MIMS Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 24 (2), 2024, 85 – 98
eISSN 2722-9886 pISSN 1411-6669
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap

(Diagonalization of matrices over ring with splitting completely method)

Nikita, Ari Suparwanto*, Sutopo

Universitas Gadjah Mada, Sleman, Yogyakarta

korespondensi: ari_suparwanto@ugm.ac.id

Received: 12-12-2022, accepted: 02-09-2024

Abstract

Generally, discussion about diagonalization of matrices in linear algebra is a matrix over the field. This research presents the diagonalization of matrices over commutative rings. Previous studies have explained the diagonalization of the matrix over a commutative ring, but there are some shortcomings in it. Therefore, this paper will present a matrix diagonalization process that could overcome these shortcomings. This research proposes a method for diagonalization matrices where the characteristic polynomial splits completely over the image of a ring homomorphism. Furthermore, the diagonalization is done over ring localization, so that there are more commutative ring matrices which can be diagonalized in this way. Meanwhile, the sufficient condition for a matrix which can be diagonalized in this thesis is when the determinant of the matrix whose columns are the eigenvectors is regular. Furthermore, to show this diagonalization method applies in general, given a special matrix $n \times n$ which satisfies the sufficient condition.

Keywords: Matrices, diagonalization, eigenvector, determinant, localization
MSC2020: 15A09, 15A18, 15A20,13B05,13B20

1. Pendahuluan

Pada umumnya diskusi mengenai diagonalisasi matriks, merupakan proses diagonalisasi pada matriks yang elemen-elemennya merupakan bilangaan real atau kompleks, hal ini dapat dilihat pada [2,6,10,11,15]. Namun, pada penelitian ini akan dipaparkan tentang diagonalisasi matriks atas ring, yaitu matriks yang elemen-elemennya merupakan anggota dari suatu ring komutatif [1].

Dalam penelitiannya [7,16] menyatakan bahwa polinomial monik dengan satu variabel yang koefisien-koefisiennya merupakan anggota dari suatu ring komutatif, dapat difaktorkan secara lengkap di suatu ring komutatif yang merupakan bayangan homomorfis dari ring tersebut. Karena, polinomial karakteristik dari matriks atas ring merupakan polinomial monik dengan satu variabel yang koefisien-koefisiennya merupakan anggota dari ring, maka polinomial karakteristik dari matriks atas ring dapat difaktorkan secara lengkap di bayangan homomorfis dari ring tersebut. Akar-akar dari polinomial karakteristik yang telah difaktorkan secara lengkap kemudian dapat disebut sebagai nilai eigen dari matriks atas ring tersebut. Karena penentuan nilai eigen matriks atas ring menggunakan pemfaktoran secara lengkap dilakukan pada bayangan homomorfis dari ring tersebut, maka nilai eigen dapat diperoleh dengan cara pemfaktoran secara lengkap. Penelitian lain mengenai pemfaktoran secara lengkap sendiri dapat dilihat pada [8,9,13,14].

Lebih lanjut, pada [2] dinyatakan bahwa suatu matriks M atas ring A invertible jika determinan dari matriks tersebut merupkan elemen yang memiliki invers di A. Oleh karena itu, untuk memperluas cakupan dari matriks yang dapat didiagonalisasi, pada penelitian ini diagonalisasi matriks atas ring dilakukan atas lokalisasi dari ring, sehingga pada penelitian ini matriks M atas ring A invertible, jika determinan dari matrik Mmerupakan elemen reguler di A. Pembahasan mengenai lokalisasi ring kemudian dapat dilihat pada [3,4,12,17].

Pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa syarat cukup suatu matriks M atas ring A dapat didiagonalisasi menggunakan metode pemfaktoran secara lengkap, yaitu ketika determinan dari matriks yang setiap vektor kolomnya merupakan vektor eigen dari M adalah elemen reguler. Lebih lanjut akan dijelaskan proses diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap menggunaka contoh-contoh yang mudah dipahami.

