MIMS Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika 23 (1), 2023, 15 – 26
eISSN 2722-9886 pISSN 1411-6669
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Modifikasi metode iterasi berorde tiga dengan orde konvergensi optimal

The modification of the third-order iterative method with an optimal order of convergence

Annisa Agustina, Wartono*

Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jalan H.R. Subrantas km 15,5 Pekanbaru

*korespondensi: wartono@uin-suska.ac.id

Received: 12-09-2022, accepted: 06-03-2023

Abstract

Weerakoon-Fernando's and Homeier's methods are a third-order iterative method to solve nonlinear equations. A new third-order iterative method is constructed by sum of Weerakoon-Fernandon's and Homeier's methods. This paper discusses the modification of the third-order iterative method using contra harmonic mean with involving one real parameter θ. The aim of this modification is to improve the convergence order of the method and keep the number of functional evaluations. Based on the result of study shows that the method has a third-order of convergence for $\theta \neq 4$ and a fourth-order of convergence for $\theta = 4$ with three evaluation of functions. Furthermore, numerical simulation is given to exam the perfomance of the methods. The measurement of performance of the methods, such as: number of iterations, number of functional evaluations, numerical convergence order, and value of function, are compared with Newton's, Weerakoon-Fernando's, and Homeier's methods. Generally, the result of numerical simulation shows that the new method for $\theta = 4$ has better performance than others.

Keywords: Weerakoon-Fernando's method, Homeier's method, order of convergence, contra harmonic mean, evaluation of function

MSC2020: 41A25, 41A58, 65H05

1. Pendahuluan

Persamaan nonlinier merepresentasikan ungkapan matematis yang berasal dari persoalan-persoalan sains, teknik dan rekayasa. Sebagian besar persamaan nonlinear tersebut melibatkan ungkapan-ungkapan matematis yang rumit dan kompleks, sehingga sulit ditentukan penyelesaian eksaknya dalam bentuk

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

dengan $f: D \subset R \to R$ adalah fungsi skalar di selang buka D. Oleh karena itu, alternatif penyelesaian dapat dilakukan menggunakan komputasi numeris yang dihitung secara berulang. Teknik penyelesaian persamaan nonlinear seperti ini disebut metode iterasi.

Teknik yang paling umum digunakan untuk mengkonstruksi metode iterasi adalah ekspansi deret Taylor, baik orde satu maupun orde dua. Ekspansi deret Taylor orde satu menghasilkan metode Newton yang ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\;,\; f'(x) \neq 0, n = 0,1,2,3, \ldots.. \qquad (2)$$

Metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensinya sebesar $2^{1/2} \approx 2,4141$ [1]. Sedangkan ekspansi deret Taylor orde dua menghasilkan metode iterasi berorde konvergensi tiga, yaitu: metode Chebyshev, Halley dan Euler (Halley irasional) [2]. Ketiga Metode iterasi tersebut konvergen secara kubik dan memiliki indeks efisiensi sebesar $3^{1/3} \approx 1,4422$.

Menurut Kung dan Traub [3], pada proses menghampiri penyelesaian eksak, efisiensi metode iterasi sangat dipengaruhi oleh orde konvergensi. Metode iterasi dengan orde konvergensi tinggi, membutuhkan sedikit iterasi dibandingkan dengan metode iterasi yang lebih rendah orde konvergensinya. Selain itu, efisiensi metode iterasi juga dipengaruhi banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan. Ukuran indeks efisiensi (I) dari metode iterasi dengan orde konvergensi p dan melibatkan w evaluasi fungsi pada setiap iterasinya dihitung dengan menggunakan rumusan yang diberikan oleh

$$I = p^{1/w}. \qquad (3)$$

Sedangkan orde konvergensi optimalnya adalah sebesar 2^{w-1}[3]. Oleh karena itu, usaha-usaha untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi telah dilakukan oleh peneliti dengan menggunakan berbagai pendekatan, antara lain: mereduksi turunan kedua [4–7], komposit atau gabungan dua metode iterasi [8–10], dan rataan [11,12].

Pada artikel ini, suatu metode iterasi dikonstruksi dengan menjumlahkan dua metode iterasi berode konvergensi tiga, yaitu metode Weerakoon-Fernando [13] dan Homeier [14], dan kemudian memodifikasinya menggunakan rataan kontra harmonik, sebagaimana yang dilakukan oleh Kanwar dkk. [11]. Untuk memperbesar peluang meningkatnya orde konvergensi, metode iterasi baru diberikan satu parameter real θ. Nilai θ ditentukan dengan menggunakan analisis konvergensi sehingga orde konvergensi metode iterasi menjadi optimal. Pada bagian akhir, diberikan simulasi numerik untuk menentukan peformasi metode iterasi baru, dan kemudian dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya.

