persamaan (18) ke (17) untuk $t > \tau$ setelah sistem bekerja karena dampak dari adanya gaya luar yang bekerja pada sistem, didapat

$$y(t) = \int_{t_0}^t F_0 \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_d (t-\tau) d\tau \tag{23}$$

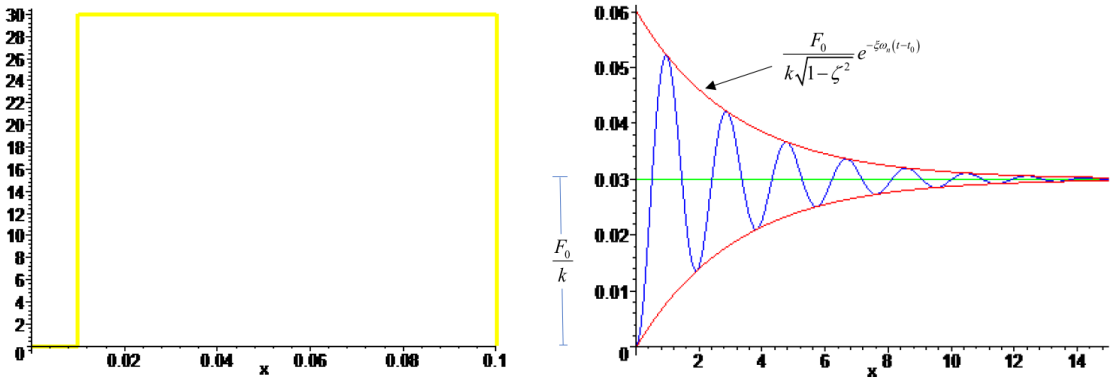
atau

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega t} \int_{t_0}^t e^{\xi\omega_n \tau} \sin\omega_d (t-\tau) d\tau. \tag{24}$$

Dengan menggunakan teknik pengintegralan pada kepustakaan [20] dan persamaan trigonometri pada kepustakaan [21], maka pengintegralan pada Persamaan (24) diperoleh hasil sebagai berikut,

$$y(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n (t-t_0)} \cos[\omega_d (t-t_0) - \delta]\,; \quad t \ge t_0, \tag{25}$$

dengan $\delta = arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$. Jelas bahwa hal ini mensyaratkan $|\xi| < 1$ agar sistem bergerak berada pada kondisi di bawah redaman. Persamaan (25) ini merupakan penyelesaian dari Persamaan (16). Sebagai validasi dari penerapan Proposisi 3.1 yang telah dihasilkan pada penelitian ini, dimisalkan nilai-nilai konstanta pada Persamaan (16) adalah sebagai berikut $m = 10$ kg, $F_0 = 30$ N, $k = 1000$ N/m, dan $c = 20$ Ns/m, maka pada saat $t_0 = 0$, dapat digambarkan grafik $f(t)$ pada Persamaan (16) dan grafik $y(t)$ pada Persamaan (25) seperti tampak pada Gambar 1.



$(a).\, f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 \\ F_0(t), & t \ge t_0 \end{cases}$ $\quad$ $(b).\, y(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \delta]\,;\ t \ge 0$

Gambar 1. (a) grafik $f(t)$ (b) grafik $f(t)$

Terlihat bahwa jika sistem gerak getaran mekenis pegas pada Persamaan (3) dipengaruhi gaya luar $f(t)$ yang merupakan fungsi bagian demi bagian seperti yang dinyatakan oleh Persamaan (16) (Gambar 1 (a)), maka persamaan gerak getaran pegas tersebut dapat diperoleh melalui Persamaan (24) yang merupakan bentuk konvolusi dari Persamaan (17). Dalam hal ini, grafik persamaan $y(t)$ pada Gambar 1 (b) menunjukan bahwa gerak getaran mekanis pegas mengalami pergeseran statis (*static displacement*) sebesar $\frac{F_0}{k}$ dengan penurunan simpang getar untuk setiap waktu t yang dipengarui faktor redaman $\xi < 1$ adalah sebesar $\frac{F_0}{k\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n(t-t_0)}$.

4. Kesimpulan

Diperoleh suatu fakta seperti yang dinyatakan pada Proposisi 3.1, bahwa bilamana suatu persamaan diferensial biasa linier koefisien konstan yang tak homogen seperti pada Persamaan (1) dan memenuhi syarat $y(0) = 0, y'(0) = 0$ dengan $f(t)$ adalah fungsi bagian demi bagian yang terdefinisi pada suatu interval terbatas, maka penyelesaian partikular dari persamaan diferensial tersebut adalah suatu konvolusi antara $f(t)$ dan $w(t)$,

dengan $w(t) = h(t)$ adalah fungsi respon impulse satuan dari sistem. Sedemikian sehingga penyelesaian partikular $y_p(t)$ sekaligus merupakan penyelesaian khusus persamaan (1) dan ditulis sebagai sebuah konvolusi, yaitu $y(t) = (f * h)(t)$.