2. Metodologi

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yang bersifat teoritis dengan mengkaji topik penelitian terkait diagonalisasi matriks atas ring. Langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini adalah dengan mengkaji tentang matriks diagonal dan matriks kofaktor pada matriks atas ring, serta sifatnya yang kemudian dikaitkan dengan pemfaktoran secara lengkap, sehingga akan diperoleh syarat cukup suatu matriks atas ring dapat didiagonalisasi dengan metode pemfaktoran secara lengkap.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, akan diberikan definisi dan sifat dari matriks atas ring, serta definisi dari pemfaktoran secara lengkap, dan kemudian akan jelaskan proses diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap.

3.1 Matriks atas Ring

Definisi dan notasi dari matriks diagonal atas ring, yaitu jika diberikan A ring komutatif dengan elemen identitas dan $M(a_{pq})$ merupakan matriks atas A dengan $a_1, \dots, a_n \in A$, maka matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya $a_1, \dots, a_n$ dinotasikan dengan $diag(a_1, \cdots, a_n)$. Selanjutnya, matriks identitas atas ring dinotasikan $I_n =$

$diag(1,\dots,1) = (\delta_{pq})$, dengan $\delta_{pq} = 1$ ketika $p = q$ dan $\delta_{pq} = 0$ ketika $p \neq q$. Adapun, konsep-konsep dasar pada matriks atas ring sama halnya dengan matriks atas lapangan. Selanjutnya akan diberikan definisi dari matriks kofaktor, serta hubungan dari matriks kofaktor dan matriks invertible pada matriks atas ring.

Definisi 3.1 Diberikan A ring komutatif dengan elemen identitas dan $M(a_{pq})$ merupakan matriks $n \times n$ yang entri-entrinya anggota A. Jika determinan matriks $(n-1) \times (n-1)$ setelah baris ke-q dan kolom ke-p dicoret dari M, dinyatakan dengan $(-1)^{p+q} a_{pq}^c$ maka matriks $n \times n$ yang entri-entrinya a_{pq}^c dinyatakan dengan

$$M^c = \left(a_{pq}^c\right) = \begin{pmatrix} a_{11}c & \cdots & a_{1n}c \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1}c & \cdots & a_{nn}c \end{pmatrix}.$$

Lebih lanjut, matriks M^c disebut matriks kofaktor atau matriks adjoin dari M. Karena M^c merupakan matriks adjoin dari M, dan konsep determinan pada matriks atas ring sama halnya dengan matriks atas lapangan, sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$MM^c = det(M)\, I_n = M^c M. \qquad (3.1)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (3.1) diperoleh bahwa jika $det(M)$ reguler di A, maka matriks M memiliki invers, yaitu

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} M^c$$

dengan elemen-elemen M^{-1} merupakan anggota dari lokalisasi ring A yang dinotasikan dengan $A\left[\frac{1}{det(M)}\right]$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa jika $det(M)$ reguler di A maka M memiliki invers di $A\left[\frac{1}{det(M)}\right]$.

3.2 Diagonalisasi Matriks atas Ring

Penelitian ini akan membahas mengenai diagonalisasi matriks atas ring dengan cara memfaktorkan polinomial karakteristik dari suatu matriks atas ring dengan memanfaatkan bayangan homomorfis dari ring tersebut. Oleh karena itu, berikut diberikan definisi pemfaktoran secara lengkap atas homomorfisma ring.

Definisi 3.2 Diberikan A ring komutatif dengan elemen identitas, B ring komutatif, $\varphi: A \to B$ homomorfisma ring dan $B[T]$ menyatakan himpunan polinomial monik dalam variabel T yang koefisien-koefisiennya merupakan anggota B. Suatu polinomial monik

$$p(T) = T^n - p_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n p_n$$

di $A[T]$ dikatakan dapat difaktorkan secara lengkap atas φ, jika

$$(\varphi p)(T) = T^n - \varphi(p_1) T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \varphi(p_n) = (T - \rho_1) \cdots (T - \rho_n)$$

dengan $\rho_1, \cdots, \rho_n \in B$. Secara ringkas dapat ditulis

$$p(T) = T^n - p_1T^{n-1} + \cdots + (-1)^n p_n = (T - \rho_1)\cdots(T - \rho_n).$$

Selanjutnya, diberikan definisi diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap atas homomorfisma ring berikut.