2. Metodologi

Kajian pada artikel ini merupakan kajian literatur dengan tahapan-tahapan sebagai berikut. Tahap pertama, dipertimbangkan kembali metode iterasi Weerakoon-Fernando dan Homeier yang berorde konvergensi tiga. Metode iterasi baru dikonstruksi dengan menggabungkan atau menjumlahkan kedua metode iterasi tersebut dan kemudian memodifikasinya dengan menggunakan rataan kontra harmonik. Teknik modifikasi metode iterasi tersebut dilakukan dengan merujuk kepada Kanwar dkk. [11]. Untuk menghindari penggunaan turunan pertama $f'(y_n)$, maka turunan pertama tersebut ditaksir menggunakan bentuk eksplisit dari jumlah dua metode iterasi. Tahapan kedua, menganalisa orde konvergensi dari metode iterasi baru dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Pada tahapan kedua ini, ditentukan nilai parameter real θ agar indeks efisiensi metode iterasi optimal. Pada tahapan ini ditentukan nilai parameter real untuk mengoptimalisasi indeks efisiensi. Tahapan terakhir, diberikan simulasi numerik untuk mengukur peformasi metode iterasi. Ukuran performasi yang dihitung meliputi jumlah iterasi, jumlah evaluasi fungsi, orde konvergensi numerik, dan nilai fungsi. Pada proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear, jumlah iterasi, banyaknya evaluasi fungsi dan orde konvergensi merupakan ukuran tingkat efisiensi metode iterasi. Semakin tinggi orde konvergensi suatu metode iterasi, maka jumlah iterasi yang digunakan semakin sedikit. Hal ini menujukkan bahwa metode iterasi semakin efisien. Sedangkan nilai fungsi yang dihitung pada iterasi tertentu menunjukkan tingkat akurasi metode iterasi saat menghampiri akar-akar persamaan nonlinear.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Modifikasi Metode Iterasi

Pada bagian ini akan dikembangkan bentuk metode iterasi yang dikonstruksi dari penjumlahan dua metode iterasi berorde tiga. Untuk mengkonstruksi metode iterasi baru, pertimbangkan kembali dua metode iterasi berorde konvergensi tiga, yaitu metode Weerakoon-Fernando dan Homeier yang masing-masing ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)}, \tag{4}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right), \tag{5}$$

dengan y_n diberikan pada Persamaan (2). Penjumlahan dua metode iterasi yang diberikan pada Persamaan (4) dan (5) menghasilkan:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} + \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right)\right),$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(16\left(f'(x_n)f'(y_n)\right)^2 + \left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)^4\right)}{2f'(x_n)f'(y_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)\left(4f'(x_n)f'(y_n)+\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)^2\right)}. \tag{6}$$

Berdasarkan teknik yang dilakukan oleh Kanwar dkk. [11], maka Persamaan (6) diubah dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)}\left(\frac{4f'(x_n)f'(y_n)+\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)^2}{2}\right). \tag{7}$$

Persamaan (7) dimanipulasi untuk memperoleh persamaan yang memuat rataan aritmatik dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{8}$$

dengan $a = 4f'(x_n)f'(y_n)$ dan $b = \left(f'(x_n) + f'(y_n)\right)^2$. Selanjutnya, metode iterasi baru dikonstruksi dengan melakukan substitusi bentuk rataan aritmetika dengan rataan kontra harmonik, sehingga Persamaan (8) dapat ditulis kembali menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right). \tag{9}$$

Substitusikan a dan b ke Persamaan (9) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left(\left(4f'(x_n)f'(y_n)\right)^2+\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)^4\right)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))\left(4f'(x_n)f'(y_n)+\left(f'(x_n)+f'(y_n)\right)^2\right)}. \tag{10}$$

Persamaan (10) melibatkan $f'(y_n)$, dan untuk menghindari penggunaan turunan pertama tersebut, maka dilakukan reduksi terhadap turunan pertama $f'(x)$ dalam y_n dengan menyetarakan varian Super-Halley [2] dengan Newton-Steffensen [9].