Daftar Pustaka

[1] W.-C. Xie, "Applications of linear differential equations," *Differ. Equations Eng.*, pp. 188–243, 2012. [CrossRef]

[2] J. R. Chasnov, "Differential Equations Adapted for Coursera: Differential Equations for Engineers, Lecture Notes for Coursera," p. 149, Copyright © 2019-2022. [GreenVersion]

[3] S. V Sangeetha, R. Mrithula, S. H. Priya, V. G. Preetha, and S. K. Arts, "Application of differential equation in simple harmonic motion," vol. 4, no. 2, pp. 353–356, 2019. [GreenVersion]

[4] A. N. Hadi, E. Djauhari, A. K. Supriatna, and M. D. Johansyah, "Teknik penentuan solusi sistem persamaan diferensial linear non-homogen orde satu," *Matematika*, vol. 18, no. 1, pp. 29–40, 2019. [CrossRef]

[5] M. A. Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, "Menyelesaikan persamaan diferensial linier orde-*n* non homogen dengan fungsi green." Prosiding Seminar Nasional Metoda Kuantitatif, ISBN No. 978-602-98559-3-7, 2017. [CrossRef]

[6] G. Gunawan, "Prinsip Duhamel dan teorema konvolusi." Prosiding Seminar Nasional Matematika. UNPAR, AA 10-15, ISSN 1907-3909 Vol. 7. 2012.

[7] M. Z. Muis Alie, I. M. Suci, A. Rajmi, and A. M. A. Arafat, "Sistem respon satu derajat kebebasan terhadap beban harmonik pada struktur portal 2D," *J. Penelit. Enj.*, vol. 23, no. 2, pp. 136–140, 2019. [CrossRef]

[8] S. Saran, "Theory of vibrations," *Dyn. Soils Their Eng. Appl.*, pp. 15–68, 2021, doi: 10.1201/9781003080039-2. [CrossRef]

[9] M. R. Aulia, "Osilasi teredam pada pegas dengan medium fluida," *J. Teach. Learn. Phys.*, vol. 3, no. 1, pp. 22–26, 2018. [CrossRef]

[10] D. Goutaudier *et al.*, "Impulse identification technique by estimating specific modal ponderations from vibration measurements," *Journal of Sound and Vibration*, 474 (115263), pp.1-20, 2020. [GreenVersion]

[11] S. S. Law and J. F. Lin, "Unit impulse response estimation for structural damage detection under planar multiple excitations," *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 81, no. 2, 2014. [CrossRef]

[12] A. C. Kemp and R. J. Telford, "Transfer functions," *Handb. Sea-Level Res.*, pp. 470–499, 2015, doi: 10.1002/9781118452547.ch31.

[13] J. W. Kirchner, "Impulse response functions for nonlinear, nonstationary, and heterogeneous systems, estimated by deconvolution and demixing of noisy time series," *Sensors*, vol. 22, no. 9, 2022. [CrossRef]

[14] N. Fusco, P. Marcellini, and C. Sbordone, "Ordinary Differential Equations," *UNITEXT - La Mat. per 3 piu 2*, vol. 137, pp. 187–235, 2022, doi: 10.1007/978-3-031-04151-8_4.

[15] A. E. Hamza and M. H. Al-Ashwal, "Leibniz's rule and Fubini's theorem associated with power quantum difference operators," *Int. J. Math. Anal.*, vol. 9, no. 53–56, pp. 2733–2747, 2015. [GreenVersion]

[16] H. Hernandez, "Leibniz's rule and other properties of integrals of randomistic variables," *ForsChem Res. Reports*, vol. 4, no. 8, pp. 1–15, 2019. [GreenVersion]

[17] P. Haile, "Differentiating an Integral," pp. 1–2, 2018. [GreenVersion]

[18] G. Gunawan, "Penerapan konvolusi pada persamaan diferensial linier orde dua tak homogen koefisien konstan," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 15, no. 3, pp. 409–416, 2021. [CrossRef]

[19] O. S. Manakova, M. A. Mayorov, and A. V. Sidorov, "Vibrations in engineering systems," *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 666, no. 1, 2019. [CrossRef]

[20] M. Jandja and M. Lutfi, "The five columns rule in solving definite integration by parts through transformation of integral limits," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1028, no. 1, 2018. [CrossRef]

[21] I. Andreev, I. Georgiev, and M. Varbanova, "One approach for solving trigonometric equations using complex in the mathematical education," *TEM J.*, vol. 8, no. 4, pp. 1339–1344, 2019. [CrossRef]