Definisi 3.3 Diberikan A ring komutatif dengan elemen identitas, B ring komutatif, dan $\varphi: A \to B$ homomorfisma ring. Suatu matriks $M = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ yang setiap elemennya anggota A, dikatakan dapat didiagonalisasis atas homomorfisma φ, jika terdapat matriks invertible N berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen di N merupakan anggota B, sehingga

$$N^{-1}\varphi(M)(N) = N^{-1}\varphi((a_{ij}))N$$

merupakan matriks diagonal. Secara ringkas dapat ditulis

$$N^{-1}MN = N^{-1}\varphi\left(\left(a_{ij}\right)\right)N.$$

Selanjutnya akan diberikan definisi dan notasi dari sifat-sifat matriks atas ring yang akan digunakan dalam proses diagonlisasi. Pertama didefinisiskan suatu matriks atas ring $M(T)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M(T) &= M - TI_n \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - T & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(T)_{11} & \cdots & a(T)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a(T)_{n1} & \cdots & a(T)_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya polinomial karakteristik dari matriks M atas ring A, didefinisikan sebagai berikut:

$$p_M(T) = (-1)^n \, det\big(M(T)\big),$$

dengan $p_M(T) \in A[T]$. Adapun, matriks kofaktor dari matriks $M(T)$ dinotasikan sebagai berikut:

$$M(T)^c = \begin{pmatrix} a(T)^c{}_{11} & \cdots & a(T)^c{}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a(T)^c{}_{n1} & \cdots & a(T)^c{}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, pada proposisi berikut akan diberikan hubungan antara matriks kofaktor dari $M(T)$ dengan determinan dari matrik $M(T)$.

Proposisi 3.1 Diberikan A ring komutatif dengan elemen identitas, $M = (a_{ij})$ merupakan matriks berukuran $n \times n$ yang setiap elemennya anggota A, dan $M(T)^c$ merupakan matriks kofaktor dari M. Jika $\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix}$ merupakan vektor kolom ke-q dari matriks $M(T)^c$, maka

$$M\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} = \det\big(M(T)\big)\begin{pmatrix} \delta_{1q} \\ \vdots \\ \delta_{nq} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix}.$$

Bukti. Perhatikan bahwa $M = M(T) + TI_n$, Sehingga berdasarkan Persamaan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} &= (M(T)+TI_n)\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} = M(T)\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} + TI_n\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(T)_{11} & \cdots & a(T)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(T)_{n1} & \cdots & a(T)_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} \\ &= det(M(T))\begin{pmatrix} \delta_{1q} \\ \vdots \\ \delta_{nq} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a(T)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(T)^c_{nq} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dengan $\delta_{pq} = 1$ ketika $p = q$ dan $\delta_{pq} = 0$ ketika $p \neq q$ untuk setiap $p = 1, \dots, n$. □

Selanjutnya, pada teorema berikut diberikan syarat cukup suatu matriks dapat didiagonalisasi menggunakan pemfaktoran secara lengkap atas homomorfisma ring.

Teorema 3.2 Diberikan A ring komutatif dengan elemen satuan, B ring komutatif, $\varphi: A \to B$ homomorfisma ring, dan M merupakan matriks yang elemen-elemennya anggota di A, dengan

$$M(T)^c(\rho_1. \cdots, \rho_n) = \begin{pmatrix} a(\rho_1)^c{}_{11} & \cdots & a(\rho_2)^c{}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a(\rho_3)^c{}_{n1} & \cdots & a(\rho_n)^c{}_{nn} \end{pmatrix}$$

(i) Jika polinomial karakteristik dari matriks M dapat difaktorkan secara lengkap atas homomorfisma φ, yaitu

$$p_M(T) = (T-\rho_1)\cdots(T-\rho_n)$$

dengan $\rho_1. \cdots, \rho_n \in B$, maka

$$M\, M(T)^c(\rho_1. \cdots, \rho_n) = M(T)^c(\rho_1. \cdots, \rho_n) diag(\rho_1. \cdots, \rho_n \quad (3.2)$$

(ii) Jika $d = \det(M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n))$ reguler di B, maka matriks M dapat didiagonalisasi atas $B\left[\frac{1}{d}\right]$ dan

$$\left(M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)\right)^{-1} M M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n) = diag\ (\rho_1,\dots,\rho_n).$$

Bukti.