Selanjutnya pandang kembali metode Newton-Steffensen dan varian super-Halley sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}, \tag{11}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{3f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{12}$$

Setarakan Persamaan (11) dan (12) dan dengan menyederhanakannya diperoleh

$$f'(y_n)^2\left(f(x_n)+f(y_n)\right) = f'(x_n)^2\left(f(x_n)-3f(y_n)\right). \tag{13}$$

Penyelesaian eksplisit Persamaan (13) untuk $f'(y_n)$ diberikan oleh

$$f'(y_n) = \pm\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}}\,f'(x_n). \tag{14}$$

Persamaan (14) memuat bentuk akar kuadratik. Oleh karena itu, aproksimasi bentuk akar kuadratik pada Persamaan (14) dilakukan dengan menggunakan deret Taylor, dan dengan mengambil bentuk akar kuadratik positif diperoleh

$$\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}} = 1 - \frac{2f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)} - \frac{2f(x_n)^2}{\left(f(x_n)+f(y_n)\right)^2} + \cdots. \tag{15}$$

Pemotongan deret Taylor sampai orde satu dan dengan mengabaikan orde selanjutnya, maka Persamaan (15) dapat ditulis menjadi

$$\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}} \approx \frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}. \tag{16}$$

Selanjutnya dengan menggunakan aproksimasi bentuk akar kuadratik pada Persamaan (16), maka bentuk eksplisit $f'(y_n)$ diberikan oleh

$$f'(y_n) = \frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}f'(x_n). \tag{17}$$

Substitusikan taksiran $f'(y_n)$ pada Persamaan (17) ke Persamaan (10), dan dengan menyederhanakannya diperoleh persamaan iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)^4 - 2f(x_n)^2 f(y_n)^2 + f(y_n)^4}{f'(x_n)(2f(x_n)^2 - f(y_n)^2)\big(f(x_n) - f(y_n)\big)}. \tag{18}$$

Untuk memberikan peluang meningkatnya orde konvergensi suatu metode iterasi, beberapa peneliti melakukan modifkasi suatu metode iterasi dengan melibatkan parameter real [4, 7, 15 – 18]. Berdasarkan hal tersebut, maka metode iterasi (18) diberikan satu parameter real θ sehingga bentuk metode iterasi dapat ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)^4 - 2f(x_n)^2 f(y_n)^2 + f(y_n)^4}{f'(x_n)(2f(x_n)^2 - \theta f(y_n)^2)\big(f(x_n) - f(y_n)\big)}, \tag{19}$$

dengan y_n adalah metode Newton yang diberikan oleh Persamaan (2). Persamaan (19) merupakan modifikasi metode iterasi Weerakoon-Fernando dan Homeier yang melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, yaitu: $f(x_n)$, $f'(x_n)$, dan $f(y_n)$.

3.2 Analisis Konvergensi

Pada bagian ini, orde konvergensi metode iterasi yang diberikan pada Persamaan (19) dibahas menggunakan teorema berikut.

Teorema 1. Asumsikan bahwa $f : D \subset R \to R$ memiliki akar sederhana $\alpha \in D$ dan memiliki turunan di interval terbuka D. Jika x_0 adalah nilai awal yang berada cukup dekat dengan α maka orde konvergensi Persamaan (19) adalah empat untuk $\theta = 4$ yang memenuhi persamaan galat sebagai berikut

$$e_{n+1} = (3c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5), \tag{20}$$

dengan $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \ldots, k$, dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan nonliner $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar α untuk $x = x_n$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7) \\ &= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7) \\ &= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\right), \end{aligned}$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)\big(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n^7)\big). \tag{21}$$

Sedangkan ekspansi deret Taylor untuk turunan pertama $f'(x_n)$ di sekitar α adalah

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + O(e_n^6)). \tag{22}$$

Bagikan Persamaan (21) dengan Persamaan (22) sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)). \tag{23}$$

Substitusikan Persamaan (23) ke Persamaan (2) sehingga diperoleh:

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2_c^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{24}$$

Ekspansikan deret Taylor terhadap $f(y_n)$ disekitar α diberikan oleh:

$$f(y_n) = f'(\alpha)\big(c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\big). \tag{25}$$

Berdasarkan Persamaan (21) dan (25), kuadrat dan pangkat empat dari Persamaan (21) dan (25) masing-masing diberikan oleh:

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2\big(e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + (2c_3 + c_2^2)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)\big), \tag{26}$$

$$f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2\big(c_2^2 e_n^4 + (4c_2 c_3 - 4c_2^3)e_n^5 + \cdots + O(e_n^7)\big). \tag{27}$$

$$f(x_n)^4 = f'(\alpha)^4\big(e_n^4 + 4c_2 e_n^5 + (4c_3 + 6c_2^2)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)\big), \tag{28}$$

dan

$$f(y_n)^4 = O(e_n^8). \tag{29}$$

Dengan menggunakan Persamaan (21), dan (25) – (29), maka diperoleh masing-masing

$$2f(x_n)^4 - 2f(x_n)^2 f(y_n)^2 + f(y_n)^4 = f'(\alpha)^4\big(2e_n^4 + 8c_2 e_n^5 + \cdots + O(e_n^7)\big), \tag{30}$$

$$f'(x_n)(2f(x_n)^2 - \theta f(y_n)^2)\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = f'(\alpha)^4(2e_n^3 + 8c_2 e_n^4 + ((14-\theta)c_2^2 + 8c_3)e_n^5 + \cdots + O(e_n^7)\big). \tag{31}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (31) dan (32) ke Persamaan (19) dan dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$, maka Persamaan (19) dapat ditulis

$$x_{n+1} = \alpha - \left(\frac{1}{2}\theta - 2\right)c_2^2 e_n^3 + ((3\theta - 9)c_2^3 + (7 - 2\theta)c_2 c_3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{32}$$

Berdasarkan Persamaan (32) dapat dilihat bahwa orde konvergensi metode iterasi (19) meningkat menjadi empat dengan menyelesaikan hubungan $\frac{1}{2}\theta - 2 = 0$. Oleh karena itu dengan mengambil $\theta = 4$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka Persamaan galat (32) menjadi:

$$e_{n+1} = (-c_2 c_3 + 3c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \quad \square. \tag{33}$$

Persamaan galat (33) menunjukkan bahwa orde konvergensi metode iterasi (19) adalah empat untuk θ = 4. Oleh karena metode iterasi (19) melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, maka indeks efisiensi yang dihitung berdasarkan Persamaan (3) adalah $4^{1/3} \approx$ 1,5874.

Nilai-nilai indeks efisiensi dari beberapa metode iterasi yang dihitung menggunakan (3) diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Perbandingan indeks efisiensi

No	**Metode Iterasi**	**Orde**	**Banyaknya Evaluasi Fungsi**	**Indeks Efisiensi**
1	Newton	2	2	$2^{1/2} \approx 1{,}4142$
2	Halley	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4422$
3	Homeier	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4422$
4	Persamaan (19), $(\theta \neq 4)$	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4422$
5	Persamaan (19), $(\theta = 4)$	4	3	$4^{1/3} \approx 1{,}5874$

Berdasarkan Tabel 1 dapat ditunjukkan bahwa indeks efisiensi metode iterasi (19) $\theta = 4$ paling tinggi dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Hal ini berarti bahwa metode iterasi tersebut paling efisien dibandingkan metode iterasi lainnya dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinear.

3.3 Simulasi Numerik

Untuk menguji performasi metode iterasi yang telah dikonstruksi, maka diberikan simulasi numerik dengan menggunakan lima fungsi bernilai real. Ukuran-ukuran performasi yang dihitung adalah jumlah iterasi, evaluasi fungsi, orde konvergensi yang dihitung secara numerik, baik menggunakann galat mutlak (*computational order of convergence* atau *COC*) maupun galat relatif (*approximated computation of order ofconvergence* atau *ACOC*), dan nilai fungsi yang dihitung dengan total evaluasi fungsi sebanyak dua belas dan iterasi ke-4. Ukuran-ukuran performasi dari metode iterasi (19) untuk $\theta \neq 4$ dengan orde konvergensi tiga (MWFH1) dan $\theta = 4$ dengan orde konvergensi empat (MWFH2) dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, seperti: metode Newton (MN), metode Weerakoon-Fernando (MWF), dan metode Homeier (MH).

Akar-akar hampiran persamaan nonlinear dihitung secara komputasi menggunakan prosesor Intel(R) Core(TM) i5-2430M CPU @2,40GHz dan perangkat lunak Maple 13, serta penghentian komputasi jika memenuhi kriteria

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon, \tag{34}$$

dengan toleransi sebesar 10^{-95}. Sedangkan orde konvergensi yang dihitung secara numerik, baik *COC* maupun *ACOC* masing-masing menggunakan formulasi yang diberikan oleh

$$COC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+2} - \alpha)/(x_{n+1} - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}, \tag{35}$$

dan

$$ACOC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+3} - x_{n+2})/(x_{n+2} - x_{n+1})\right|}{\ln\left|(x_{n+2} - x_{n+1})/(x_{n+2} - x_n)\right|}, \tag{36}$$

dengan $n = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Perhitungan komputasi metode iterasi terhadap fungsi-fungsi bernilai real dilakukan dengan mengambil nilai tebakan awal x_0 sedekat mungkin dengan akar eksaknya. Pada simulasi ini, tebakan awal x_0 diambil sebanyak dua buah untuk setiap fungsi real, yaitu sebelah kiri dan kanan akar eksak α. Adapun fungsi-fungsi bernilai real yang digunakan pada simulasi ini adalah sebagai berikut.