(i) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} MM(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n) &= M\begin{pmatrix} a(T)^c{}_{11} & \cdots & a(T)^c{}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a(T)^c{}_{n1} & \cdots & a(T)^c{}_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \left(M\begin{pmatrix} a(\rho_1)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(\rho_1)^c_{nq} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad M\begin{pmatrix} a(\rho_n)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(\rho_n)^c_{nq} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned} &MM(T)^c(\rho_1,\cdots,\rho_n) \\ &= \left(det(M(\rho_1))\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} a(\rho_1)^c_{11} \\ \vdots \\ a(T)^c_{n1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad det(M(\rho_n))\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_n \begin{pmatrix} a(\rho_n)^c_{1n} \\ \vdots \\ a(\rho_n)^c_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} det(M(\rho_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(M(\rho_n)) \end{pmatrix} + \left(\rho_1 \begin{pmatrix} a(\rho_1)^c_{11} \\ \vdots \\ a(\rho_1)^c_{n1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \rho_n \begin{pmatrix} a(\rho_n)^c_{1n} \\ \vdots \\ a(\rho_n)^c_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} det(M(\rho_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(M(\rho_n)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(\rho_1)^c_{11} & \cdots & a(\rho_n)^c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\rho_1)^c_{n1} & \cdots & a(\rho_n)^c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} det(M(\rho_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(M(\rho_n)) \end{pmatrix} + M(T)^c(\rho_1,\cdots,\rho_n)diag(\rho_1,\cdots,\rho_n). \end{aligned}$$

Karena $\det\left(M(\rho_1)\right) = \cdots = \det\left(M(\rho_n)\right) = 0$, maka diperoleh

$$M\ M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n) = M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)diag(\rho_1.\cdots,\rho_n).$$

(ii) Diketahui bahwa d elemen reguler di B, berarti dapat dibentuk lokalisasi ring B atas d yang dinotasikan dengan $B\left[\frac{1}{d}\right]$. Karena $\det(M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n))$ reguler di B, maka terdapat $\left(M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)\right)^{-1}$ yang elemen-elemennya anggota $B\left[\frac{1}{d}\right]$. Oleh karena itu, dengan mengalikan matriks tersebut dari kiri ke Persamaan (3.2) diperoleh

$$\left(M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)\right)^{-1}MM(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)=diag\,(\rho_1,\dots,\rho_n).\square$$

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 3.3 Kolom-kolom $M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)$ merupakan vektor eigen dari matriks M yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\rho_1,\cdots,\rho_n$.

Bukti. Berdasarkan Proposisi 3.1 diperoleh

$$M\begin{pmatrix} a(\rho_q)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(\rho_q)^c_{nq} \end{pmatrix} = det(M(\rho_q))\begin{pmatrix} \delta_{1q} \\ \vdots \\ \delta_{nq} \end{pmatrix} + \rho_q\begin{pmatrix} a(\rho_q)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(\rho_q)^c_{nq} \end{pmatrix}$$
$$= \rho_q\begin{pmatrix} a(\rho_q)^c_{1q} \\ \vdots \\ a(\rho_q)^c_{nq} \end{pmatrix}.$$

Terbukti bahwa vektor kolom ke-q dari $M(T)^c(\rho_1.\cdots,\rho_n)$ merupakan vektor eigen dari matriks M yang berkorespondensi dengan nilai eigen ρ_q. $\square$

Selanjutnya, untuk memahami proses diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap, maka akan diberikan contoh diagonalisasi matriks atas ring sebagai berikut.

Contoh 3.1 Diberikan $A=\mathbb{Z}[X]$ dan matriks M yang elemen-elemennya anggota di A dengan

$$M=\begin{pmatrix} 1-x & x^3-2 \\ 1+x^2 & 4-x+x^2 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh

$$M(T)=\begin{pmatrix} (1-x)-T & x^3-2 \\ 1+x^2 & (4-x+x^2)-T \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} p_M(T) &= ((1-x)-T)((4-x+x^2)-T)-(1+x^2)(x^3-2) \\ &= T^2-(5-2x+x^2)T+(4-5x+2x^2)+2-2x^2-x^3+x^5 \\ &= T^2-(5-2x+x^2)T+6-5x-x^3+x^5 \end{aligned}$$

dengan

$$M(T)^c=\begin{pmatrix} (4-x+x^2)-T & 2-x^2 \\ -1-x^2 & (1-x)-T \end{pmatrix}.$$

Dibentuk pemetaan $\varphi:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}$, yaitu apabila diambil sebarang $q\in\mathbb{Z}[X]$ dengan $q(x)=e_0+e_1x+e_2x^2+\cdots+e_nx^n$ untuk setiap $e_0,\cdots,e_n\in\mathbb{Z}$, didefinisikan

$$\varphi \quad : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$$

$$q(x) \mapsto \varphi(e_0 + e_1 x + \cdots + e_n x^n) = e_0.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $q, r \in \mathbb{Z}[X]$ dengan $q(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n$ dan $r(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^m$ dengan $e_0, \cdots, e_n, f_0, \cdots, f_m \in \mathbb{Z}$, belaku

$$\begin{aligned}
\varphi(q(x) + r(x)) &= \varphi((e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n) + (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_m x^m)) \\
&= \varphi((e_0 + f_0) + (e_1 + f_1)x + \cdots + e_n x^n + f_m x^m) \\
&= e_0 + f_0 \\
&= \varphi(q(x)) + \varphi(r(x))
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\varphi(q(x)r(x)) &= \varphi((e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n)(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_m x^m)) \\
&= \varphi((e_0 f_0) + (e_0 f_1 + e_1 f_0)x + (e_0 f_2 + e_2 f_0 + e_1 f_1)x^2 + \cdots + (e_n f_m)x^{n+m}) \\
&= e_0 f_0 \\
&= \varphi(q(x))\varphi(r(x)).
\end{aligned}$$

Dengan demikan diperoleh bahwa φ merupakan homomorfisma ring, sehingga polinomial karakteristik $p_M(T)$ di $A[T]$ dapat difaktorkan secara lengkap atasφ, yaitu

$$\begin{aligned}
p_M(T) &= T^2 - \varphi(5 - 2x + x^2)T + \varphi(6 - 5x - x^3 + x^5) \\
&= T^2 - 5T + 6 \\
&= (T - 2)(T - 3)
\end{aligned}$$

dengan $2,3 \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, dengan memetakan detiap elemen M atas φ diperoleh

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

dan

$$M(T)^c(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh $\det\big(M(T)^c(2,3)\big) = -2$. Jelas bahwa -2 merupakan elemen reguler di $\mathbb{Z}$. Diketahui bahwa -2 tidak memiliki elemen invers di $\mathbb{Z}$, namun karena -2 merupakan elemen reguler di $\mathbb{Z}$, maka dapat dilakukan lokalisasi pada ring $\mathbb{Z}$. Diberikan $T = \{1, -2, 4, -8, \dots\}$. Jelas bahwa T tertutup terhadap perkalian, sehingga dapat dibentuk lokalisasi $\mathbb{Z}$ atas T, yaitu