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1,\ \alpha = 0{,}111832559158962,$

$f_2(x) = e^x - 4x^2,\ \alpha = 4{,}306584728220692,$

$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10, \alpha = 1{,}365230034140968,$
$f_4(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1, \alpha = -1{,}00000000000000,$
$f_5(x) = sin^2(x) - x^2 + 1,\ \alpha = 1{,}404491648215341.$

Ukuran-ukuran performasi yang meliputi iterasi, evaluasi fungsi, galat mutlak, nilai fungsi, dan orde konvergensi numeris dari metode iterasi (19) yang dihitung menggunakan kriteria Persamaan (34) ditunjukkan oleh Tabel 2 dan 3.

Tabel 2 Ukuran performasi metode MWFH1 dengan $\varepsilon = 10^{-95}$

$f(x)$	x_0	Iterasi	Evaluasi Fungsi	$\lvert x_{n+1} - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	*COC*	*ACOC*
$f_1(x)$	–0,2	5	15	$1{,}9119 \times 10^{-120}$	$1{,}5184 \times 10^{-120}$	3,000000	2,999996
	0,3	5	15	$3{,}7157 \times 10^{-130}$	$2{,}9510 \times 10^{-130}$	3,000000	3,000001
$f_2(x)$	4,0	5	15	$4{,}2204 \times 10^{-97}$	$1{,}6770 \times 10^{-95}$	3,000000	3,000034
	4,5	5	15	$4{,}2565 \times 10^{-185}$	$1{,}6913 \times 10^{-183}$	3,000000	3,000000
$f_3(x)$	0,1	5	15	$2{,}0350 \times 10^{-137}$	$3{,}3605 \times 10^{-136}$	3,000000	3,000001
	1,5	5	15	$2{,}0438 \times 10^{-131}$	$3{,}3749 \times 10^{-130}$	3,000000	2,999998
$f_4(x)$	1,0	5	15	$1{,}0182 \times 10^{-240}$	$6{,}1091 \times 10^{-240}$	3,000000	3,000000
	2,0	5	15	$1{,}4595 \times 10^{-211}$	$8{,}7571 \times 10^{-211}$	3,000000	3,000000
$f_5(x)$	–1,5	5	15	$1{,}1059 \times 10^{-150}$	$2{,}7454 \times 10^{-150}$	3,000000	3,000000
	0,0	5	15	$2{,}2405 \times 10^{-109}$	$5{,}5619 \times 10^{-109}$	3,000000	2,999985

Tabel 3 Ukuran performasi metode MWFH2 dengan $\varepsilon = 10^{-95}$

$f(x)$	x_0	Iterasi	Evaluasi Fungsi	$\lvert x_{n+1} - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	*COC*	*ACOC*
$f_1(x)$	–0,2	4	12	$9{,}9150 \times 10^{-122}$	$7{,}8745 \times 10^{-122}$	4,000000	3,996632
	0,3	4	12	$3{,}6130 \times 10^{-108}$	$2{,}8694 \times 10^{-108}$	4,000000	3,993829
$f_2(x)$	4,0	5	15	$3{,}7824 \times 10^{-223}$	$1{,}5029 \times 10^{-221}$	4,000000	3,999951
	4,5	4	12	$3{,}2043 \times 10^{-187}$	$1{,}2732 \times 10^{-185}$	4,000000	3,999788
$f_3(x)$	0,1	4	12	$3{,}9648 \times 10^{-114}$	$6{,}5473 \times 10^{-113}$	4,000000	3,994449
	1,5	4	12	$5{,}4418 \times 10^{-130}$	$8{,}9862 \times 10^{-129}$	4,000000	3,997247
$f_4(x)$	1,0	4	12	$9{,}3950 \times 10^{-179}$	$5{,}6370 \times 10^{-178}$	4,000000	4,000354
	2,0	4	12	$1{,}0510 \times 10^{-155}$	$6{,}3059 \times 10^{-155}$	4,000000	4,000855
$f_5(x)$	–1,5	4	12	$3{,}9793 \times 10^{-130}$	$9{,}8786 \times 10^{-130}$	4,000000	3,997109
	0,0	4	12	$8{,}1411 \times 10^{-104}$	$2{,}0210 \times 10^{-103}$	4,000000	3,990635

Tabel 2 dan 3 memperlihatkan performasi metode MWFH1 dan MWFH2 dengan ketelitian sebesar 10^{-95}. Berdasarkan Tabel 2 diperlihatkan bahwa orde konvergensi numerik metode MWFH1 untuk setiap fungsi bernilai real $f_1(x)$, …, $f_5(x)$ dengan menggunakan tebakan awal x_0, baik yang dihitung menggunakan *COC* maupun *ACOC* secara umum cenderung mendekati tiga (*COC* $\rightarrow$ 3, *ACOC* $\rightarrow$ 3). Sedangkan Tabel 3, memperlihatkan bahwa orde konvergensi metode numerik MWFH2 cenderung mendekati empat ($COC \to 4$, $ACOC \to 4$). Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi metode iterasi (19) yang dihitung menggunakan ekspansi deret Taylor sejalan dengan orde konvergensi yang dihitung secara numerik.