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{(-2)}\right] = \left\{\frac{a}{(-2)^n} \middle| \, a \in \mathbb{Z}, (-2)^n \in T\right\}$$

untuk n bilangan asli. PErhatikan bahwa terdapat $\frac{-2}{4} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{(-2)}\right]$ sehingga $\frac{-2}{4}(-2) = 1$. Karena $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\left[\frac{1}{(-2)}\right]$, diperoleh invers dari matriks $M(T)^c(2,3)$ atas $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{(-2)}\right]$

$$M(T)^c(2,3)^{-1} = \frac{-2}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, diperoleh diagonalisasi matriks M atas ring $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{(-2)}\right]$ berikut

$$\begin{aligned} M(T)^c(2,3)^{-1}M\, M(T)^c(2,3) & \quad \frac{-2}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= diag(2,3). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa jika dipilih urutan faktor yang berbeda diperoleh

$$M(T)^c(3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

dengan $\det\left(M(T)^c(3,2)\right) = 1$, sehingga diperoleh

$$M(T)^c(3,2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} M(T)^c(3,2)^{-1}M\, M(T)^c(3,2) &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= diag(3,2). \end{aligned}$$

Contoh 3.2 Diberikan $A = \mathbb{Z}$ dan $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dengan elemen-elemen di M merupakan anggota A. Diperoleh

$$M(T) = \begin{pmatrix} 3 - T & 5 \\ 1 & 4 - T \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} p_M(T) &= (-1)^2 det(M(T)) \\ &= (3 - T)(4 - T) - 5 \\ &= T^2 - 7T + 7 \end{aligned}$$

dan

$$M(T)^c = \begin{pmatrix} 4 - T & -5 \\ -1 & 3 - T \end{pmatrix}.$$

Dibentuk pemetaan $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x \ (mod\ 5) = \bar{x}$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Jelas bahwa φ merupakan homomorfisma ring, sehingga polinomial karakteristik $p_M(T)$ di $A[T]$ dapat difaktorkan secara lengkap atas φ, yaitu

$$\begin{aligned} p_M(T) &= T^2 + \varphi(-7)T + \varphi(7) \\ &= T^2 + \bar{3}T + \bar{2} \\ &= (T - \bar{4})(T - \bar{3}) \end{aligned}$$

dengan $\bar{4}, \bar{3} \in \mathbb{Z}_5$. Selanjutnya, dengan memetakan setiap elemen di M pada φ diperoleh

$$M = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix}$$

dan

$$M(T)^c(\bar{3}, \bar{4}) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix}.$$

Sehingga, diperoleh $\det\left(M(T)^c(\bar{3}, \bar{4})\right) = \bar{4}$. Jelas bahwa $\bar{4}$ reguler di $\mathbb{Z}_5$. Kemudian akan ditentukan invers dari $\bar{4}$ dengan melakukan lokalisasi. Diberikan $T\{\bar{4}, \bar{1}\}$, jelas bahwa T tertutup terhadap perkalian dan tidak memuat pembagi nol di $\mathbb{Z}_5$, sehingga dapat dibentuk lokalisasi $\mathbb{Z}_5$ atas T

$$\mathbb{Z}_5\left[\frac{\bar{1}}{\bar{4}}\right] = \left\{\frac{\bar{0}}{\bar{4}}, \frac{\bar{1}}{\bar{4}}, \frac{\bar{2}}{\bar{4}}, \frac{\bar{3}}{\bar{4}}, \frac{\bar{4}}{\bar{4}}, \frac{\bar{0}}{\bar{1}}, \frac{\bar{1}}{\bar{1}}, \frac{\bar{2}}{\bar{1}}, \frac{\bar{3}}{\bar{1}}, \frac{\bar{4}}{\bar{1}}\right\}.$$

Karena $\mathbb{Z}_5$ lapangan, maka jelas bahwa $\bar{4}$ memiliki invers di $\mathbb{Z}_5$, dengan $(\bar{4})^{-1} = \bar{4}$. Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_5\left[\frac{\bar{1}}{\bar{4}}\right] &= \{\bar{0}(\bar{4}), \bar{1}(\bar{4}), \bar{2}(\bar{4}), \bar{3}(\bar{4}), \bar{4}(\bar{4}), \bar{0}(\bar{1}), \bar{1}(\bar{1}), \bar{2}(\bar{1}), \bar{3}(\bar{1}), \bar{4}(\bar{1})\} \\ &= \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \\ &= \mathbb{Z}_5. \end{aligned}$$

Selanjutnya, karena $\mathbb{Z}_5\left[\frac{\bar{1}}{\bar{4}}\right] = \mathbb{Z}_5$ maka didapatkan invers dari matriks $M(T)^c(\bar{3}, \bar{4})$ atas $\mathbb{Z}_5$ berikut

$$M(T)^c(\bar{3}, \bar{4})^{-1} = (\bar{4})^{-1}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{4}\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh diagonalisasi matriks M atas $\mathbb{Z}_5$ berikut.

$$\begin{aligned} M(T)^c(\bar{3}, \bar{4})^{-1} M\, M(T)^c(\bar{3}, \bar{4}) &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ 0 & \bar{4} \end{pmatrix} \\ &= diag(\bar{3}, \bar{4}). \end{aligned}$$

Berdasarkan Contoh 3.2 dapat disimpulkan bahwa, jika dalam proses pemfaktoran secara lengkap atas homomorfisma φ dilakukan dengan memetakan ring A ke suatu lapangan, maka proses lokalisasi tidak perlu dilakukan.

Selanjutnya perhatikan bahwa, jika dipilih urutan faktor yang berbeda di $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut.

$$M(T)^c(\bar{4},\bar{3}) = \begin{pmatrix} \bar{4}-\bar{4} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{3}-\bar{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa denngan urutan faktor yang berbeda diperoleh $\det\big(M(T)^c(\bar{4},\bar{3})\big) = 0$. Berarti, $\det\big(M(T)^c(\bar{4},\bar{3})\big)$ bukan elemen reguler di $\mathbb{Z}_5$. Dengan kata lain $M(T)^c(\bar{4},\bar{3})$ tidak invertible dan M tidak dapat didiagonalisasi. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa urutan dari faktor-faktor dari polinomial karakteristik matriks M atas ring A setelah dilakukan pemfaktoran secara lengkap atas φ mempengaruhi proses diagonalisasi. Dapat dilihat bahwa urutan faktor ρ_1 dan ρ_2 yang dipilih dapat menyebabkan $\det(M(T)^c(\rho_1,\rho_2))$ tidak reguler di A. Akibatnya M tidak dapat didiagonalisasi. Terkait hal ini berikut diberikan contoh yang berlaku secara umum untuk $\rho_1,\cdots,\rho_n$ pada matriks diagonal.

Contoh 3.3 Diberikan M matriks diagonal dengan

$$M = diag(a_1,\cdots,a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Diperoleh

$$M(T) = diag(a_1 - T,\cdots,a_n - T) = \begin{pmatrix} a_1 - T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - T \end{pmatrix}$$

dan

$$M(T)^c = \begin{pmatrix} (a_2 - T)\cdots(a_n - T) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_1 - T)(a_3 - T)\cdots(a_n - T) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_1 - T)\cdots(a_{n-1} - T) \end{pmatrix}$$

$$= diag\left(\textstyle\prod_{i\neq 1}(a_i - T),\cdots,\prod_{i\neq n}(a_i - T)\right).$$

Jika diasumsikan $p_M(T)$ dapat difaktorkan secara lengkap atas φ dengan

$$p_M(T) = (T - \rho_1)\cdots(T - \rho_n),$$

maka diperoleh

$$M(T)^c(\rho_1,\cdots,\rho_n)$$
$$=\begin{pmatrix} (a_2-\rho_1)\cdots(a_n-\rho_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_1-\rho_2)(a_3-\rho_2)\cdots(a_n-\rho_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_1-\rho_n)\cdots(a_{n-1}-\rho_n) \end{pmatrix}$$

$$= diag\left(\prod_{i\neq 1}(a_i-\rho_1),\cdots,\prod_{i\neq n}(a_i-\rho_n)\right).$$

Perhatikan bahwa, jika dipilih $\rho_i = a_i$ untuk $i = 1,\cdots,n$ diperoleh

$$\det\big(M(T)^c(\rho_1,\cdots,\rho_n)\big) = \prod_{i\neq j}\big(\rho_i-\rho_j\big).$$