Selanjutnya, ukuran performasi metode iterasi yang meliputi jumlah iterasi, banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan untuk setiap iterasi, dan orde konvergensi numerik dari metode iterasi (19) dan beberapa metode iterasi lainnya dengan ketelitian $\varepsilon = 10^{-95}$ diberikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Perbandingan jumlah iterasi, evaluasi fungsi, dan *COC* untuk $\varepsilon = 10^{-95}$

$f(x)$	x_0	Iterasi/Evaluasi fungsi					*COC*				
		MN	MWF	MH	MWFH1	MWFH2	MN	MWF	MH	MWFH1	MWFH2
$f_1(x)$	−0,2	8(16)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	0,3	8(16)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_2(x)$	4,0	8(16)	5(15)	4(12)	5(15)	5(15)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	4,5	7(14)	5(15)	5(12)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_3(x)$	1,0	8(16)	5(15)	4(12)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	2,0	8(16)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_4(x)$	−1,5	7(14)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	0,0	7(14)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_5(x)$	1,2	6(12)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	2,0	8(16)	5(15)	5(15)	5(15)	4(12)	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000

Pada Tabel 4 ditunjukkan bahwa secara umum metode MWFH2 menggunakan lebih sedikit iterasi dan evaluasi fungsi dibandingkan dengan MN, MWF, MH, dan MWFH1. Hal ini dikarenakan orde konvergensi metode iterasi MWFH2 lebih tinggi diban-dingkan dengan metode iterasi lainnya, sehingga penggunaan iterasi dan jumlah evaluasi fungsi setiap iterasinya lebih sedikit.

Tabel 4 juga menunjukkan bahwa orde konvergensi yang dihitung secara komputasi baik untuk $\theta \neq 4$ maupun $\theta = 4$ masing-masing adalah 3 dan 4. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi metode MWHF2 lebih tinggi dibandingkan dengan orde konvergensi metode iterasi lainnya.

Selain menggunakan ukuran jumlah iterasi dan evaluasi fungsi, nilai fungsi ($|f(x_n)|$) juga dapat digunakan untuk mengukur sejauh mana akurasi metode iterasi pada saat menghampiri solusi eksaknya. Tabel 5 dan 6 menunjukkan nilai fungsi yang dihitung untuk total dua belas evaluasi fungsi (*total number of functional evalutions* atau TNFE = 12) dan iterasi ke-4 (IT = 4). Untuk TNFE = 12, maka nilai fungsi dihitung pada iterasi ke-12/*w*. Metode MN yang melibatkan dua evaluasi fungsi, maka nilai fungsi dihitung pada iterasi ke-6, sedangkan metode MWFH2 yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, maka nilai fungsi dihitung pada iterasi ke-4. Tabel perbandingan nilai fungsi berdasarkan total evaluasi fungsi dan iterasi diberikan pada Tabel 5 dan 6.

Tabel 5 Perbandingan nilai $|f(x_n)|$ dengan total evaluasi fungsi sebesar 12

$f(x)$	x_0	MN	MWF	MH	MWFH1	MWFH2
$f_1(x)$	–0,2	$3{,}0851\times10^{-36}$	$1{,}6190\times10^{-42}$	$1{,}6813\times10^{-62}$	$8{,}2675\times10^{-41}$	$7{,}8744\times10^{-122}$
	0,3	$1{,}0736\times10^{-42}$	$1{,}0171\times10^{-49}$	$2{,}3013\times10^{-94}$	$4{,}7889\times10^{-44}$	$2{,}8694\times10^{-108}$
$f_2(x)$	4,0	$5{,}0254\times10^{-33}$	$3{,}8581\times10^{-38}$	$4{,}5009\times10^{-98}$	$2{,}9413\times10^{-31}$	$1{,}5029\times10^{-221}$
	4,5	$3{,}1920\times10^{-52}$	$4{,}2890\times10^{-63}$	$3{,}7302\times10^{-87}$	$1{,}3691\times10^{-60}$	$1{,}2731\times10^{-185}$
$f_3(x)$	1,0	$3{,}9823\times10^{-43}$	$1{,}5025\times10^{-52}$	$1{,}4375\times10^{-99}$	$6{,}3345\times10^{-45}$	$6{,}5472\times10^{-113}$
	2,0	$1{,}2362\times10^{-37}$	$4{,}4372\times10^{-46}$	$1{,}4165\times10^{-71}$	$6{,}3436\times10^{-43}$	$8{,}9862\times10^{-129}$
$f_4(x)$	–1,5	$5{,}7390\times10^{-66}$	$5{,}5544\times10^{-53}$	$1{,}6307\times10^{-55}$	$1{,}7411\times10^{-79}$	$5{,}6369\times10^{-178}$
	0,0	$1{,}9261\times10^{-65}$	$8{,}9611\times10^{-36}$	$1{,}7987\times10^{-33}$	$9{,}1122\times10^{-70}$	$6{,}3058\times10^{-155}$
$f_5(x)$	1,2	$2{,}0864\times10^{-47}$	$3{,}2340\times10^{-58}$	$2{,}0339\times10^{-106}$	$2{,}6386\times10^{-50}$	$9{,}8785\times10^{-130}$
	2,0	$2{,}2623\times10^{-32}$	$1{,}4945\times10^{-41}$	$1{,}3726\times10^{-73}$	$1{,}5497\times10^{-36}$	$2{,}0210\times10^{-103}$

Tabel 5 memperlihatkan nilai-nilai fungsi beberapa metode iterasi yang dihitung berdasarkan TNFE = 12. Perbandingan dilakukan untuk setiap fungsi real yang diuji, MWFH2 secara umum memiliki nilai fungsi lebih kecil dari 10^{-103} yang mana nilai-nilai fungsi tersebut jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai fungsi metode iterasi lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa MWFH2 memiliki akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Tabel 6 Perbandingan nilai $|f(x_n)|$ pada iterasi ke-4

$f(x)$	x_0	MN	MWF	MH	MWFH1	MWFH2
$f_1(x)$	–0,2	$1{,}0651\times10^{-09}$	$1{,}6190\times10^{-42}$	$1{,}6813\times10^{-62}$	$8{,}2675\times10^{-41}$	$7{,}8744\times10^{-122}$
	0,3	$2{,}5868\times10^{-11}$	$1{,}0171\times10^{-49}$	$2{,}3013\times10^{-94}$	$4{,}7889\times10^{-44}$	$2{,}8694\times10^{-108}$
$f_2(x)$	4,0	$1{,}5284\times10^{-07}$	$3{,}8581\times10^{-38}$	$4{,}5009\times10^{-98}$	$2{,}9413\times10^{-31}$	8.9429×10^{-55}
	4,5	$2{,}4263\times10^{-12}$	$4{,}2890\times10^{-63}$	$3{,}7302\times10^{-87}$	$1{,}3691\times10^{-60}$	$1{,}2731\times10^{-185}$
$f_3(x)$	1,0	$3{,}5124\times10^{-10}$	$1{,}5025\times10^{-52}$	$1{,}4375\times10^{-99}$	$6{,}3345\times10^{-45}$	$6{,}5472\times10^{-113}$
	2,0	$8{,}2905\times10^{-09}$	$4{,}4372\times10^{-46}$	$1{,}4165\times10^{-71}$	$6{,}3436\times10^{-43}$	$8{,}9862\times10^{-129}$
$f_4(x)$	–1,5	$7{,}1934\times10^{-16}$	$5{,}5544\times10^{-53}$	$1{,}6307\times10^{-55}$	$1{,}7411\times10^{-79}$	$5{,}6369\times10^{-178}$
	0,0	$9{,}7364\times10^{-16}$	$8{,}9611\times10^{-36}$	$1{,}7987\times10^{-33}$	$9{,}1122\times10^{-70}$	$6{,}3058\times10^{-155}$
$f_5(x)$	1,2	$5{,}0752\times10^{-12}$	$3{,}2340\times10^{-58}$	$2{,}0339\times10^{-106}$	$2{,}6386\times10^{-50}$	$9{,}8785\times10^{-130}$
	2,0	$2{,}9123\times10^{-08}$	$1{,}4945\times10^{-41}$	$1{,}3726\times10^{-73}$	$1{,}5497\times10^{-36}$	$2{,}0210\times10^{-103}$

Selanjutnya, Tabel 6 menunjukkan bahwa secara umum metode MWFH2 lebih unggul dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Hal ini dilihat dari nilai-nilai fungsi yang dihitung pada iterasi ke-4 untuk setiap fungsi real $f_1(x)$ sampai dengan $f_5(x)$, metode MWFH2 memiliki nilai fungsi dengan rata-rata ketelitian lebih kecil dari 10^{-103}, kecuali untuk $f_2(x)$ dengan nilai awal 4,0.