Sedangkan,

$$\det\big(M(T)^c(\rho_2,\cdots,\rho_n)\big) = \prod_{i\neq j}\big(\rho_i-\rho_j\big) = 0.$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk maktrik yang urutan faktornya $\rho_1,\cdots,\rho_n$ memiliki invers dan dapat dilakukan diagonalisasi. Dilain pihak untuk matriks yang urutan faktornya $\rho_2,\rho_1,\cdots,\rho_n$ diperoleh determinan matriksnya bernilai nol. Dengan kata lain, matriks tersebut tidak dapat didiagionalisasi. Berdasarkan Contoh 3.3 jelas dapat dilihat bahwa urutan dari faktor-faktor yang dipilih mempengaruhi bisa tidaknya suatu matrikk atas ring dapat didiagonalisasi dengan metode pemfaktoran secara lengkap.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa:

(1) Syarat cukup suatu matriks M atas ring A dengan metode pemfaktoran secara lengkap dapat didiagonalisasi adalah ketika determinan matriks kofaktor dari M setelah dilakukan pemfaktoran secara lengkap merupakan elemen reguler.

(2) Proses lokalisasi dalam mendiagonalisasi suatu matriks atas ring hanya dilakukan pada matriks atas ring, yang tidak semua anggota dari ring tersebut memiliki elemen invers terhadap perkalian.

(3) Dalam proses diagonalisasi matriks atas ring dengan metode pemfaktoran secara lengkap, diperoleh bahwa urutan dari faktor-faktor yang didapatkan dari proses pemfaktoran secara lengkap mempengaruhi bisa tidaknya suatu matriks atas ring dapat didiagonalisasi.

Daftar Pustaka

[1] B. McDonald, *Linear Algebra over Commutative Rings*, CRC Press, Boca Raton, 1984.

[2] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1971.

[3] J. Brewer, D. Costa, E. Lady, "Prime ideals and localization in commutative group rings", *Journal of Algebra*, vol. 34, pp. 300-308, 1975. [CrossRef]

[4] W.A. Adkins, S.H. Weintrub, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992. [InternetArchive]

[5] W.C. Brown, *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.

[6] G.J. Olsder, *Mathematical System Theory*, Delfse Uitgevers Maatschappij, Netherlands, 1994.

[7] T. Ekedahl, D. Laksov, "Splitting algebra, symmetric function, and galois theory", *Journal of Algebra and Its Application*, 2002. [arXiv]

[8] D. Laksov, "Splitting algebra and Gysin homomorphisms", *Journal of Commutative Algebra*, vol. 2, No. 3, pp. 401-425, 2010. [CrossRef]

[9] D. Laksov, "Spilitting algebra and Gysin homomorphism", 2009. [GreenVersion]

[10] F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Result and Tecniques* 2^{nd} *Edition*, Springer, New York, 2010. [InternetArchive]

[11] A. Jeffrey, *Matrix Operations for Enginers and Scientists*, Springer, New York, 2010.

[12] C. Braun, J. Chuang, A. Lazarev, "Derived localisation of algebras and modules", *Advance in Mathematics*, vol. 328, pp. 555-622, 2018. [arXiv]

[13] D. Laksov, "A relation between symmetric polynomial and the algebra of classes, motivated by equivariant Schubert calculus", *Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometri*, pp 89-97, 2011. [CrossRef]

[14] D. Laksov, A. Thorup, "Splitting algebra and Schubert calculus", *Indiana University Mathemarics Journal*, 2012. [CrossRef]

[15] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra* 11^{th} *edition*, Jhon Wiley & Sons, New York, 2013. [GreenVersion]

[16] D. Laksov, "Diagonalization of matrices over rings", *Journal of Algebra*, vol. 376, pp. 123-138, 2013. [CrossRef]

[17] A. Jabba, N. Hasan, “Some result concerning localization of commutative rings and modules”, *International Journal of Algebra*, vol. 9, pp. 403-412, 2015. [GreenVersion]