4 Kesimpulan

Modifikasi metode iterasi Weerakoon-Fernando dan Homeier menggunakan rataan kontra harmonik dengan satu parameter real θ menghasilkan suatu metode iterasi berorde konvergensi tiga untuk $\theta \neq 4$, dan empat untuk $\theta = 4$. Selain itu, metode iterasi tersebut juga melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya. Metode iterasi mempunyai orde konvergensi optimal untuk $\theta = 4$ dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode baru yang dihitung secara komputasi baik *COC* maupun *ACOC* adalah tiga untuk $\theta \neq 4$, dan empat untuk $\theta = 4$. Selain itu, secara umum untuk setiap fungsi real yang diuji dengan menggunakan tebakan awal x_0, metode MWFH2 mempunyai performa yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Daftar Pustaka

[1] J.F. Traub, *Iterative Methods for The Solution of Equations*. New York: Prentice-Hall, Inc, 1964.

[2] A. Melman, “Geometry and convergence of Euler’s and Halley’s methods,” *SIAM Rev.*, vol. 39, no. 4, pp. 728–735, 1997. [CrossRef]

[3] H.T. Kung and J.F. Traub, “Optimal order of one-point and multipoint iteration,” *J. Assoc. Comput. Mechinary*, vol. 21, no. 4, pp. 643–651, 1974. [CrossRef]

[4] M. Kansal, V. Kanwar, and S. Bhatia, “Optimized mean based second derivative-free families of Chebyshev–Halley type methods,” *Numer. Anal. Appl.*, vol. 9, no. 2, pp. 129–140, 2016. [CrossRef]

[5] W. Wartono dan D. Elriska, “Modifikasi metode Householder tanpa turunan kedua dengan orde konvergensi optimal,” *J. Mat. UNAND*, vol. 10, no. 2, pp.. 218–228, 2021. [CrossRef]

[6] X. Yu and X. Xu, “A new family of chebyshev-halley like methods free from second derivative,” *Fixed Point Theory*, vol. 13, no. 1, pp. 319–325, 2012. [GreenVersion]

[7] Wartono, M. Soleh, I. Suryani, Zulakmal, and Muhafzan, “A new variant of Chebyshev-Halley’s method without second derivative with convergence of optimal order,” *Asian J. Sci. Res.*, vol. 11, no. 3, pp. 409–414, 2018. [CrossRef]

[8] J. Kou, Y. Li, and X. Wang, “A composite fourth-order iterative method for solving non-linear equations,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 184, no. 2, pp. 471–475, 2007. [CrossRef]

[9] R. Ezzati and F. Saleki, “On the construction of new iterative methods with fourth-order convergence by combining previous methods,” *Int. Math. Forum*, vol. 6, no. 27, pp. 1319–1326, 2011. [GreenVersion]

[10] A. Husni dan W. Wartono, “Modifikasi metode iterasi dua langkah menggunakan kombinasi linear tiga parameter real,” *Euclid*, vol. 6, no. 2, pp. 157–166, 2019. [CrossRef]

[11] V. Kanwar, S. K. Tomar, S. Singh, and S. Kumar, “Note on super-Halley method and its variants,” *Tamsui Oxford J. Inf. Math. Sci.*, vol. 28, no. 2, pp. 191–216, 2012. [GreenVersion]

[12] M. Arif dan Wartono, “Orde konvergensi modifikasi metode Weerakoon-Fernando dan Homeier dengan parameter riil menggunakan rataan harmonik,” *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, pp. 74–81, 2018. [CrossRef]

[13] S. Weerakoon and T.G.I. Fernando, “A variant of Newton’s method with accelerated third-order convergence,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 13, pp. 87–93, 2000. [CrossRef]

[14] H.H.H. Homeier, “On Newton-type methods with cubic convergence,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 176, no. 2, pp. 425–432, 2005. [CrossRef]

[15] D. Li, P. Liu, and J. Kou, “An improvement of Chebyshev – Halley methods free from second derivative,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 235, pp. 221–225, 2014. [CrossRef]

[16] Wartono, R. Agustiwari, and Rahmawati, “New modification of Behl’s method free from second derivative with an optimal order of convergence,” *Indones. J. Pure Appl. Math.*, vol. 1, no. 2, pp. 10–19, 2019. [CrossRef]

[17] N. Srisarakham, “A familiy of modified Chebyshev-Halley’s iterative methods with two parameters for nonlinear equations,” *Int. J. Math. Comput. Sci.*, vol. 16, no. 1, pp. 553–562, 2021. [GreenVersion]

[18] M. Kansal, V. Kanwar, and S. Bhatia, “New modifications of Hansen-Patrick’s family with optimal fourth and eighth orders of convergence,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 269, pp. 507–519, 2015. [CrossRef]